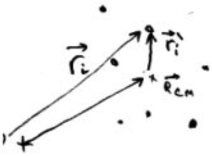
16.11.04

אנרגיה קינטית במרכז המסה

נחזור שוב להגדרה שלמערכת מרכז המסה, ונסתכל על הביטוי עבור האנרגיה שבה.

$$\underbrace{\vec r_i}_{\text{מיקום חלקיק}} = \underbrace{\vec R_{cm}}_{\text{מיקום מרכז המסה}} + \underbrace{\vec r_i'}_{\text{מיקום יחסי למרכז המסה}}$$



$\vec r_i'$ מתאר את מיקום החלקיק i יחסית למרכז המסה.

* ראינו כי התנע מקיים:
$$m_i\dot{\vec r}_i = m_i\dot{\vec R}_{cm} + m_i\dot{\vec r}_i'$$
ואחרי סיכום:
$$\vec P = M\dot{\vec R}_{cm} + \sum m_i\dot{\vec r}_i'$$

ז"א, התנע הכללי של המערכת הוא התנע של מרכז המסה + התנע של החלקיקים יחסית למרכז המסה.

אולם, אם המסות m_i קבועות:
$$\sum m_i\dot{\vec r}_i' = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum m_i\vec r_i'}_{=M\vec R_{cm}'}\Big) = 0$$
כאשר $\vec R_{cm}'$ הווקטור מרכז המסה במערכת מרכז המסה ולכן שווה לאפס!

ולכן:
$$\vec P = M\dot{\vec R}_{cm}$$

$\Leftarrow$ התנועה של החלקיקים במערכת מרכז המסה אינה תורמת לתנע הקווי הזה ואם היא היתה תורמת, היא היתה עושה זאת דרך שינוי ב-$\dot{\vec R}_{cm}$.

* אנרגיה קינטית:
$$K = \frac12\sum_i m_i\dot r_i^2 = \frac12\sum_i m_i(\dot{\vec R}_{cm}+\dot{\vec r}_i')\cdot(\dot{\vec R}_{cm}+\dot{\vec r}_i')$$
$$= \frac12\underbrace{\sum m_i}_{M}\dot R_{cm}^2 + \underbrace{\sum m_i\dot{\vec r}_i'}_{=0}\cdot\dot{\vec R}_{cm} + \frac12\sum m_i\dot{\vec r}_i'^{\,2}$$
מהגדרה של מרכז המסה!

ז"א, קיבלנו שהאנרגיה הקינטית היא:
$$K = \frac12 MV_{cm}^2 + \sum\frac12 m_i(v_i')^2$$

כלומר, האנרגיה הקינטית שווה לאנרגיה הקינטית של חלקיק נקודתי הנע במרכז המסה ועוד סכום האנרגיות של החלקיקים הנעים יחסית למרכז המסה.

$$K = K_{cm} + K'$$

הביטוי הזה נכון אילו היינו עובדים במרכז המסה.

התנע הזויתי

התנע הזויתי עבור חלקיק יחיד, מוגדר כ:

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

למה שווה השינוי שלו בזמן?

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{=0 \text{ כי } \vec{v}\parallel\vec{v}} + \vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r}\times\vec{F} \equiv \vec{N}$$

את $\vec{r}\times\vec{F}$ מגדירים כמומנט כח ביחס לראשית הצירים. אנו רואים כי:

$$\underbrace{\dot{\vec{P}}=\vec{F}}_{\text{קווי}} \qquad \underbrace{\dot{\vec{l}} = \vec{N}}_{\text{סיבובי}}$$

* דוגמא: מומנט הכח על מערכת בנוכחות שדה הכבידה.

$$\underbrace{\vec{F}_i = m_i\vec{g}}_{\text{הכח על החלקיק } i}$$

מומנט הכח יהיה:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times(m_i\vec{g}) =$$

$$= -\vec{g}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}_{M\cdot R_{cm}} = MR_{cm}\times\vec{g}$$

המומנט השקול אקויולנטי לכח של המסה נמצאת במרכז המסה והיא נקודתית.

* התנע הזויתי של N מסות במרכז המסה:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i\times\dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i(R_{cm}+\vec{r}_i{}')\times(\dot{R}_{cm}+\dot{\vec{r}}_i{}') =$$

$$= R_{cm}\times M\dot{R}_{cm} + \sum m_i\vec{r}_i{}'\times\dot{\vec{r}}_i{}' + \vec{R}_{cm}\times\underbrace{\sum m_i\dot{\vec{r}}_i{}'}_{=0} + \underbrace{\sum m_i\vec{r}_i{}'}_{=0}\times\dot{\vec{R}}_{cm}$$

כי סוכמים במערכת מרכז המסה

לכן, ניתן לכתוב:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{L}_{cm}}_{\text{תנע זויתי של מרכז המסה}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i{}'}_{\text{תנע זויתי יחסית למרכז המסה}}$$

לא ניתן לעשות זאת אם עובדים יחסית לנקודה שאינה מרכז המסה

16.11.04

* מה קורה לתנע זוויתי בכח מרכזי ?

$$\vec{r}\times\vec{F}=0 \iff \vec{r}\parallel\vec{F}$$

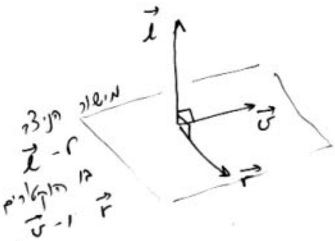
אם בוחרים את מערכת הצירים במרכז הכח אזי $\vec{r}$ ו- $\vec{F}$ באותו כיוון.

והתנע הזוויתי לכן קבוע:

$$\frac{d}{dt}\vec{l}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}=0$$

$$\vec{l}=\vec{r}\times m\vec{v}=const$$

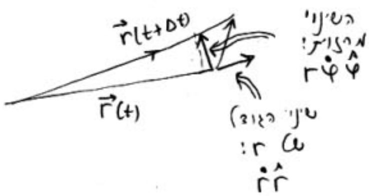
מסקנה ראשונה: תנועה המקיימת $\vec{r}\times\vec{F}=0$ (כי $\vec{r}\parallel\vec{F}$) היא במישור קבוע המוגדר ע"י $\vec{l}$ הניצב למישור:



לכן, כדאי ורצוי לעבוד בקואורדינטות קטביות במישור (או מישור של גלינדרי או מישור של כדורי).

במקרה כזה: $\vec{r}(t)=r(t)\hat{r}(t)$

לכן: $\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$ } משפט ראשון או שני



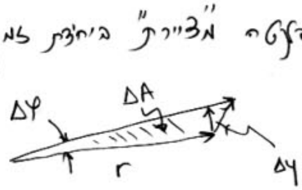
התנע הזוויתי הוא לכן:

$$\vec{l}=m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=mr\hat{r}\times(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\varphi}\hat{\varphi})$$

$$=mr^2\dot{\varphi}\,\underbrace{(\hat{r}\times\hat{\varphi})}_{\hat{z}}=mr^2\dot{\varphi}\hat{z}$$

$\hat{r}\times\hat{r}=0$

זהו למעשה החוק השני של קפלר האומר כי הקטע "מצייר" ביחידת זמן שטח קבוע:



$$\Delta A=\frac{r\Delta\varphi}{2}\cdot r=\frac{r^2\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{l}{2m}=const$$

תנע זויתי במערכת חלקיקים

נסתכל על אוסף של N חלקיקים, כאשר על כל חלקיק פועל כח $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$

$F_i^{(ext)}$ הוא הכח החיצוני על חלקיק i ואילו $\vec{f}_{ij}$ היא הכח שחלקיק j מפעיל על i.

מומנט הכח הכולל שפועל על המערכת:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$$

את הסכום ניתן לפרק כסכום על $i<j$ ואז לסכום זוגות (i,j) יחדיו:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \sum_{j>i} \left((\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) \right)$$

מהחוק השלישי של ניוטון: $\vec{f}_{ji} = -\vec{f}_{ij}$ ולכן:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j>i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}$$

את הביטוי הנ"ל ניתן לפשט אם הכח $\vec{f}_{ij}$ הוא בכיוון הוקטור המחבר את שני החלקיקים i ו- j. זה לא מתחייב מן המשוואות במקרה הכללי, אולם עבור כוחות מרכזיים (כבידה, אלקטרוסטטי), זה מתקיים:

$$\vec{f}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

ואז המכפלה הוקטורית ביניהם מתאפסת והמומנט יהיה רק מהכוחות החיצוניים:

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

(במקרה והכח החיצוני הוא מכבידה אז $\vec{F}_i^{ext} = \vec{g} m_i$ ואז

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{g} m_i = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times g = M\vec{R}_{CM} \times \vec{g}$$

אולם במקרה הכללי לא ניתן לפשט את הביטוי הנ"ל)