אסטרופיזיקה וקוסמולוגיה - פתרון דף תרגילים מס' 4:

שאלה 1

א. בפתרון כוכבים הומולוגיים הגדרנו: $\frac{r_1}{R_1}=\frac{r_2}{R_2}\equiv x$. כמו כן, בעזרת משוואות הרציפות וההידרוסטטיות קיבלנו:

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

וגם:

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$$

הפעם, משוואת המצב המקשרת בין T, P ו-ρ תהיה שונה:

$$P=\frac{aT^4}{3}\implies T=\left(\frac{3}{a}\right)^{1/4}P^{1/4}$$

ולכן נקבל מיד:

$$\frac{T_2(x)}{T_1(x)}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^1\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/2}$$

משוואת שימור האנרגיה נתונה:

$$\frac{dL}{dR}=4\pi r^2\tilde{\epsilon}\rho^2T^n$$

כאשר n הוא פרמטר של הראקציות הגרעיניות נקבל:

$$\frac{dL_1}{dx}=\frac{dL_1}{dr_1}\frac{dr_1}{dx}=4\pi r_1^2\tilde{\epsilon}_1\rho_1^2T_1^nR_1=$$

$$=4\pi r_2^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\tilde{\epsilon}_2\left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}\right)\rho_2^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2T_2^n\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^nR_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

כל האיברים מחוץ לסוגריים

$$=\frac{dL_2}{dr_2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(\frac{\tilde{\epsilon}_1}{\tilde{\epsilon}_2}\right)\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^6\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{n/2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$=\frac{dL_2}{dx}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+3}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^{\frac{n+4}{2}}\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\right)$$

אחרי אינטגרציה על $\int dx$ והעברת אגפים:

$$L_2=L_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{n+4}{2}}\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)$$

ד. כפי שעשינו בכיתה, נשתמש כעת במשוואת מעבר הקרינה:

$$\frac{dT_2}{dx} = R_2 \frac{dT_2}{dr_2} = R_2 \underbrace{\frac{(-)3}{16\pi a c}}_{\equiv A} \frac{\tilde{\kappa}_2 \rho_2^2 T_2^{-6.5}}{r_2^2} L_2 =$$

$$= R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right) A\, \tilde{\kappa}_1\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right) \rho_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2 T_1^{-6.5}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-6.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{-6.5} \times$$

$$\times \frac{1}{r_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \underbrace{L_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{n+4}{2}}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)}_{\text{מסעיף ג'}}$$

$$= \frac{dT_1}{dx}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2n+7}{2}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2n+3}{4}}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\tilde{\kappa}_2}{\tilde{\kappa}_1}\right)$$

אחרי אינטגרציה $\int dx$ מתקבל:

$$\frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{2n+7}{2}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2n+3}{4}}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\kappa}_2}{\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\kappa}_1}\right)$$

אולם מצד שני (מסעיף ג'):
(ממשוואת המצב).

$$\frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/2}$$

אם נשווה את שני הצדדים יחד, נקבל:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\underbrace{\frac{2n+7}{2}-1}_{=\frac{2n+5}{2}}} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{\frac{2n+3}{4}-\frac{1}{2}}_{\frac{2n+1}{4}}}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\kappa}_2}{\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\kappa}_1}\right)$$

או:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2n+1}{4n+10}}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 \tilde{\kappa}_2}{\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\kappa}_1}\right)^{\frac{2}{2n+5}}$$

בהנחה ש- $\tilde{\epsilon}$ ו- $\tilde{\kappa}$ קבועים:

$$R_* \propto M^{\frac{2n+1}{4n+10}} \longrightarrow M \propto R^{\frac{4n+10}{2n+1}}$$

מהסעיף הקודם קבלנו:

$$L \propto R^{-(n+3)} M^{\left(\frac{n+4}{2}\right)}$$

ולכן:

$$L \propto R^{-(n+3)+\left(\frac{n+4}{2}\right)\left(\frac{4n+10}{2n+1}\right)} = R^{\frac{17+6n}{1+2n}}$$

או:

$$R \propto L^{\frac{1+2n}{17+6n}}$$

דף תרגילים 4, שאלה 1

(סעיף ב המשך)

הקשר בין T_{eff} לבין שאר הגדלים:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

ולכן:

$$T_{eff}^4 \propto \frac{L}{R^2} \propto L^{+1-\frac{2+4n}{17+6n}} = L^{\frac{15+2n}{17+6n}}$$

מעמוד קודם

או:

$$L \propto T_{eff}^{\frac{68+24n}{15+2n}}$$

ג. בכיתה מצאנו שעבור כוכבים הנשלטים ע"י לחץ גז ומעבר קרינה:

$$L \propto T_{eff}^{4\frac{(10n+31)}{(6n+45)}}$$

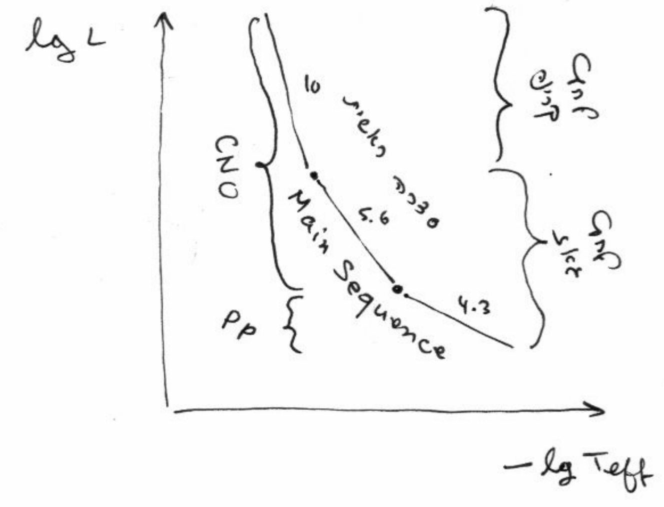
היחס בין L ו- T בשלושת התחומים השונים יהיה:

(1) לחץ גז + $\frac{PP}{M\simeq 5}$ $\qquad L \propto T_{eff}^{4.3}$

(2) לחץ גז + $\frac{CNO}{M\simeq 20}$ $\qquad L \propto T_{eff}^{5.6}$

(3) לחץ קרינה + $\frac{CNO}{M\simeq 20}$ $\qquad L \propto T_{eff}^{10}$

או בגרף:



דף תרגילים 4 - שאלה 2

אם קבוע הגרביטציה אינו קבוע, יש לשחזר את חישוב $\frac{L_2}{L_1}$ אולם לאפשר ל-G להשתנות. העבודה לא מהירה כפי שניתן לחשוב בתחילה.

העובדה ש-G אינו קבוע תכנס דרך המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \longrightarrow \frac{P_2}{P_1} = \underbrace{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2}_{\text{חישוב כמו מקודם}}\underbrace{\left(\frac{G_2}{G_1}\right)}_{\text{התוספת שלי}}$$

התוספת שלי חישוב כמו מקודם.

אם נזכיר זאת במשוואת המצב:

$$T = \frac{\mu m_p}{k}\frac{P}{\rho} \longrightarrow \frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)\left(\frac{G_2}{G_1}\right)$$

היות והמשך הפיתוח לא משתמשים שוב במשוואה ההידרוסטטית או ב-$\frac{P_2}{P_1}$, הופעת G (G_2/G_1) בשאר הפיתוח תהיה דרך (T_2/T_1). כמו כן, μ_2/μ_1 לא יכנס לפיתוח אלא דרך (T_2/T_1). לכן, התלות המעריכית ב-G_2/G_1 תהיה זהה לזו של μ_2/μ_1 !

בפיתוח מצאנו כי:

$$L \propto \mu^{\frac{14n+45}{2n+5}}$$

(עבור לחץ גאז דומיננטי כפי שיש בשמש). ולכן:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{\frac{14n+45}{2n+5}}$$

כאשר רק G משתנה.

$$G \propto L^{\frac{2n+5}{14n+45}} \overset{n\simeq 5}{=} \frac{15}{115} = \frac{3}{23}$$

אם $\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \overset{\text{מ}}{<} 0.3$ אז:

מגיאולוגיה - הלא הם אוקיינוסים אך הם לא היו קפואים ולא אדים.

עבור $L_+ = 1.3L$ מתקבל: $G_+ = 1.035$

עבור $L_- = 0.7L$ מתקבל: $G_- = 0.955$

כלומר: $\Delta L = \pm 30\%$ מתקבל עבור $\Delta G \simeq \pm 4\%$.

כלומר, בעזרת גיאולוגיה ניתן להסיק שקבוע הגרביטציה לא היה שונה ביותר מ- $\sim 4\%$ לפני $1/3$ מגיל היקום, אחרת השמש היתה בהירה מדי או פחות מדי.

דף תרגילים מס' 4 שאלה 3

בכיתה קבלנו תוצאה עבור L_2/L_1. אם נניח שכל הפרמטרים קבועים פרט לכך

ש- $\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$ (נקבל): $L_2 \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}} \underset{\substack{\uparrow \\ n\simeq 5}}{=} Z^{-16/15}$

כמו כן, התוצאה עבור R_2/R_1 נהיית: $R \propto Z^{2/(2n+5)}$

הטמפ' האפקטיבית:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \Rightarrow T_{eff}^4 \propto L R^{-2} \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5} - 2\frac{2}{2n+5}} \overset{n=5}{\underset{\downarrow}{=}} Z^{-4/3}$$

עבור השמש, הקטנת Z בפקטור 2 תגדיל את עוצמת הארה פי: $2^{16/15} = 2.094$

ותגדיל את הטמפ' האפקטיבית פי: $2^{+1/3} = 1.26$

אם אנו מסתכלים על אוסף של כוכבים המשמעות של שינוי מיקום הסדרה הראשית הוא שינוי L ב-T_{eff} נתון (ראה: גרף למטה). כלומר, הפעם יש לאפשר ל-M להשתנות:

מהתוצאות בכיתה: $(\#1)\quad R \propto Z^{\frac{2}{2n+5}} M^{\frac{2n-7}{2n+5}}$

ו- $(\#2)\quad L \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}} M^{\frac{10n+31}{2n+5}}$

והאילוץ: $Const = T_{eff}^4 \propto L R^{-2} \Rightarrow L \propto R^2 \quad (\#3)$

(#1)+(#3) נותנים: $L^{1/2} \propto M^{\frac{2n-7}{2n+5}} Z^{\frac{2}{2n+5}}$

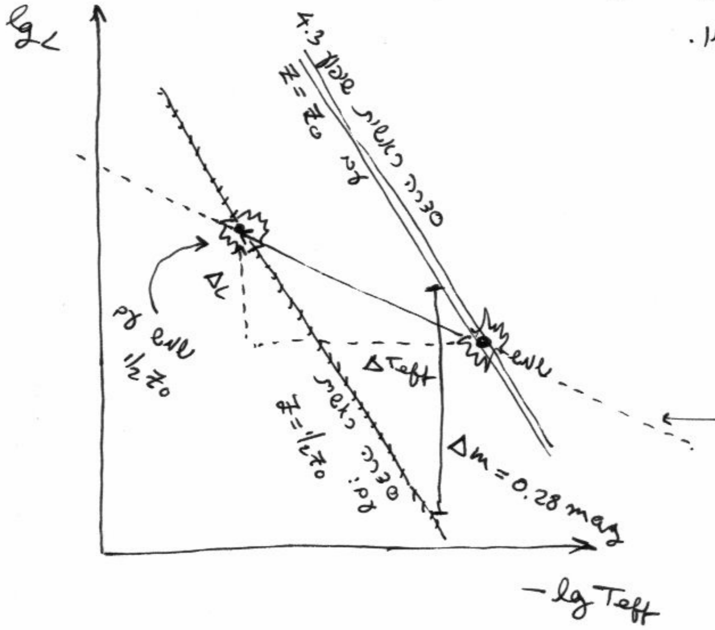
ביחד עם (#2) מקבלים: $L \propto Z^{\frac{4(2+n)}{45+6n}} \overset{n=5}{\underset{\downarrow}{=}} Z^{28/75} \simeq Z^{0.373}$

ז.א. הסדרה הראשית של כוכבים עם $1/2$ ה-Z

יושבים מתחת לסדרה הראשית עם Z נתון.

השינוי יהיה:

$$\Delta m = 2.5 \lg_{10} \underbrace{2^{0.373}}_{1.295} = 0.28\,mag$$



$$\text{שיפוע} = \frac{\left.\frac{\partial \ln L}{\partial Z}\right|_M}{\left.\frac{\partial \ln T_{eff}}{\partial Z}\right|_M} = \frac{-1.06}{-3/5} = 1.77$$