דף תרגילים מס' 6 -

שאלה 1 : לחישוב הראקציות הגרעיניות יש את הצורה:

$$\int_{0 \to -\infty}^{\infty} S(E) \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{E}} - \frac{E}{kT}\right) dE \quad ; \quad S(E) \overset{\text{קירוב לינארי:}}{\approx} S(E_0) + \frac{\partial S}{\partial E}(E-E_0)$$

$\underbrace{0 \to -\infty}_{\text{בקירוב.}}$

בסדר הראשון, קירבנו את ה-() של האקספוננט כפרבולה (וקבלנו גאוסיאן עם האקספוננט). אם נעשה זאת שוב נקבל אינטגרל מהצורה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(A + B(E-E_0)\right) \exp\left(-C - \cancel{B} D (E-E_0)^2\right)$$

היות והאקספוננט (גאוסיאן) סימטרי סביב E_0, האיבר של B לא יתרום דבר היות ו-$(E-E_0)$ אנטי סימטרי סביב E_0. לכן, יש לפתח את $-\frac{b}{\sqrt{E}} - \frac{E}{kT}$ לסדר אחד יותר גבוה. נקבל:

$$-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}} \simeq -\frac{3E_0}{kT} - \frac{3(\overbrace{E-E_0}^{\equiv \delta E})^2}{4E_0 kT} + \frac{5\,\delta E^3}{8E_0^2 kT}$$

$\uparrow$ טיילור סביב E_0

קצב הראקציה יהיה אם כן יחסי ל-:

$$r \propto \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(E_0) + \frac{\partial S}{\partial E}\delta E}_{= S(E_0)\left(1 + \frac{\partial \ln S}{\partial E}\delta E\right)} \cdot \exp\left(-\frac{3E_0}{kT} - \frac{3\delta E^2}{4E_0 kT} + \underbrace{\frac{5\,\delta E^3}{8E_0^2 kT}}_{\text{עם האקספוננט:}}\right) dE$$

$$\exp(\,) \simeq 1 + \frac{5\,\delta E^3}{8E_0^2 kT}$$

לכן:

$$\simeq \int_{-\infty}^{\infty} S(E_0)\left(1 + \frac{\partial \ln S}{\partial E}\delta E\right)\left(1 + \frac{5}{8}\frac{\delta E^3}{E_0^2 kT}\right) \exp\left(-\frac{3E_0}{kT} - \frac{3\delta E^2}{4E_0 kT}\right) dE$$

האיברים עם δE ו- δE^3 יתנו אפס באינטגרציה
כי הגאוסיאן סימטרי ב- δE.

ז.א,

$$r = r_0\left(1 + \frac{I_1}{I_0}\right)$$

כאשר

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) \exp\left(-\frac{3\delta E^2}{4E_0 kT}\right) dE =$$

$$= \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) \cdot 2\sqrt{\frac{\pi E_0 kT}{3}}$$

-1

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right)\exp\left(-\frac{3\delta E^2}{4E_0 kT}\right)\frac{5}{8}\,\frac{\delta E^4}{E_0^2 kT}\,\frac{\partial \ln S}{\partial E}\,dE$$

$$= \frac{5}{3}\,\frac{d\ln S}{dE}\,\exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right)\,kT^{3/2}\sqrt{\frac{\pi E_0}{3}}$$

כ"א, שינוי קצב הריאקציה הוא:

$$G = \left(1 + \frac{I_1}{I_0}\right) = 1 + \frac{5}{6}\,kT\,\frac{d\ln S}{dE}$$

QED

דף תרגילים 6: שאלה 2:

א. קצב הריאקציה (מס' ריאקציות ליח' נפח ליח' זמן) של התהליך: $p+p \to D+\beta^{+}+\nu$

הוא: $r_{pp}=\frac{1}{2}n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp}$. החצי הוא מפני ששני החלקיקים זהים. לכן קצב ההריסה של p ע"י הריאקציה pp הוא:

$$\frac{dn_p}{dt} = 2\cdot(-)\frac{1}{2}n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp} = -n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp}$$

ה"-" כי יש הריסה. הפקטור 2 כי כל ריאקציה הורסת שני p-ים.

קצב הריאקציה $p+d \to {}^3He+\gamma$ הוא: $r_{pd} = n_p n_d\langle\sigma v\rangle_{pd}$

שינוי הדויטריום הוא לכן:

$$\frac{dn_d}{dt} = -\underbrace{n_p n_d\langle\sigma v\rangle_{pd}}_{\text{הריסה של } d} + \underbrace{\frac{1}{2}n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp}}_{\text{יצירה של } d}$$

ב. בשיווי משקל $\frac{dn_d}{dt}\to 0$ ולכן:

$$0 = -n_p n_d\langle\sigma v\rangle_{pd} + \frac{n_p^2}{2}\langle\sigma v\rangle_{pp} \Longrightarrow n_d = \frac{n_p}{2}\frac{\langle\sigma v\rangle_{pp}}{\langle\sigma v\rangle_{pd}}$$

ג. במרכז השמש d חי בממוצע כשניה עד שנהרס, כמו כן, p חי בממוצע כ- 10 בליון שנה שהוא אורך החיים של השמש (קצב ההריסה של p קובע את אורך החיים). לכן:

מצד אחד:

$$\frac{dn_p}{dt} \simeq -\frac{n_p}{\tau_p} \;;\; \tau_p \simeq 10^{10}yr$$

מצד שני:

$$\frac{dn_p}{dt} = -n_p^2\langle\sigma v\rangle_{pp}$$

לכן, אנו מקבלים ש:

$$\langle\sigma v\rangle_{pp} \simeq \frac{1}{\tau_p n_p}$$

באותה צורה, מההריסה של d, אנו מקבלים את שתי המשוואות:

$$\frac{dn_d}{dt} \simeq -\frac{n_d}{\tau_d} \;;\; \tau_d \simeq 1\,sec \quad \text{-ו} \quad \left.\frac{dn_d}{dt}\right|_{\text{הריסה}} = -n_d n_p\langle\sigma v\rangle_{pd}$$

ז.א.:

$$\langle\sigma v\rangle_{pd} \simeq \frac{1}{\tau_d n_p}$$

בעזרת התוצאה של סעיף ב:

$$n_d = \frac{n_p}{2}\frac{\langle\sigma v\rangle_{pp}}{\langle\sigma v\rangle_{pd}} = \frac{n_p}{2}\frac{1}{\tau_p n_p}\cdot\tau_d n_p = \frac{n_p}{2}\frac{\tau_d}{\tau_p}$$

כלומר, הריכוז בשיווי משקל של d ויחסית לפרוטונים:

$$\frac{n_d}{n_p} \simeq \frac{1}{2}\frac{\tau_d}{\tau_p} \approx \frac{1}{2}\frac{1\,sec}{10^{10}yr\; 3.2\times10^{7}sec/yr} \simeq 1.5\times10^{-18}$$

$\Longleftarrow$ דויטריום של כדוה"א הרבה יותר נפוץ מאשר במרכז השמש!

דף תרגילים מספר 6 שאלה 2

ד. בהינתן הריאקציה הנוספת הבאה:

$$^3He + ^3He \rightarrow ^4He + 2\,^1H$$

נקבל משוואות נוספות. קצב הריאקציה הוא:

$$r_{33} = \frac{1}{2} n_{He^3}^2 \langle \sigma v \rangle_{He^3 He^3} \underset{\text{סימון}}{\equiv} \frac{1}{2} n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}$$

נקבל שקצב שינוי הריכוז של ^3He הוא:

$$\frac{dn_3}{dt} = + \overbrace{n_p n_d \langle \sigma v \rangle_{pd}}^{r_{pd}} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}}_{r_{33}}$$

כי בריאקציה $He^3 + He^3$ הורסת שני He^3.

קצב היצירה של ^4He הוא:

$$\frac{dn_4}{dt} = + r_{33} = \frac{1}{2} n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}$$

היות והריאקציה הזו יוצרת פרוטונים, יש לתקן את המשוואה של $\frac{dn_p}{dt}$:

$$\frac{dn_p}{dt} = -2 r_{pp} + 2 r_{33} = - n_p^2 \langle \sigma v \rangle_{pp} + n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}$$

כל pp הורס 2 פרוטונים. בריאקציה 33 יוצרת 2 פרוטונים

ה. בשיווי משקל, כל ה- $d/dt \rightarrow 0$ פרט ל- p ו-^4He. האחד נהרס לאורך חיי השמש והשני נבנה. המשוואות:

$$\frac{dn_p}{dt} = - n_p^2 \langle \sigma v \rangle_{pp} + n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33}$$

שיווי משקל

$$\cancel{\frac{dn_d}{dt}} = \frac{1}{2} n_p^2 \langle \sigma v \rangle_{pp} - n_p n_d \langle \sigma v \rangle_{pd} \Rightarrow n_d = \frac{n_p}{2} \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{\langle \sigma v \rangle_{pd}}$$

$$\cancel{\frac{dn_3}{dt}} = n_p n_d \langle \sigma v \rangle_{pd} - n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33} \Rightarrow n_3 = \sqrt{n_p n_d \frac{\langle \sigma v \rangle_{pd}}{\langle \sigma v \rangle_{33}}}$$

$$\frac{dn_4}{dt} = \frac{1}{2} n_3^2 \langle \sigma v \rangle_{33} = \frac{1}{2} n_p n_d \frac{\langle \sigma v \rangle_{pd}}{\langle \sigma v \rangle_{33}} \langle \sigma v \rangle_{33} = \frac{1}{2} n_p n_d \langle \sigma v \rangle_{pd}$$

$$= \frac{1}{2} n_p \frac{n_p}{2} \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{\langle \sigma v \rangle_{pd}} \langle \sigma v \rangle_{pd} = \frac{n_p^2}{4} \langle \sigma v \rangle_{pp}$$

התוצאה הזו אומרת שאוסף המשוואות שקול ל- $4\,^1H \rightarrow ^4He$. קצב הריאקציה שנקבע ע"י החוליה החלשה הוא ההרסת ה p-p: $r_{pp} = \frac{1}{2} n_p^2 \langle \sigma v \rangle_{pp}$

בריאקציה הורסת 2 פרוטונים אולם היא יוצרת בממוצע חצי ^4He ולכן הפקטור $1/4$ הוא ה $1/2$ ב r_{pp} × $1/2$ מכך שנוצר חצי ^4He מריאקציה pp.

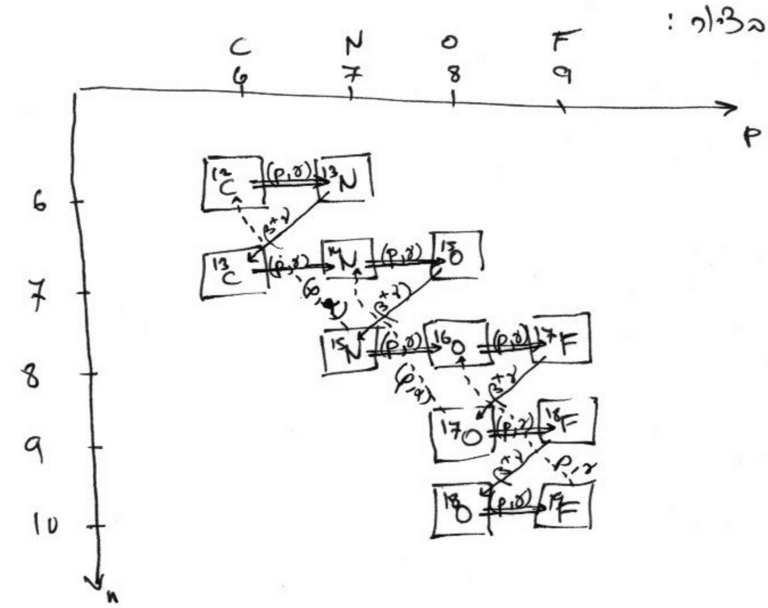
בשיווי משקל:

$$n_3 = \sqrt{n_p \frac{n_p}{2} \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{\cancel{\langle \sigma v \rangle_{pd}}} \frac{\cancel{\langle \sigma v \rangle_{pd}}}{\langle \sigma v \rangle_{33}}} = \sqrt{\frac{n_p^2}{2} \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{\langle \sigma v \rangle_{33}}}$$

דף תרגילים מספר 6

שאלה 3

ה - CNO בציור:



ישנם מספר "מעגלים". ה"בערה" של מימן מורכבת למעשה מ-

3 בליעות של p (ופליטות של γ)

2 התפרקויות β^+

1 בליעת p המלווה ביצירת חלקיק $\alpha = {}^4He$.