<u>פתרון דף תרגילים מס' 2</u>

<u>שאלה 1</u>: א. נתון: $\rho(r)=\rho_c\,(1-r/R)$

ראשית, יש למצוא את <u>המסה</u> ברדיוס r:

$$M(r)=\int_0^{V(r)}\rho\,dV=\int_0^r 4\pi r^2\rho\,dr=\int_0^r 4\pi\rho_c\,(1-r/R)\,r^2dr=$$

$$=\cdots=\pi\rho_c\left(\frac{4}{3}-r/R\right)r^3$$

כעת ניתן למצוא את האנרגיה הפוטנציאלית:

$$\Omega(r)=-\int_0^r\frac{Gm(r)}{r}\rho\,4\pi r^2dr=-\underbrace{\frac{26}{315}}_{0.0825}G\pi^2R^5\rho_c^2$$

הצבה של $m(r)$ ושל $\rho(r)$ + עבודה שחורה

ב. האנרגיה הקינטית של המערכת:

$$K=-\tfrac{1}{2}\Omega=+\frac{13}{315}G\pi^2R^5\rho_c^2$$

האנרגיה הכוללת של המערכת:

$$E=K+\Omega=+\tfrac{1}{2}\Omega=-\frac{13}{315}G\pi^2R^5\rho_c^2$$

ג. ראשית, יש להניח דבר מה על עוצמת הארה. ההנחה הפשוטה ביותר היא שהעוצמה היתה קבועה. תחת הנחה זו, משך הזמן שהשמש יכלה להאיר:

$$T=\Delta E/L_\odot$$

שנית, יש לבטא את האנרגיה בעזרת <u>המסה</u> של השמש שנשארת קבועה (ולא בעזרת ρ_c).

$$M_\odot=M(r=R)=\frac{\pi}{3}\rho_c r^3\longrightarrow\rho_c=\frac{3M_\odot}{\pi R^3}$$

לכן:

$$\tau_{KH}=T=\frac{0-\left(-\frac{13}{315}G\pi^2R^5\rho_c^2\right)}{L_\odot}=\frac{13}{315}G\pi^2R^5\frac{3^2M_\odot^2}{\pi^2R^6L_\odot}=$$

$$=\frac{13}{35}\frac{GM_\odot^2}{RL_\odot}=\frac{13}{35}\times\frac{6.7\times10^{-8}\,(2\times10^{33})^2}{7\times10^{10}\times4\times10^{33}}\,[s]=4.7\times10^{13}\,s=1.5\times10^{6}\,yr$$

ד.

$$E=-\frac{13}{315}G\pi^2R^5\rho_c^2=-\frac{13}{35}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}$$

לכן:

$$\frac{dE}{dR}=-\frac{13}{35}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot^2}\longrightarrow\frac{dR}{dt}=\frac{dR}{dE}\frac{dE}{dt}=\left(\frac{dE}{dR}\right)^{-1}L_\odot=-\frac{35}{13}\frac{R_\odot^2}{GM_\odot^2}L_\odot$$

כמו כן:

$$\Delta t=\left|\frac{dt}{dR}\right|\Delta R=\frac{13}{35}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot^2L_\odot}\overbrace{\Delta\theta\cdot\underbrace{D}_{1AU}}^{\Delta R}=\underbrace{\left(\frac{13}{35}\frac{GM_\odot^2}{RL_\odot}\right)}_{=\tau_{KH}}\frac{\Delta\theta D}{R}=$$

$$=\left(1.5\times10^{6}\,yr\right)\times\frac{0.1''}{3600''/{}^\circ\;57^\circ/\mathrm{rad}}\times\frac{\overset{1AU}{1.5\times10^{13}\,cm}}{\underset{R_\odot}{7\times10^{10}\,cm}}=150\,yr$$

תוצאת סעיף ג'

תרגיל ②

שאלה 2

א.

$$\frac{d}{dr}\left(P+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right)=\frac{dP}{dr}+\frac{G}{8\pi}\frac{d}{dr}\left(\frac{m^2}{r^4}\right)=$$

$$=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}+\frac{G(-)m^2}{2\pi\, r^5}+\frac{G}{4\pi}\frac{m}{r^4}\frac{dm}{dr}$$

$$=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}-\frac{Gm^2}{2\pi r^5}+\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$=-\frac{Gm^2}{2\pi r^5}<0 \longleftarrow \begin{matrix} m^2>0 \\ r>0\end{matrix}$$

מש"ל

נתון:

$$\underbrace{\frac{dP}{dr}=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}}_{\text{משוואה הידרוסטטית}}$$

$$m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho(r)dr$$

$$\downarrow$$

$$\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho(r)$$

ב. ע"י אינטגרציה של התוצאה מסעיף קודם:

$$\left(P+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right)\Bigg|_0^R<0 \longrightarrow -\underbrace{P(R=0)}_{P_c}+\underbrace{P(r=R)}_{=0}+\frac{GM_*^2}{8\pi R_*^2}-\lim_{r\to 0}\frac{Gm^2}{8\pi R^4}<0$$

אולם:

$$\lim_{r\to 0} m^2=\frac{4\pi}{3}\rho_c r^3 \longrightarrow \lim_{r\to 0}\frac{Gm^2}{8\pi R^4}=\frac{G\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2\rho_c^2 r^6}{8\pi r^4}\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

לכן:

$$P_c>\frac{GM_*^2}{8\pi R_*^4} \quad //$$

ג. אם ישנה אנרגיה קינטית סיבובית, אזי ישנו כח צנטריפוגלי החוצה והמשוואה ההידרוסטטית נהיית:

$$\frac{dP}{dr}=-\underbrace{\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}}_{\text{כח כבידה פנימה}}+\underbrace{\Omega^2(r)r}_{\text{כח ליח' מסה החוצה.}}\rho(r)$$

ז"א $\frac{dP}{dr}\to\frac{dP}{dr}-\Omega^2 r\rho$ ולכן אחרי אינטגרציה:

$$P_c\to P_c+\int_0^r\Omega^2(r)\,r\,\rho(r)dr$$

והתנאי נהיה:

$$P_c>\frac{GM_*^2}{8\pi R_*^4}-\int_0^r\Omega^2(r)\rho(r)dr$$

ז"א אם הכוכב מסתובב, הלחץ הפנימי יכול להיות (אך לא חייב) להיות יותר קטן.

תרגיל 2
שאלה 3

א. צפיפות הגלקסיות היא: $n_{gal}\propto r^{-\alpha}$ לכן צפיפות המסה היא: $\rho=\rho_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\alpha}$

כאשר r_0 ו- ρ_0 הם קבועי נרמול (הצפיפות היא ρ_0 ב- $r=r_0$) שאותם נמצא בהמשך.

המסה בתוך רדיוס נתון היא:
$$m(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho_0\left(r/r_0\right)^{-\alpha}dr=\frac{4\pi\,\rho_0 r_0^3}{(3-\alpha)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3-\alpha}$$

האנרגיה הפוטנציאלית היא:
$$\Omega(r)=-\int_0^r\frac{Gm(r)}{r}\rho\,4\pi r^2dr\underset{\text{עבור } r<r_{clust.}}{=}-\int_0^r\frac{G4\pi r_0^3\rho_0}{(3-\alpha)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(3-\alpha)}\rho_0\left(r/r_0\right)^{-\alpha}4\pi r^2dr$$
$$=-\frac{16\pi^2G\rho_0^2}{(5-2\alpha)(3-\alpha)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(5-2\alpha)}r_0^5$$

אנו מעוניינים באנרגיה הפוטנציאלית בעזרת המסה $M_{clust.}$ ולא הצפיפות במרכז. לכן
$$M_{clust}=\frac{4\pi\rho_0R_{clust}^3}{(3-\alpha)}\left(\frac{R_{clust}}{r_0}\right)^{3-\alpha}\Longrightarrow\rho_0=\frac{(3-\alpha)}{4\pi}\frac{1}{R_{clust}^3}\left(\frac{R_{clust}}{r_0}\right)^{\alpha-3}$$

אם נציב את זה באנרגיה:
$$\Omega\equiv\Omega(r=R_{clust})=-\frac{16\pi^2G\cancel{\rho_0^2}}{(5-2\alpha)(3-\alpha)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(5-2\alpha)}r_0^5\frac{(3-\alpha)^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{R_{clust}^6}\left(\frac{R_{clust}}{r_0}\right)^{2\alpha-3}$$
$$=-\frac{(3-\alpha)}{(5-2\alpha)}\frac{GM_{clust}^2}{R_{clust}}$$

המשפט הויריאלי אומר: $-\frac{1}{2}\Omega=K$

אולם:
$$K=\sum_i m_i\frac{1}{2}v^2\underset{\text{(הממוצע משוקלל לפי המסה.)}}{=}\frac{1}{2}\sum_i m_i\ \langle v^2\rangle=\frac{1}{2}M_{cluster}\,\sigma_{rms}^2$$

לכן מהמשפט הויריאלי מתקבל:
$$\sigma_{rms}^2=\frac{GM_{clust}}{R_{clust}}\left(\frac{3-\alpha}{5-2\alpha}\right)$$

ב. עבור $\alpha=2$ ה () נהיה 1, ולכן:
$$M_{cluster}=\frac{\sigma_{rms}^2R_{clust.}}{G}$$
$$=\frac{(3000\times10^5\ cm/s)^2\left(3\times10^6\ pc\times3\times10^{18}\ cm/pc\right)}{(6.7\times10^{-8}\ dyne\ cm^2\ gr^{-2})\left(4\times10^{33}\ gr/M_\odot\right)}=3\times10^{15}M_\odot$$