מבוא לאסטרופיסיקה וקוסמולוגיה - כוכבים הומולוגיים.

אוסף המשוואות שלנו הוא:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa_m \rho}{16\pi a c r^2 T^3} L \overset{\text{אטימות של קרמר}}{=} -\frac{3\tilde{\kappa}_0 \rho^2 T^{-3.5}}{16\pi a c r^2 T^3} L$$

היות ואנו לא יודעים במדויק כיצד יהיו הראקציות הגרעיניות בשלב זה נכתוב:
$\epsilon = \tilde{\epsilon}_0 \rho T^n$. הסיבה ש- ϵ יחסי ρ הוא מפני שקצב של ראקציה בין שני חלקיקים (פר חלקיק) גדל עם הצפיפות. n תהיה קבוע אותו נמצא בהמשך (למעשה $n\sim4$ עבור בערת מימן בשמש, ועבור כוכבים שמבערים מימן ע"י C, N ו- O "כקטליזטורים", $n \sim 20$). כמו כן:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon = 4\pi r^2 \tilde{\epsilon}_0 \rho^2 T^n$$

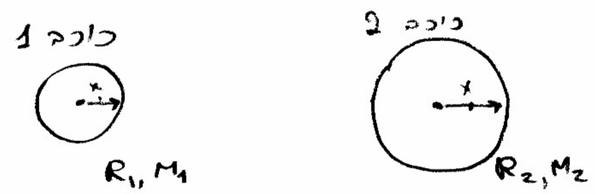
אם הכוכב נשלט ע"י לחץ הגאז:

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_p}$$

אם הכוכב נשלט ע"י לחץ הקרינה:

$$P = \frac{1}{3} a T^4$$

הפתרון המלא של המשוואות הנ"ל דורש אינטגרציה נומרית. אולם, בתנאים מסוימים ניתן בכל זאת למצוא הרבה תכונות של הפתרונות בלי ממש לפתור את מבנה הכוכב. הכוונה היא שבהינתן פתרון נתון לכוכב ספציפי, ניתן בתנאים מסוימים למצוא תכונות של כוכבים בעלי, לדוגמא, מסה שונה. זאת, כל עוד כל אחד מן של המשוואות הנ"ל הוא הומוגני במשתנים (לדוגמא, אם הלחץ הכולל הוא מורכב מלחץ קרינה + לחץ גאז ושניהם הם חשובים אזי P לא היה הומוגני ב- ρ ו- T). במידה והתנאים הנ"ל מתקיימים (לדוגמא, μ אינו תלוי ברדיוס הכוכב) אזי כל שני כוכבים יהיו קשורים זה לזה ע"י טרנספורמציה פשוטה.



שני כוכבים 1 ו- 2 שקולים זה לזה (הומולוגיים) אם כל נקודה $x = r_1/R_1$ שקולה לנקודה $x = r_2/R_2$ בכוכב השני. דהיינו, שגודל $X_2(x)$ (לדוגמא הלחץ) בכוכב 2 יהיה קשור לגודל $X_1(x)$ בכוכב 1 רק ע"י פקטור נומרי.

אם הכוכבים הומולוגיים אזי המסה הכלולה ברדיוס $r_1 = xR_1$ בכוכב 1 קשורה למסה הכלולה ברדיוס $r_2 = xR_2$ בכוכב 2 וזאת מכיון שב- $x=1$ $m_1(x=1)=M_1$ ו- $m_2(x=1)=M_2$ לכן: $dm_2(x) = \frac{M_2}{M_1} dm_1(x)$, ממשוואת המסה:

$$\left.\frac{dm_2}{dr_2}\right|_x = 4\pi r_2^2(x)\rho_2(x) = 4\pi\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 r_1^2(x)\rho_2(x)$$

ולכן; מצד שני:

$$\left.\frac{dm_2}{dr_2}\right|_x = \left.\frac{dm_2}{dm_1}\right|_x \left.\frac{dm_1}{dr_1}\right|_x \left.\frac{dr_1}{dr_2}\right|_x = \left(\frac{M_2}{M_1}\right) 4\pi r_1^2(x)\rho_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

כלומר:

$$\rho_2(x) = \rho_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

כלומר, אם אנחנו יודעים את הצפיפות בכוכב 1 ואת המסות והרדיוסים, ניתן למצוא את הצפיפות בכוכב השני. מהמשוואה של הלחץ, מתקבל:

$$\left.\frac{dP_1}{dr_1}\right|_x = \frac{dP_1}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dr_1}}_{1/R_1} \rightarrow \frac{dP_1}{dx} = \frac{dP_1}{dr_1}R_1 = -R_1\frac{Gm_1}{r_1^2}\rho_1 =$$

$$= -R_2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)Gm_2\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\frac{1}{r_2^2}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\rho_2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

$$= \underbrace{-R_2\frac{Gm_2}{r_2^2}\rho_2}_{=\frac{dP_2}{dx}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 = \frac{dP_2}{dx}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2$$

נבצע כעת אינטגרציה dx מ- $x=1$ עד $x=x$. היות ו- $P_1(x=1)=P_2(x=1)=0$ נקבל:

$$P_2(x) = P_1(x)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2$$

נניח שהכוכב (נשלט) על-ידי לחץ הגאז נקבל אז:

$$T_2 = \frac{\mu_2 m_p}{k}\frac{P_2}{\rho_2} = \mu_1\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{m_p}{k}P_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

גם אנחנו מאפשרים למשקל המולקולרי בשני הכוכבים להיות זהה!

$$= \underbrace{\frac{\mu_1 m_p P_1}{k\rho_1}}_{T_1}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

דהיינו:

$$T_2(x) = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right)T_1(x)$$

עבור גאז עם לחץ גאז דומיננטי. מהמשוואה של עוצמת הקרינה, מתקבל:

$$\frac{dL_2}{dx} = \frac{dL_2}{dr_2}R_2 = 4\pi r_2^2\tilde{\epsilon}_2\rho_2^2T_2^n\cdot R_2 =$$

$$= R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\cdot 4\pi r_1^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\tilde{\epsilon}_1\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\rho_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3\left(\frac{M_2}{M_1}\right)T_1^n\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n$$

$$= \frac{dL_1}{dx}\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)$$

ואחרי אינטגרציה על dx: (הפעם מ- $x=0$ היכן ש- L ו- L_2 שווים לאפס):

$$L_2(x) = L_1(x)\cdot\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n$$

המשוואה האחרונה בה ניתן להשתמש היא מעבר הקרינה:

$$\frac{dT_2}{dx} = R_2\frac{dT_2}{dr_2} = R_2\boxed{(-)\frac{3}{16}\frac{\tilde{K}_2\rho_2^2T_2^{-6.5}}{\pi ac\, r_2^2}}L_2 = R_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)A\tilde{K}_1\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)\times$$

$A \equiv$ לשם נוחות.

$$\times\rho_1^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^6\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2T_1^{-6.5}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{-6.5}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-6.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{-6.5}\frac{1}{r_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\times$$

$$\times L_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n+2}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^n =$$

$$= \frac{dT_1}{dx}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\underbrace{-1+6-6.5\overset{+2}{}+n+3}_{=n+3.5}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{2-6.5+n+2}_{n-2.5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-6.5}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)$$

אולם, ישנו הקשר הקודם שקבלנו בין T_2 לבין T_1 (משוואת המצב).

לכן:

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{M_2}{M_1}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+3.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n-2.5}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-6.5}\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)$$

או לחילופין:

$$\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\epsilon_1}\right)\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{n-7.5}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{n-3.5}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{n+2.5} = 1$$

דהיינו:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \sim \underbrace{\left(\frac{\tilde{\epsilon}_2\tilde{K}_2}{\tilde{\epsilon}_1\tilde{K}_1}\right)^{\frac{2}{2n+5}}}\underbrace{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{2n-15}{2n+5}}}\underbrace{\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2n-7}{2n+5}}}$$

עבור $n=5$ מקבלים $\frac{2}{15}=0.133$ $\quad -\frac{1}{3}=-0.33$ $\quad \frac{1}{5}=0.2$

עבור $n=20$ מקבלים: $\frac{2}{45}=0.04$ $\quad \frac{25}{45}=0.55$ $\quad \frac{33}{45}=0.73$

בעזרת הקשר של העוצמת ההארה, מקבלים:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)^{1-\frac{2(n+3)}{2n+5}}\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)^{-\frac{2(n+3)}{2n+5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{(2n-15)}{2n+5}(n+3)+n}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\underbrace{-\frac{(2n-7)}{(2n+5)}(n+3)+(n+2)}_{p}}$$

למה החזקה כזאת?

$$p = \frac{-(2n-7)(n+3)+(n+2)(2n+5)}{2n+5} = \frac{-2n^2-6n+7n+21+2n^2+5n+4n+10}{2n+5}$$

$$= \frac{10n+31}{2n+5}$$

בדרך דומה ניתן לפתח את החזקות השונות:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right) = \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2}{\tilde{\epsilon}_1}\right)^{\frac{-1}{2n+5}}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{14n+45}{2n+5}}\left(\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{K}_1}\right)^{-\frac{2n+6}{2n+5}}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{10n+31}{2n+5}}$$

5.4 עבור $n=5$ ו- 5.13 עבור $n=20$

על מנת להשוות ל- דיאגרמת H-R $(L(T))$ יש לחשב את L כתלות ב- T_{eff} ולא ברדיוס.

$$L = 4\pi R^2\sigma T_{eff}^4$$

כלומר אנחנו רוצים להביא את R כתלות ב- L.

הקשרים הם:

$$R \propto M^{(2n-7)/(2n+5)} \rightarrow M \propto R^{(2n+5)/(2n-7)}$$

וגם:

$$L \propto M^{(10n+31)/(2n+5)}$$

ולכן:

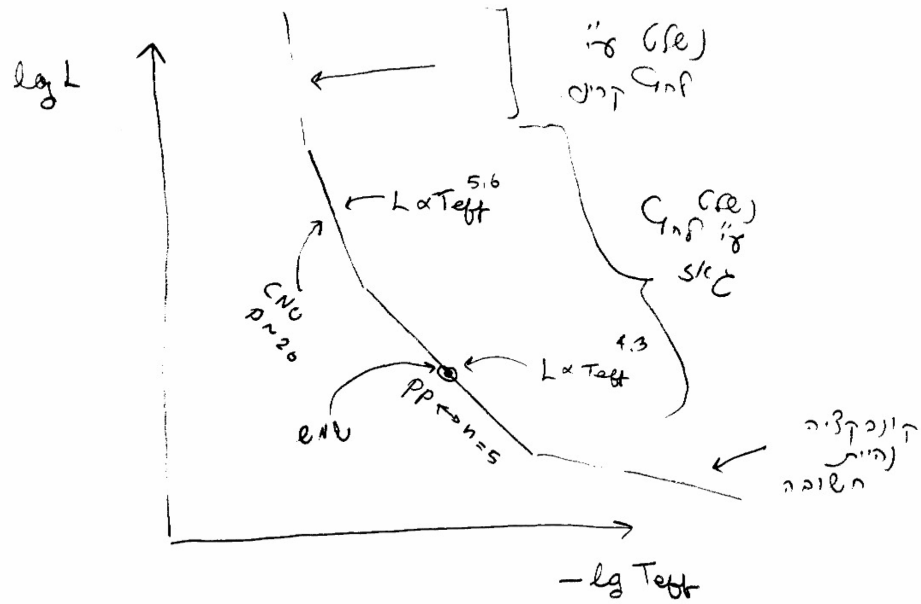
$$L \propto R^{(10n+31)/(2n-7)} \rightarrow R \propto L^{(2n-7)/(10n+31)}$$

ובעזרת הקשר של גוף שחור:

$$L \propto L^{(4n-14)/(10n+31)} T_{eff}^4$$

$$L^{\overbrace{\left(1-\frac{4n+14}{10n+31}\right)}^{(6n+45)/(10n+31)}} \propto T_{eff}^4 \rightarrow L \propto T_{eff}^{4\frac{(10n+31)}{(6n+45)}}$$

עבור $n=5$ $L \propto T_{eff}^{4.3}$ ועבור $n=20$: $L \propto T_{eff}^{5.6}$



בעזרת הקשרים האלו ניתן לענות על שאלות נוספות. לדוגמא, מה ההשפעה של יותר מתכות "Z" על הסדרה הראשית. זאת נקבל ע"י: $\tilde{R} \propto Z$

עבור כוכב נתון.

$$L \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}} \overset{n=5}{\simeq} Z^{-1.06}$$

$$T_{eff}\Big| \propto L R_1^{-2} \propto Z^{-\frac{2n+6}{2n+5}+(-2)\frac{2n-15}{2n+5}} \overset{n\simeq 5}{=} Z^{-0.4}$$

מסה נתון. תחת M קבוע.

גם הטמפ' וגם עוצמת ההארה יקטנו עבור כוכב נתון אם נגדיל את Z.