Polytropes "פוליטרופות"

שתי המשוואות הראשונות הדרושות לפתור את מבנה הכוכב, הן:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}$$ - המשוואה ההידרוסטטית

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$ ואינטגרציה על המסה:

על מנת "לסגור" את הקשרים דרושות משוואות נוספות היות ואנו צריכים קשר בין P ו-ρ. קשר זה נסגר בדר"כ על-ידי משוואות מעבר החום (מהם התנאים הדרושים על מנת להעביר את האנרגיה ממרכז הכוכב). משוואה זו תהיה בדר"כ תנאי דיפרנציאלי על הטמפ' (דהיינו $\frac{dT}{dr} = \cdots$) משוואה הלגברית נוספת תנבא מקצב יצירת האנרגיה בתהליכים גרעיניים ומשוואה אלגברית אחרונה תבוא ממשוואת המצב המקשרת בין ρ P ו-T.

במקרים רבים ניתן הקשרים הנוספים הדרושים לנו נראים פשוטים. במקרים אידיאליים אלה, ניתן לכתוב את הלחץ כתלות רק בצפיפות:

$$P = K\rho^{\gamma} \equiv K\rho^{(n+1)/n}$$

n נקרא אינדקס הפוליטרופה, והקשר נקרא קשר פוליטרופי:

דוגמא 1:

גאז אידיאלי "אדיאבטי": אם האטמוספרה שלנו מקיימת שאלמנטי גאז שונים הם בעלי אנטרופיה ספציפית זהה, אזי ע"י העברת אלמנט גאז ממקום אחד לגובה אחר בו הלחץ שונה בתהליך אדיאבטי (דהיינו שאין מעבר חום לסביבה) נקבל שהאלמנט שלנו בטמפ' זהה לסביבה. בהמשך נראה שמצב זה מתקבל כאשר האטמוספירה קונבקטיבית. במקרה זה, הקשר בין P ו-ρ יהיה הקשר האדיאבטי.

(2)

בתהליך אדיאבטי, כאשר הגוף אינו יכול להעביר חום את הסביבה:

$$P \propto \rho^{\gamma}$$

$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v}$

כאשר במקרה זה γ הוא האינדקס האדיאבטי.

עבור גאז מונואטומי: $C_v = \frac{3}{2} nk \; ; C_p = \frac{5}{2} nk$ לכן:

$$\gamma = 5/3 \quad ; \quad n = \frac{1}{(\gamma - 1)} = 1.5$$

עבור גאז דו אטומי:

$$\gamma = \frac{7/2}{5/2} = 7/5 \; ; \quad n = 2.5$$

<u>דוגמא שניה</u>: כאשר לחץ הקרינה נהיה חשוב:

מס' אבוגדרו

$$\underbrace{P_g}_{\text{לחץ הגאז (gas)}} = \frac{N_0 k}{\mu} \rho T \qquad \underbrace{P_r}_{\text{לחץ הקרינה (radiation)}} = \frac{1}{3} a T^4 \qquad a \equiv \frac{4\sigma}{c}$$

קבוע סטפן בולצמן

נרשום את הלחץ הכולל בצורה:

$$P = P_g + P_r$$

ונגדיר:

$$P_g = \beta P \qquad P_r = (1-\beta) P$$

כלומר, הפרמטר β הינו היחס בין לחץ הגאז ללחץ הכולל.

ע"י משוון $P = P$ מתקבל:

$$\frac{N_0 k}{\mu \beta} \rho T = \frac{1}{3} a T^4 \frac{1}{(1-\beta)}$$

ולכן:

$$T = \left(\frac{N_0 k}{\mu} \frac{3}{a} \frac{1-\beta}{\beta} \right)^{1/3} \rho^{1/3}$$

אולם:

$$P = \frac{N_0 k}{\mu} \frac{\rho T}{\beta}$$

ולכן:

$$P = \left[\left(\frac{N_0 k}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{(1-\beta)}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3}$$

(3)

הנוסחה הנ"ל נכונה בכל נקודה בכוכב, בכל תנאי. באופן כללי היא תלויה ב- β שיכול להשתנות. אולם אם קיים מקרה בו β נשאר קבוע, אזי הקשר בתוך הכוכב יהיה קבוע ונקבל:

$$P = K\rho^{4/3} \quad ; \quad n = 3 \text{ polytrope.}$$

מסתבר, התנאי ש- β קבוע מתקבל תחת הנחות מסוימות מהמשוואה למעבר קרינה.

סקרן/נית לדעת <u>מדוע</u>?
הסיבה נעוצה בכך (ואת זאת נראה בהמשך!) שמשוואת ש"מ משוואה מהצורה:

$$\frac{dP}{dr} = -A\rho$$

והמשוואה למעבר קרינה תהיה דומה: $\frac{dP_r}{dr} = -B\rho$ <u>אם</u> האטימות לקרינה ליחידת מסה של החומר (כמעט אטימות ליחידת מסה $\equiv \Sigma$ של החתך פעולה לפיזור/בליעה של המפזרים/בולעים ליחידת מסה) היא קבועה (למשל פיזור תומסון שאינו תלוי באנרגיה (ולכן גם בטמפ') של הקרינה), כך שמתקבל בקירוב:

$$P_r \propto P \rightarrow \beta = const$$

<u>דוגמא נוספת</u>: חומר מנוון:

כאשר לחץ פרמי הרבה יותר גדול מהטמפ' מתקבל:

$P \propto \rho^{5/3}$ או $P \propto \rho^{4/3}$ ללא תלות בטמפ', בהתאם לסוג החלקיקים - אם הם קלאסיים או יחסותיים.

4

ברור לפיכך שהבנה של ההתנהגות של כוכבים "פוליטרופיים" ישנה חשיבות - היות ותכונות רבות של כוכבים תהינה מוסברות בקירוב ע"י פוליטרופים. כוכבים הנשלטים ע"י מעבר קרינה: $n=3$ (מודל של אדינגטון). כוכבים קונבקטיביים $n \simeq 1.5$, ננסים לבנים המורכבים מחומר מנוון פרמיוני $\gamma=5/3$ עבור חומר מנוון קלסי, $n=3 \leftarrow \gamma=4/3$ עבור חומר מנוון יחסותי, וכו'...

פתרון (משוואת ליין - אמדן Lane-Emden)

נהוג להגדיר:

$$\rho \equiv \lambda \phi^n$$

כאשר $\phi=1$ במרכז הכוכב ו- λ היא הצפיפות במרכז הכוכב ρ_c.
אם החומר הוא גז אידאלי לא מנוון אזי ϕ יחסית לטמפ' והיא למעשה הטמפ' מנורמלת ל- T_c - הטמפ' במרכז הכוכב. במקרה אחר, ϕ לא תהיה הטמפ'.

בכל מקרה:

$$P = K^{(n+1)/n} = K \lambda^{(n+1)/n} \phi^{(n+1)}$$

שווי משקל הידרוסטטי.

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$$

אינטגרציה על המסה:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

נחלק ב- ρ ונכפיל ב- r^2 את המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr} = -GM_r \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -G\frac{dM_r}{dr} = -4\pi G r^2 \rho$$

ולכן:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G \rho$$

נציב את הביטויים עבור הלחץ והצפיפות:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\lambda\phi^n} K\lambda^{(n+1)/n}(n+1)\phi^n\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda\phi^n$$

או לחילופין:

$$(n+1)K\lambda^{\overbrace{(n+1)/n-1}^{=1/n}}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda\phi^n$$

נגדיר אורך אופייני:

$$l \equiv \left[\frac{(n+1)K\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

וקואורדינטה חסרת מימדים: $\xi \equiv r/l$:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right) = -\phi^n$$

זוהי משוואת Lane Emden עם אינדקס n. עבור כל אינדקס, ניתן לפתור אותה ולקבל פונקציה $\phi_n(\xi)$. ישנו פתרון סגור עבור $n = 0, 1, 5$ בלבד !.

<u>תנאי השפה</u> :

תנאי ראשון: $\phi=1$. זה למעשה נירמול של ϕ (T_c -ל).

התנאי השני: $\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=0}=0$. את תנאי זה ניתן לראות מהמשוואה ההידרוסטטית.

$$\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r=0} = \lim_{r\to 0}(-)\frac{GM_r}{r^2} = -\left.\frac{G\,dM/dr}{2r}\right|_{r\to 0} = -\left.\frac{4\pi G r^2\rho}{2r}\right|_{r\to 0} = 0$$

היות ואם M_r וגם r^2 הולכים לאפס, יש להפעיל את ל הנגזרת:

לכן:

$$\left.\frac{dP}{dr}\right|_{r\to 0}=0 \xrightarrow{\xi\equiv r/l} \left.\frac{dP}{d\xi}\right|_{\xi\to 0}=0 \xrightarrow{P\propto\phi^{n+1}} \left.\frac{d\left(\phi^{1/(n+1)}\right)}{d\xi}\right|_{\xi\to 0}=0 \Rightarrow \left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi\to 0}=0$$

בעזרת תנאי "התחלה" ב- $\xi=0$ ניתן לבצע אינטגרציה של המשוואה.

* לאחר ביצוע אינטגרציה מתקבל ש:

- עבור $n<5$, מגיעים ב- ξ סופי ל- $\phi\to 0$ (דהיינו $P=0$). k.s. הכוכב "נגמר" ברדיוס סופי.
- עבור $n\geq 5$ האינטגרציה אינה מובילה ל- $\overbrace{\xi \text{ סופי}}^{=\xi_1}$ בו $\phi\to 0$. דהיינו, ξ גדל עוד ועוד מבלי שהפתרון יגיע לאפס. לכוכבים אלו אין גבול חיצוני במסגרת הפוליטרופה (חייבים להוסיף תנאים נוספים).

<u>רדיוס הכוכב</u>

רדיוס הכוכב ביחידות "חסרות יחידות" הוא פשוט ξ_1, בו האינטגרציה הגיעה ל- $\phi=0$. בעזרת l:

$$R_* = \xi_1 l = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{1/2} \lambda^{(1-n)/2n}\, \xi_1$$

<u>מסת הכוכב</u>:

המסה בתוך רדיוס $r=l\xi$ (תוך ξ):

$$M(\xi) = \int_0^{l\xi} 4\pi r^2 \rho\, dr = 4\pi l^3 \lambda \int_0^{\xi} \phi^n \xi^2\, d\xi$$

בעזרת משוואת לין-אמדן:

$$\xi^2 \phi^n = -\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}\right)$$

ולכן:

$$M(\xi) = -4\pi l^3 \lambda \underbrace{\int_0^{\xi} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}\right) d\xi}_{\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}} = -4\pi l^3 \lambda\, \xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}$$

המסה הכוללת של הכוכב היא:

$$M_{TOT} = M(\xi=\xi_1) = -4\pi l^3 \lambda\, \xi_1^2 \left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

$$= -4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right]^{3/2} \lambda^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi\to\xi_1}$$

(7)

כמו כן, היחס בין הצפיפות הממוצעת והצפיפות במרכז:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{3M_{tot}}{4\pi r_*^3}\,\rho_c^{-1} = -\frac{3}{4\pi \xi_1^3 \alpha^3}\,4\pi \alpha^3 \lambda \xi_1^2 \left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_1 \lambda^{-1}$$

$$= -\frac{3}{\xi_1}\left.\frac{d\phi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_1}$$

ז.א. היחס בין הצפיפות במרכז והצפיפות הממוצעת אינו תלוי בפרמטר "הנרמול" λ המוצל, רק ב- n.

הלחץ במרכז:

$$P_c = K\lambda^{(n+1)/n}$$

כדי לקבלו, נשתמש ב:

$$R_* = \xi_1 \alpha = \left[\frac{(n+1)}{4\pi G}\,\xi_1^2\right]^{1/2}\left(K\lambda^{(1-n)/n}\right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow K\lambda^{(1-n)/n} = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1)\xi_1^2}$$

$$\hookrightarrow P_c = \left(K\lambda^{(1-n)/n}\right)\lambda^2 = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1)\xi_1^2}$$

Table 2-5 Constants of the Lane-Emden functions†

n	ξ_1	$-\xi_1^2\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$	$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
0.5	2.7528	3.7871	1.8361
1.0	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2.0	4.35287	2.41105	11.40254
2.5	5.35528	2.18720	23.40646
3.0	6.89685	2.01824	54.1825
3.25	8.01894	1.94980	88.153
3.5	9.53581	1.89056	152.884
4.0	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.83646	1.73780	6,189.47
4.9	169.47	1.7355	934,800
5.0	∞	1.73205	∞

† S. Chandrasekhar, "An Introduction to the Study of Stellar Structure," p. 96; reprinted from the Dover Publications edition, Copyright 1939 by The University of Chicago, as reprinted by permission of The University of Chicago.

8

עבור $n=3$, מקבלים:

$$M_{TOT} = +4\pi\left[\frac{4K}{4\pi G}\right]^{3/2}\cdot 1\cdot 2.018$$

דהיינו, המסה תלויה בעיקרה רק ב- K (הקשור לאנטרופיה הספציפית).

אולם ראינו שבעזרת β, K נהיה:

$$K = \left[\left(\frac{N_0 k}{\mu}\right)^4 \frac{3}{a}\,\frac{1-\beta}{\beta^4}\right]^{1/3}$$

ולכן:

$$M_{TOT} \simeq 7.8\left(\frac{N_0 k}{\mu}\right)^2\left(\frac{3}{a}\right)^{1/2}\left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/2}$$

$\Leftarrow$ ישנו קשר בין מסת הכוכב ו- β = היחס בין לחץ הגז והלחץ הכולל (היחס בין תרומת הקרינה ותרומת החומר קבוע בכוכב ותלוי רק ב- M - עבור $n=3$).