זמן קלווין הלמהולץ:

אנרגיית הקשר של השמש הינה

$$U_{grav} = -G\int_0^{M_\odot} \frac{m\,dm}{r} = -\underset{\sim}{\alpha}\,\frac{GM_\odot^2}{r}$$

איזה שהוא קבוע ~ 1

אם לשמש אין מקורות אנרגיה נוספים, כמה זמן ניתן לספק את עוצמת הקרינה הנוכחית?

$$\tau \sim \frac{U_{grav}}{L} \sim \frac{GM_\odot^2}{R_\odot L_\odot} \equiv \tau_{KH} \text{ - Kelvin-Helmholtz}$$

$$= 3\times10^{7}\,yrs.$$

- בסוף המאה הקודמת, לא ידעו על מקורות אנרגיה "נוספים". קלווין והלמהולץ טענו כי זהו גיל השמש. זה היה בסתירה לגיל שהעריכו הגיאולוגים ואף דרווין! בגרסה הראשונה (אך לא בשניה) של "מוצא המינים", דרווין העריך את גיל כדה"א המינימלי הדרוש על-מנת להסביר את האבולוציה של המינים וקיבל כ- $10^9 yr$. היות וקלווין היה בעל השפעה רבה, דרווין הוציא את הערכת הגיל מהגרסה השניה...

- בתחילת המאה, Jeans האמין כי אנרגיית השמש מקורה בהתפרקות רדיואקטיבית של U^{238}. הנחה זו יותר סבירה היות וזמן ההתפרקות של אורניום מסדר גודל של גיל כדה"א

$$U^{238} \rightarrow Pb^{206}$$

$$Q = 47\,MeV/m(U^{238}) = 1.9\times10^{17}\,erg/gr$$

$$L = \frac{M(U^{238})\,Q}{\tau_{decay}} \rightarrow M_{TOT}(U^{238}) \simeq \frac{\tau_{decay}\,L_\odot}{Q} \approx 4\times10^{33}\,gr$$

← בעיות: 1. המסה כולה הדרושה להסביר את L היא מסדר גודל אך יותר גדולה ממסת השמש.
2. בספקטרום של השמש, אין בכלל עדות לאורניום...

- 1920: אדינגטון: השמש ממירה מימן להליום.

$$\Delta m(4H \rightarrow He)c^2 = 4\times10^{-5}\,erg/reaction$$
$$= 6\times10^{18}\,erg/gm$$
$$= 30\,Q(U^{238} \rightarrow Pb^{206})$$

המשפט הויריאלי

המשפט הויריאלי מקשר בין האנרגיה הפוטנציאלית הממוצעת והאנרגיה הקינטית הממוצעת באופן כללי, עבור מערכת עם הרבה חלקיקים:

* משוואות התנועה עבור החלקיק i: $$\frac{d}{dt}\vec{P}_i = \vec{F}_i$$

* נסתכל כעת על הגודל: $\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i$. הנגזרת של גודל זה לפי הזמן הוא:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i\cdot\vec{r}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}\cdot\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{p}_i\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}}$$

$\parallel$ איבר זה במקרה הלא יחסותי הוא: $2K \equiv \sum_i m_i v_i^2$

נסתכל כעת על צד שמאל של המשוואה:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\cdot\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_i\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(m_i r_i^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2}$$

I הוא מומנט האינרציה הסקלרי של המערכת (ה- Tr של טנזור האינרציה).

סה"כ, נקבל:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}_{\equiv \text{"Virial of Clausius"}}$$

נקרא "הויריאל" של Clausius.

עבור קונפיגורציות סטטיות, מומנט האינרציה אינו משתנה בזמן ולכן:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i}$$

במקרה שהחלקיקים הם חלק מגז אידיאלי שמתנגשים נקודתית, התרומה של ההתנגשויות לסכום היא אפס (לשני החלקיקים המתנגשים, $\vec{r}_i$ זהה ו- $\vec{F}_i$ מנוגד).

זהו המשפט הויריאלי.

דוגמה לשימוש במשפט הויריאל: גז בתוך קופסה:

נניח כי גז בתוך כלי בנפח V. הכוחות שנכנסים לויריאל הם הכוחות הפנימיים בין החלקיקים והכוח מדפנות הקופסה. עבור הכוח החיצוני, מתקבל:

$$\sum_{\text{pressure}} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \int_{\text{surface}} (-P)\, d\vec{S} \cdot \vec{r} = -P \int_S \vec{r} \cdot \hat{n}\, dS \underset{\text{משפט גאוס}}{=} -P \int_V (\nabla \cdot \vec{r})\, dV$$

$$= -P \cdot 3V$$

הכוחות הבין חלקיקיים, לזוגות צמד, ניתנים לכתיבה כך:

$$\sum_i F_i r_i = \sum_{\text{pairs}} (F_{ij} r_i + F_{ji} r_j) = \sum_{\text{pairs}} F_{ij}\, (r_i - r_j)$$

ולכן המשפט הויריאלי נותן:

$$K = \frac{3}{2} PV - \frac{1}{2} \sum_{\text{pairs}} F_{ij} \cdot (r_i - r_j)$$

* במקרה של גז אידיאלי, ההתנגשויות הן מקומיות ואיבר הכוח הפנימי מתאפס. ומקבלים את משוואת המצב של גז אידיאלי מונואטומי:

$$K = \frac{3}{2} PV$$

* חלקיקים עם משיכה גרביטציונית:
במקרה זה:

$$F_{ij} = -\frac{G m_i m_j}{(r_{ij})^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

כך שאם נכפיל ב- $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ נקבל:

$$K = -\frac{1}{2} \sum_{\text{pairs}} F_{ij} (r_i - r_j) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\text{pairs}} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}}_{(-\Omega)} = \frac{1}{2} \int_0^M \frac{G m(r)}{r}\, dm$$

$(-\Omega)$ אנרגיה פוטנציאלית כוללת של הכוכב

$$K = -\frac{\Omega}{2}$$

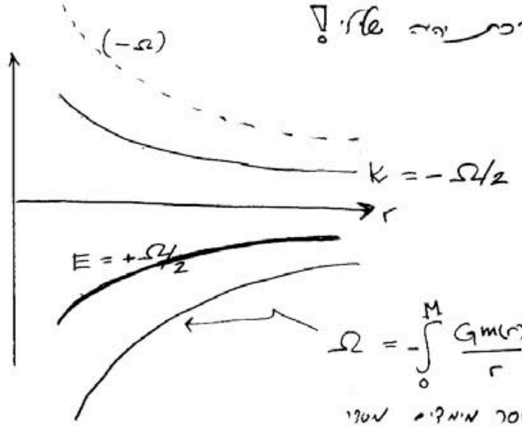
* האנרגיה הקינטית (התרמית) של החלקיקים המרכיבים את הכוכב שווה למחצית הערך האבסולוטי של האנרגיה הפוטנציאלית של הכוכב.

עבור גאז מונאטומי, $K = U$ דהיינו, האנרגיה הפנימית הכוללת U היא האנרגיה הקינטית הקשורה לטרנסלציה (ואין דרגות חופש פנימיות נוספות)
ואז מתקבל שהאנרגיה הכוללת היא:

$$\underbrace{E}_{\text{אנרגיה כוללת}} = U + \Omega = K + \Omega = \begin{cases} +\frac{1}{2}\Omega \\ -U & \text{וגם:} \end{cases}$$

כלומר, האנרגיה הפנימית הכוללת היא שלילית. היות ו- U יחסי לטמפ' (מעשה: $U = \frac{3}{2}\sum_i kT_i$) מקבלים ש-$E$ יחסית הפוך לטמפ'
⇐ קיבול החום של המערכת יהיה שלילי!

באופן גרפי:



$$\Omega = -\int_0^M \frac{G m(r)}{r}\,dm \approx -\alpha \frac{GM^2}{r_*}$$

מספר חסר מימדים מסדר גודל של יחדה.

מה זה אומר? אם הכוכב מתכווץ (מקרין) אזי האנרגיה הכוללת שלו קטנה. זה אומר שהוא עבד אנרגיה והיא נפלטה. אולם האנרגיה הפוטנציאלית קטנה עוד יותר והאנרגיה הקינטית = אנרגיה תרמית של החלקיקים עלתה. דהיינו הגאז התחמם.
(ושוב חוזרים לכך שקיבול החום שלילי!).

תכונה זו חשובה מאד ליציבות של כוכבים. אנו יודעים שכוכבים יוצרים אנרגיה ע"י ראקציות גרעיניות. אם הכוכב מתכווץ מעט, אזי הטמפ' תעלה, קצב הראקציות הגרעיניות יעלה, ויגדיל את הלחץ כך שהכוכב ירצה לחזור חזרה למצב הקודם במקום להמשיך להתכווץ.
כאשר נגמר דלק גרעיני מסוג אחד (לדוגמא מימן, או הליום) ההתכווצות תגדיל את הטמפ' עד שהדלק הבא יוכל להתחיל לבעור, להגדיל את הלחץ ולעצור את ההתכווצות.

המשוואה ההידרוסטטית

נסתכל על אלמנט מסה בנפח dV נתון בעל מסה ρ. נמצא כעת מהי המשוואה המתארת את שיווי המשקל של האלמנט.

בשיווי משקל, האלמנט אינו מאיץ, וסכום הכוחות שווה לאפס. הכוחות מתחלקים לכוחות פנימיים (לחץ) ולכוחות חיצוניים (לדוגמא כבידה).

נניח שהכוח ליח' נפח, החיצוני הוא $\vec{f}_v$ אזי הכוח החיצוני הכולל הוא:

$$\vec{F}_{ext} = \int_V \vec{f}_v \, dv$$

הכוח הכולל מהלחץ הוא:

$$\vec{F}_{int} = \int_S (-P)\, \hat{n}\, dS = \sum_{i=x,y,z} \int_S (-P)\, \hat{x}_i \cdot \hat{n}\, dS$$

לצורך מפרקים את F_{int} לסכום וקטורי של שלושת הרכיבים המרכיבים אותו בכיוונים x,y,z.

$$= -\sum_i \int_V \vec{\nabla}\cdot(P\hat{x}_i)\, dv = -\int_V \overbrace{\sum_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\hat{x}_i}^{\equiv \vec{\nabla}P} dv$$

ממשפט גאוס.

$$= -\int_V \vec{\nabla}P\, dv$$

דהיינו, סכום הכוחות הוא:

$$0 = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \int_V \vec{f}_v \, dv + \int_V (-)\vec{\nabla}P\, dv$$

זאת והנפח הוא שרירותי, השוויון מתקיים גם נקודתית:

$$0 = \vec{f}_v - \vec{\nabla}P$$

(במידה והכוחות לא שווים, האלמנט שני יאיץ. למשוואה הכוללת את תאוצת האלמנט קוראים משוואת אוילר, אותה אולי נראה בהמשך).

* בכוכב כדורי, הגדלים הם פונקציה של r בלבד, ונקבל:

$$\vec{\nabla}P = \vec{f}_v \Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\underbrace{\frac{GM(r)}{r^2}}_{f_g}\rho \equiv \text{המשוואה ההידרוסטטית}$$

f_g = הכוח ליח' מסה, הלא היא התאוצה הגרביטציונית.

על מנת להפוך מ"ליח' מסה" ל-"יח' נפח" יש להכפיל ב-ρ.

דרך אחרת להסתכל על המשפט הויריאלי:

מקודם, בחנו מערכת מיקרוסקופית של חלקיקים והגענו אל המשפט הויריאלי המדבר על גדלים ממוצעים של המערכת. נסתכל כעת על המערכת בעזרת גדלים מקרוסקופיים והמשוואה ההידרוסטטית

(עצם העובדה שאני משתמש במשוואה ההידרוסטטית אומר שגודל כמו I של המערכת נשאר קבוע ולכן התנאים דומים לתנאים ממקודם).

המשוואה ההידרוסטטית:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM(r)}{r^2}$$

נכפיל את הצדדים ב- $\frac{4\pi}{3}r^3 dr$ $V(r)dr$ ונקבל:

$$V(r)dP = -\frac{1}{3}\underbrace{4\pi r^2\rho dr}_{dM}\frac{GM(r)}{r} = -\frac{1}{3}\frac{GM}{r}dM$$

אם מבצעים אינטגרציה של הצד השמאלי על כל הכוכב, מתקבל:

$$\int V dP = PV\Big|_0^R - \int P dV$$

האיבר הראשון מתאפס היות וב- $r=0$ נקבל ש- V מתאפס
וב- $r=R$ הלחץ החיצוני על הכוכב מתאפס.

מאידך גיסא, $-\int\frac{GM}{r}dM = \Omega$ ולכן:

$$-3\int P dV = \Omega$$

ממכניקה סטטיסטית ידוע שבמקרה של גז מונואטומי
האנרגיה הפנימית ליח' נפח (או האנרגיה הקינטית ליח' נפח) $U_v = K_v = \frac{3}{2}P$

ואז נקבל:

$$-3\int K_v\cdot\frac{2}{3}dV = -2K = \Omega$$

במקרה של גז עם אנרגיה פנימית נוספת עדיין $K_v = \frac{3}{2}P$ אולם יש תוספת
נוספת עבור U. כלומר, עדיין $K = -\Omega/2$

במקרה היחסותי: $K_v = 3P$

ואז: $\hookrightarrow K = -\Omega$

במקרה היחסותי המונוטומי: $E = K + \Omega = 0$!

ומה קורה עבור גאז כללי, עם מקדם אדיאבטי γ ?

במקרה הכללי, פרט לאנרגיה הקינטית הטרנסלטורית של החלקיקים, ישנה אנרגיה פנימית נוספת:

$$\underset{\text{ליח' נפח.}}{U_{int,v}} = \beta \underbrace{nkT}_{P} = \beta P = \underbrace{\left(\beta - \tfrac{3}{2}\right)P}_{\text{אנרגיות פנימיות אחרות (סיבוב, ויברציה וכו'...)}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac{3}{2}P}^{K_v}}_{\text{אנרגיה קינטית טרנסלטורית}}$$

לפיכך מתקבל: $K = -\frac{\Omega}{2}$ אולם הפעם, בחשבון דרוש האנרגיה הכוללת, יש לקחת את התוספת הפנימית:

$$E = \underbrace{K}_{-\frac{1}{2}\Omega} + \Omega + \underbrace{\int dv\left(\beta - \tfrac{3}{2}\right)P}_{\left(\beta - \frac{3}{2}\right)\underbrace{\frac{2}{3}K}_{-\frac{1}{3}\Omega}} = \Omega\left[-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\left(\beta - \frac{3}{2}\right)\right]$$

כזכור מתרמודינמיקה, הקשר בין β ומקדם האדיאבטי הינו:

$$\gamma = \frac{\beta + 1}{\beta} \longrightarrow \beta = \frac{1}{\gamma - 1}$$

ולכן:

$$E = \Omega\left[1 - \frac{\beta}{3}\right] = \Omega\left[1 - \frac{1}{3(\gamma-1)}\right] = \Omega\left[\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\right]$$

אנו רואים שעבור $\gamma = 4/3$ שמתאים לגאז יחסותי, אנו שוב מקבלים שהאנרגיה הכוללת מתאפסת. עבור γ קטן יותר האנרגיה הכוללת חיובית. כלומר, שווה למערכת להתפשט ל-∞. כמו כן, הקיבול חום יהיה חיובי והתכונות המעניינות שתוארו ביציבות הדינמית שלנו אינן מתקיימות עוד. עוד אנו מגלים שעבור $\gamma \to 1$, כלומר גאז איזותרמי, מתקבל $\frac{E}{\Omega} \to \infty$. הסיבה לכך נעוצה בעובדה שלא ניתן לקבל פני שטח כוכב עם $P=0$ ברדיוס סופי, ואם נכפה אינטגרציה החוצה, נמצא עוד ועוד מסה מכיוון ש-P תורמת ל-Ω אם כן תורמת ל-K (ולא ל-E).

(אין פתרון קונסיסטנטי לגוף איזותרמי עם רדיוס סופי ו- $P=0$ בשפה).