אסטרופיסיקה וקוסמולוגיה - הרצאה בנושא משוואות פרידמן

ראינו שמרחבים הומוגניים שמקיימים את העקרון הקוסמולוגי מתוארים ע"י מטריקת Robertson Walker. כעת אנו צריכים את המשוואות שיתנו לנו כיצד המרחב עובר אבולוציה. משוואות אלה מתוארות ע"י משוואות איינשטיין שנראות:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

R_{ij}, R הם הטנסור והסקלר של Ricci: והם קשורים למטריקה g_{ij} ע"י סימני קריסטופל והטנסור של רימן:

Christoffel Symbols:

$$\Gamma^{i}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}} \right]$$

טנסור רימן:

$$R^{i}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^{i}_{km}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{i}_{kl}}{\partial x^{m}} + \Gamma^{i}_{nl}\Gamma^{n}_{km} - \Gamma^{i}_{nm}\Gamma^{n}_{kl}$$

ולבסוף:

$$R_{ik} = R^{l}_{ilk} \qquad R = g^{ik} R_{ik}$$

T_{ij} הוא הטנסור אנרגיה-מומנטום:

$$T_{ij} = (\overset{\text{הלחץ}}{p} + \underbrace{\rho c^2}_{\text{צפיפות המסה אנרגיה.}}) U_i U_j - p g_{ij}$$

אם מציבים את מטריקת RW לתוך משוואות איינשטיין, מקבלים:

משוואות פרידמן Friedmann

מהחלק זמן-זמן:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a$$

מהחלק מרחב-מרחב:

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 = 4\pi G \left(\rho - p/c^2 \right) a^2$$

אם מחברים את המשוואות יחדיו:

$$\dot{a}^2 + kc^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho a^2$$

מהחלק זמן-מרחב מקבלים $0=0$.

משוואות פרידמן הן לא בלתי תלויות אחת בשניה. למעשה ניתן לקבל את המשוואה השניה מהראשונה אם אנו לוקחים בחשבון את ההתפשטות האדיאבטית של היקום:

$$dU = -PdV$$

(כי $ds=0$ אין מגע עם מאגר חום אחר...)

$$\underbrace{d(\rho c^2 a^3)}_{\text{אנרגיה של קופסה } a^3} = \underbrace{-p\,da^3}_{\text{שינוי הנפח של הקופסה.}}$$

העובדה שמשוואות פרידמן מכילות שימור אנרגיה אינה מפתיעה היות ומשוואות איינשטיין נבנו כך שאנרגיה, מומנטום ומסה ישמרו!

את המשוואה האחרונה ניתן לרשום:

$$d(\rho c^2 a^3) + d(pa^3) - a^3 dp = 0$$

כך:

$$\dot{p} a^3 = \frac{d}{dt}\left[a^3(\rho c^2 + p)\right]$$

$$\dot{p} a^3 = \frac{da^3}{dt}(\rho c^2 + p) + a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2 + a^3 \dot{p}$$

$$\cancel{\dot{p} a^3} = 3a^2 \dot{a} \rho c^2 + 3a^2 \dot{a} p + a^3 \dot{\rho} c^2 + \cancel{a^3 \dot{p}}$$

או כך:

$$\dot{\rho} + 3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

למעשה, למשוואת פרידמן הראשונה ניתן להגיע גם בדרך קלסית.

חוק גאוס אומר שמסה נמשכת רק ע"י המסה שנמצאת בתוך רדיוס שבו היא ע"י רדיוס המסה. חוק גאוס אמור להתקיים גם עבור מערכת שהיא הומוגנית. בגלל שהמערכת הומוגנית ניתן לבחור ראשית היכן שאנו רוצים!

התאוצה של הנקודה ברדיוס l תהיה:

$$(*) \quad \frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{Gm(l)}{l^2} = -\frac{4\pi}{3} G\rho l$$

נכפיל ב- $\dot{\ell}$ ונקבל:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\ell}^2}{2}\right) = -\frac{Gm\dot{\ell}}{\ell^2}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\dot{\ell}^2 = \frac{2Gm}{\ell} + c = \frac{8\pi}{3}G\rho\ell^2 + \underbrace{c}$$

קבוע שקשור לאנרגיה הכוללת.

(את האינטגרציה מבצעים עם m קבוע כמובן).

את ℓ ניתן לרשום כאילו שהוא proper distance עם סקלת יקום משתנה:

$$\ell = d_c\frac{a}{a_0} \longrightarrow \dot{\ell} = d_c\frac{\dot{a}}{a_0}$$

כך ש-

$$d_c^2\frac{\dot{a}^2}{a_0^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho d_c^2\frac{a^2}{a_0^2} + c$$

או:

$$\dot{a}^2 + \tilde{C} = \frac{8\pi}{3}G\rho a^2$$

כשמשווים את $\tilde{C}$ למתקבל ממשוואות איינשטיין $\tilde{C}$ הוא Kc^2, דהיינו האנרגיה הכוללת של "המרחב" קובעת אם יהיה סגור, שטוח או פתוח (היפרבולי)

המשוואה הראשונה (*) נותנת:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho$$

המשוואה הזו אינה בדיוק המשוואה שמתקבלת ממשוואות איינשטיין אלא זה מפני שה- ρ האפקטיבי ביחסות הוא כולל את צפיפות המסה והלחץ:

$$\rho_{eff} = \rho + 3\frac{P}{c^2}$$

כאשר הלחץ הוא משמעותי, הצפיפות האפקטיבית גדולה יותר!

הקבוע הקוסמולוגי Λ

איינשטיין ב- 1917 הוסיף איבר למשוואה שלו, שתראה:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

זוהי ההכללה המירבית למשוואות איינשטיין שעדיין מקיימות ש-T_{ij} יהיה טנסור שתלוי ב- g_{ij}, בנגזרות הראשונות שלו ולינארי בנגזרות השניות שלו וכמו כן, אינו משנה את משוואות הרצף $T^{ij}{}_{;j}=0$ (שימור מסה, מומנטום ואנרגיה), Λ גם אינו משנה את הפיסיקה המיקרוסקופית (Λ צריך להיות מספיק קטן כדי שלא נראה את השפעתו עד לסקלה בגודל מסוים).

הסיבה ההיסטורית שאיינשטיין הכניס את Λ היתה כדי שניתן יהיה לקבל יקום סטטי (ללא Big-Bang ושנראה תמיד אותו הדבר). בדיעבד, הוא היה בטוח שזה טעות חייו והיקום (התגלה כמתפשט ע"י הבל") ובדיעבד נוסף התברר לאחרונה שבכל זאת יתכן ו- $\Lambda \neq 0$!

ניתן להתייחס ל- Λ ע"י הגדרת $\tilde{T}_{ij}$ חדש:

$$\tilde{T}_{ij} = T_{ij} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ij} = -\tilde{p} g_{ij} + (\tilde{p} + \tilde{\rho} c^2) U_i U_j$$

דהיינו, ע"י הגדרת לחץ וצפיפות מסה-אנרגיה חדשים:

$$\tilde{p} = p - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \qquad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

ל- $|\Lambda|^{-1/2}$ יש מימדים של אורך. זהו הגודל האופייני של היקום שמעליו Λ חשוב.

מודל איינשטיין:

כדי לקבל יקום סטטי:

$$0 = \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G \left(\tilde{\rho} + 3\frac{\tilde{p}}{c^2}\right) a$$

או:

$$\left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} + \cancel{\frac{3p}{c^2}} - \frac{3\Lambda c^2}{8\pi G}\right) = 0$$

$P/c^2 \ll \rho$ ביקום של היום

לכן ביקום סטטי צריך להתקיים:

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2}$$

זהו מודל איינשטיין, שהוא סטטי אבל לא יציב! אם באיזור מסוים ρ גדל, אותו איזור יתמוטט ואילו באיזורים בהם ρ קטן יותר, האיזורים יתנפחו.

מודל <u>de Sitter</u> (1917)

מודל זה מניח יקום ריק $\rho=0, p=0$ (למעשה קטנים כיחס ל-Ω: $\left(\rho, \frac{p}{c^2} \ll \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}\right)$) ונשאר $K=0$. במקרה זה:

$$\tilde{p} = -\tilde{\rho}c^2 = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

מציבים במשוואה ל-$\dot{a}^2$ ומקבלים:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3}c^2a^2$$

Λ חייב להיות חיובי כדי שיהיה פתרון מסוג זה

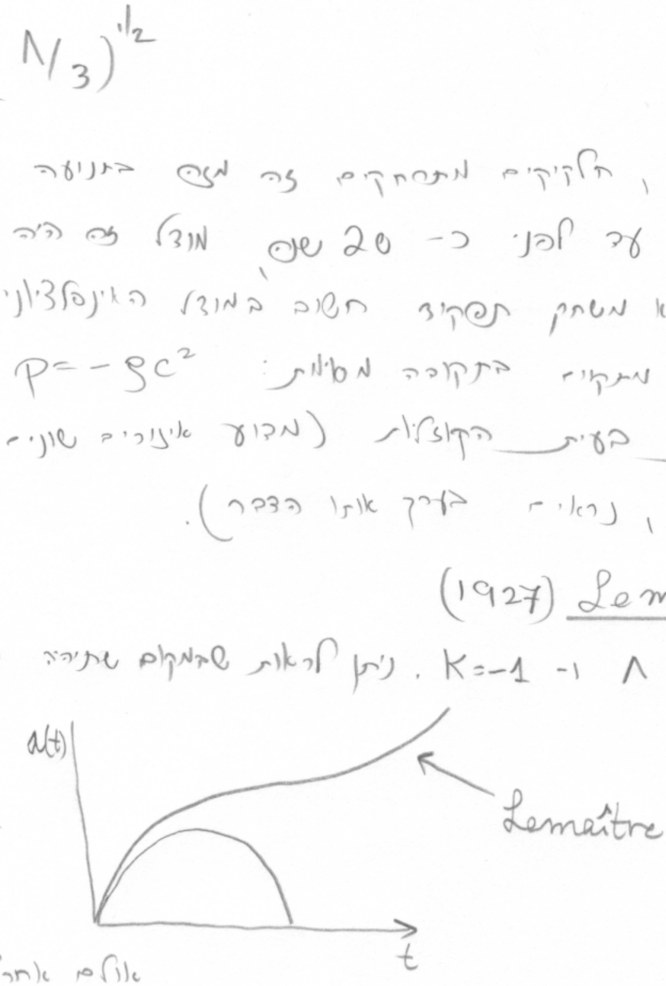
$$a = A\exp\left(\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}ct\right)$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = c\left(\Lambda/3\right)^{1/2}$$

במודל דה-סיטר, חלקיקים מתרחקים זה מזה בתנועה מואצת כתוצאה מאפקט הדחייה של Λ. עד לפני כ-20 שנה, מודל זה היה בעל ענין "אקדמי" בלבד. אולם מתברר שהוא משחק תפקיד חשוב במודל האינפלציוני (בהמשך...) בו כתוצאה מאפקטים קוונטיים, מתקיים בתקופה מסוימת: $p=-\rho c^2$. הגדלה האקספוננציאלית יכולה לפתור את בעיית הקוזליות (מדוע איזורים שונים ב היקום שפעם לא היו במגע זה עם זה, נראים בדיוק אותו הדבר).

מודל <u>Lemaître</u> (1927)

במודל זה ישנם Λ ו- $K=-1$. ניתן לראות שבמקום שתהיה התפשטות והתכווצות, ניתן לקבל:



ב-1970 השתמשו במודל זה כדי להסביר מדוע רואים "עודף" קוואזרים ב-$z\approx2$

אולם אחר"כ התברר שזאת לא בעיה.

בכל מקרה, למטרה היה הראשון שהציע מודלים עם מפץ גדול ולכן הוא נחשב לאבי ה-Big Bang

מודלים של פרידמן:

המשוואות שיש לנו הן

$$\ddot a = -\frac{4\pi}{3} G\left(\rho + 3P/c^2\right) a$$

$$\dot a^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2$$

או

$$d(\rho a^3) = -3\frac{P}{c^2} a^2 da$$

כדי שנוכל "לסגור" את המשוואות, יש למצוא קשר בין p לבין ρ $P(\rho)$.

בדר"כ ניתן לעבוד בקירוב של "perfect fluid": $p = w\rho c^2$

דרך אחרת לרשום את המשוואה השניה היא בעזרת $H_0 = \frac{\dot a_0}{a_0}$:

$$\left(\frac{\dot a_0}{a_0}\right)^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho\left(\frac{a_0}{a_0}\right)^2 = H_0^2 - H_0^2\cdot\frac{\rho}{\underbrace{(3H_0^2/8\pi G)}_{\equiv \rho_c}} = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

או

$$H_0^2\Big(1-\underbrace{\frac{\rho_0}{\rho_c}}_{\Omega\,\equiv\,\text{density parameter}}\Big) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

אם הצפיפות מעל הצפיפות הקריטית, היקום בהכרח עם $K=+1$. אם שווה הצפיפות, $K=0$ ואם הצפיפות קטנה מקריטית, $K=-1$.

נחזור למשוואות המצב:

עבור גאז קלסי:

$$p = \frac{k_B T}{m_p c^2}\rho_m c^2 = \underbrace{\frac{k_B T}{m_p c^2}}_{\ll 1}\underbrace{\frac{\rho c^2}{\left[1+\frac{k_B T}{(\gamma-1)m_p c^2}\right]}}_{\approx 1}$$

לכן $w \to 0$ עבור גאז קלסי (התרומה של הלחץ לצפיפות אנרגיה-מסה היא זניחה).

עבור גאז יחסותי:

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2 \longrightarrow w = 1/3$$

באופן כללי:

$$v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2}$$

ולכן w אינו יכול להיות גדול מ-1 (ייצור מהירות קול $> c$)

$w<0$ אינו מתקבל עבור חומר רגיל אך ישנם מצבים בהם החומר יכול לקיים $w<0$ בתחום מסוים באופן אפקטיבי.

מהמשוואה של "נוזל אידיאלי" והתפשטות אדיאבטית מתקבל:

$$d(\rho a^3) = -3\,\frac{w \rho c^2}{c^2}\,a^2\,da$$

$$\hookrightarrow \rho\, a^{3(1+w)} = \text{const} = \rho_{0w}\, a_0^{\,3(1+w)}$$

עבור dust universe, כשהלחץ זניח = matter dominated universe:

$$\rho a^3 \equiv \rho_m a^3 = \text{const.} = \rho_{0m}\, a_0^3$$

עבור יקום הנשלט ע"י לחץ קרינה (radiation universe):

$$\rho a^3 \equiv \rho_r a^4 = \text{const} = \rho_{0r}\, a_0^4$$

אם נחליף את a ב- z:

$$\rho_m = \rho_{m,0}(1+z)^3$$
$$\rho_r = \rho_{0,r}(1+z)^4$$

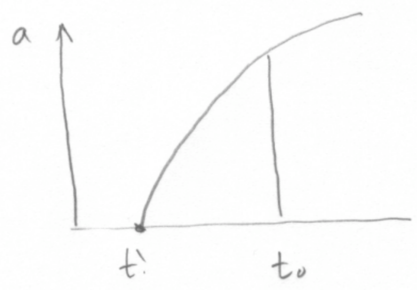
אם נגדיר $\Omega_w = \dfrac{\rho_{0w}}{\rho_{0,c}}$ נקבל:

$$\left(\frac{\dot a}{a_0}\right)^2 = H_0\left[\Omega_w\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_w)\right]$$

או לחילופין:

$$H^2(t) = H_0^2\left(\frac{a_0}{a}\right)^2\left[\Omega_w\left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1-\Omega_w)\right]$$

מהמשוואה הראשונה אנו רואים שעבור $-\frac{1}{3} < w$ (<1) נקבל ש- $\dot a$ יותר גדול עבור a יותר קטן. מגדלים אלה בכל מקרה יובילו ל- Big Bang.



דהיינו, ישנו $a(t=t')=0$ עבור t' סופי בעבר.

מודל איינשטיין דה-סיטר Einstein de-Sitter

זהו מודל עם $\Omega_w = 1$ ו- $\Lambda = 0$. (במקור רק עבור $w=0$)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} = H_0^2 (1+z)^{1+3w}$$

$$\hookrightarrow a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3(1+w))} \longrightarrow$$

מודל זה יתפשט לעד אך הקצב קטן עם הזמן, מדובר במודל עם אנרגיה שווה בדיוק לאנרגיה הקריטית הנחוצה על מנת לעצור את ההתפשטות של היקום כ- $t \to \infty$

או:

$$t = t_0 (1+z)^{-3(1+w)/2}$$

האבולוציה של קבוע הבל:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)t} = H_0 \left(\frac{t_0}{t}\right) = H_0 (1+z)^{3(1+w)/2}$$

ההאטה:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1+3w}{2} = const = q_0$$

גיל היקום.

$$t_{0,w} \equiv t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$$

האבולוציה של הצפיפות:

$$\rho = \rho_{0,w} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2} = \frac{1}{6(1+w)^2 \pi G t^2}$$

(כאשר ע"י שימוש ב- .

$$\rho_{0,w} t_0^2 = \rho_{0c}\, t_{0c,w}^2 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\frac{2}{3(1+w)H_0}\right]^2 = \frac{1}{6(1+w)^2 \pi G}$$

)

dust	radiation
$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$	$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$
$t = t_0 (1+z)^{-3/2}$	$t = t_0 (1+z)^{-2}$
$H = \frac{2}{3t} = H_0 (1+z)^{3/2}$	$H = \frac{1}{2t} = H_0 (1+z)^2$
$q_0 = 1/2$	$q_0 = 1$
$t_{0c,m} \equiv t_0 = \frac{2}{3H_0}$	$t_{0,c,r} \equiv t_0 = \frac{1}{2H_0}$
$\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2}$	$\rho_r = \frac{3}{32\pi G t^2}$