קוסמולוגיה – הרצאה בנושא המטריקה של Robertson-Walker

<u>העקרון הקוסמולוגי</u> – כל הנקודות במרחב אקויולנטיות, דהיינו, היקום הוא איזוטרופי והומוגני.

המטריקה הכללית ביותר שמקיימת זאת היא המטריקה של Robertson-Walker

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - dl^2 =$$
$$= (c\,dt)^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

ה- $[\ ]$ מתאר את החלק המרחבי. שהוא יכול להיות חלק משטח תלת מימדי של ארבע-כדור או ארבע-היפרבולה (אוכף) או משטח שטוח אין סוף.

כדי לראות זאת, נסתכל על פני השטח של כדור דו מימדי. שטח זה מתואר ע"י:

$$dl^2 = a^2\left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

אם נגדיר

$$r = \sin\theta \rightarrow dr = \cos\theta\, d\theta \rightarrow (dr)^2 = \cos^2\theta (d\theta)^2$$
$$= (1-r^2)(d\theta)^2$$

נקבל:

$$dl^2 = a^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2\right)$$

הכללה למרחב תלת מימדי על ארבע מימדי, נותנת:

$$(dl)^2 = a^2\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\Omega^2\right) = a^2\left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 \underbrace{d\Omega^2}_{}\right)$$

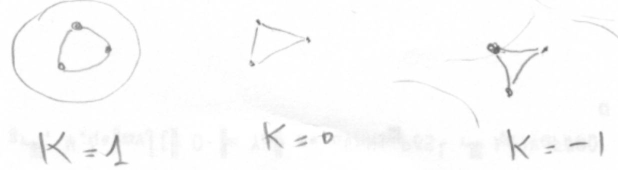
החלק הזויתי $= d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$

K מנורמל ל- $+1, 0, -1$ (ע"י הגדרה של a)

$K = +1$ - מרחב "כדורי"

$K = 0$ מרחב שטוח

$K = -1$ מרחב היפרבולי.



$K=1$ $K=0$ $K=-1$

האלמנט אורך הוא:

$$ds^2 = (c\,\underbrace{dt}_{\text{synchronous gauge}})^2 - dl^2$$

ניתן לכתוב אותו כך רק במרחב הזמן, אחרת, יתכנו איברים $dt\,dx$.
המערכת בה ds מוגדר כך, הקואורדינטות המרחביות הן - co-moving.

את ds^2 ניתן במרחב הזמן לרשום גם בצורה:

$$ds^2 = a(\tau)^2\left[(c\,d\tau)^2 - \frac{dr^2}{(1-kr^2)} + r^2\,d\Omega^2\right]$$

τ נקרא כאן conformal time, זוהי מערכת בה ds^2 מוגדר כמרחב מינקובסקי עד כדי conformal factor.

* המטריקה מגדירה את התכונות המקומיות ולא הגלובליות. לדוגמא, אותה מטריקה שטוחה או היפרבולית יכולה להגדיר מרחב אין סופי או למשל "תלת טורוס" T^3.

חוק הבל:

ה- proper distance הוא המרחק שהיה נמדד ע"י אוסף של צופים בזמן t נתון. נסתכל על נקודה אחת ב- $r=0$ ושניה ב- $r=r$.

המרחק מטריקה ביניהן הוא:

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{a\,dr'}{(1-kr'^2)^{1/2}} = a\,f(r)$$

כאשר:

$$f(r) = \begin{cases} \sin^{-1}(r) & K=+1 \\ r & K=0 \\ \sinh^{-1}(r) & K=-1 \end{cases}$$

באופן פרטי, גם ב- $t=t_0$ נקבל:

$$d_{pr}(t=t_0) = a_0 f(r) = \frac{a_0}{a}\,d_{pr}(t)$$

ניתן להגדיר co-moving distance שאינו משתנה עם t:

$$d_c \equiv d_{pr}(t=t_0) = a_0 f(r)$$

עבור נקודות שהן co-moving – הקואורדינטה המיספרית אינה משתנה ולכן r ו- f(r) קבועים.

ה- proper distance משתנה לפי:

$$v_r = \frac{d(d_{pr})}{dt} = \dot{a} f(r) = \frac{\dot{a}}{a} d_{pr}$$

זה חוק הבל (Hubble) והקבוע $\boxed{H = \frac{\dot{a}}{a}}$

נקרא קבוע הבל (למרות שאינו קבוע בזמן! רק במרחב).

<u>מהו ה- redshift</u>?

פוטון יוצא מאובייקט בנקודה r בזמן t ומגיע לראשית בזמן t_0.

האורך גל שלו ישמר ונגדיר:

$$z \equiv \frac{\overset{\text{observed}}{\lambda_0} - \lambda_e \ \text{emitted}}{\lambda_e}$$

אור נע על null geodesic ע"פ: $ds^2=0$ ולכן:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{a} = \int_0^r \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}} = f(r)$$

אותה המשוואה הזו מתקיימת גם עבור $t_0 \to t_0+\delta t_0$ ו- $t_e \to t_e+\delta t_e$

אם האובייקטים הם co-moving אז f(r) נשאר קבוע.

$$\int_{t_0}^{t_e} \frac{c\,dt}{a} = f(r) = \int_{t_0+\delta t_0}^{t_e+\delta t_e} \frac{c\,dt}{a}$$

ולכן:

$$\frac{c}{a_0}\delta t_0 = \frac{c}{a}\delta t_e$$

אולם $\delta t_0 = 1/\nu_0 \; ; \; \delta t_e = 1/\nu_e$

והואיל ו- $\dfrac{\lambda_0}{a_0} = \dfrac{\lambda_e}{a}$ מיד נקבל:

וגם:

$$\boxed{1+z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a}}$$

---

the deceleration parameter

באופן כללי. $a(t)$ ניתן ע"י משוואות איינשטיין של תורת היחסות הכללית (שנקראות משוואות פרידמן במקרה של מטריקת RW). באופן כללי, ניתן לפתח את $a(t)$ גם אם אנו לא יודעים את הפיסיקה של ההתנהגות שלו). נרשום:

$$a(t) = a_0\left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t-t_0)^2 + O(t-t_0)^3\right]$$

כאשר:

$$q_0 = \underbrace{-}_{\text{deceleration}}\frac{\ddot{a}(t_0)\,a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2}$$

q_0 נקרא ה-deceleration parameter.

למה שווה $z(t)$?

$$1-z = \frac{a_0}{a} = \underbrace{\frac{1}{1+\alpha\delta t+\beta\delta t^2}}_{\alpha = H_0,\ \beta = -\frac{1}{2}q_0H_0^2,\ \delta t = t-t_0} = 1 - \alpha\delta t + \alpha^2(\delta t)^2 - \beta(\delta t)^2 + (O(\delta t)^3)$$

ל.כ.

$$1-z = 1 - H_0(t-t_0) + \left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t-t_0)^2$$

ומה הקשר ההפוך $t(z)$?

ישנה משוואה מהצורה: $z = b\delta t + c(\delta t)^2$. עבור δt קטן: $\delta t = z/b$

ננחש על כן $\delta t = z/b + \epsilon$. נציב במשוואה ונקבל:

$$z = \frac{z}{b}\cdot b + \epsilon b + c\Big(\frac{z^2}{b^2} + \underbrace{\cancel{\frac{2\epsilon z}{b}} + \cancel{\epsilon^2}}_{\text{זניחים}}\Big)$$

ולכן: $\epsilon = -c\,z^2/b^3$. נציב את הכל ונקבל:

$$(t_0 - t) = \frac{1}{H_0}\left(z - \left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2 + O(z^3)\right)$$

עבור דרך אור:

$$\int_t^{t_0} \frac{c\,dt}{a} = \int_0^r \frac{dr}{(1-Kr^2)^{1/2}} = \begin{cases} \sin^{-1}(r) & K=+1 \\ r & 0 \\ \sinh^{-1}(r) & -1 \end{cases}$$

$$\frac{c}{a_0}\int_t^{t_0}\left[1 + H_0(t_0-t) + \left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_0-t)^2 + \cdots\right] = r + O(r^3)$$

$$r = \frac{c}{a_0}\left[(t_0-t) + \frac{1}{2}H_0(t_0-t)^2 + \cdots\right]$$

מהו הקשר בין המספר דימנסיונלי לבין הזמן של האור:

$$r = \frac{c}{a_0 H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + O(z^3)\right]$$

מהו הקשר בין ה- proper distance לבין ה- redshift

במציאות לא ניתן למדוד את ה- p.dist. ניתן למדוד מרחקים אחרים.

למשל: Luminosity distance:

מהו המרחק האוקלידי מאובייקט שנותן את אותו השטף קרינה כמו הבהירות הנמדדת.

Luminosity

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2} \longrightarrow d_L = a_0^2\,\frac{r}{a}$$

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2}\cdot\left(\frac{a}{a_0}\right)^2$$

$a_0^2 r^2$ מתפזר על כדור ברדיוס

הזמן היה יותר קצר.
(אם התדירות גבוהה יותר!)

$$d_L = \frac{c}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + O(z^3)\right]$$

Angular diameter distance:

D_{pr} proper diameter אורכו של גוף עצמו.

$D_{pr} = a\, r\, \cancel{d}\, \Delta\theta$

$$d_A = \frac{D_{pr}}{\Delta\theta} = a r = \frac{1}{H_0}\left(z - \tfrac{1}{2}(3+q_0) z^2\right)$$

Other distances: parallax distance: $d_p = a_0 \dfrac{r}{(1-Kr^2)^{1/2}}$

& propper motion distance: $d_M = a_0 r$