גלים אלקטרוסטטיים בפלסמה

בכיתה חיפשנו פתרון בצורת גל אלקטרוסטטי למשוואות ולאסוב-פואסון:

ולאסוב $\frac{\partial f_s}{\partial t} + V_x \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial V_x} = 0$ (מתקיים לכל אלקטרוסטטי)

פואסון $\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e \int (f_i - f_e)\, d^3V$ (בכיוון x בלבד)

שלבי הפתרון היו:

1. לינאריזציה
2. טרנספורם פורייה במרחב ובזמן לפי הלינאריות.

התוצאה היתה:
$$1 - \frac{\omega_p^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(V_x)}{(\frac{\omega}{k}-V_x)^2}\, dV_x = 0 \qquad (*)$$

כאשר:
$$g(V_x) = \frac{1}{n_0}\int_{-\infty}^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z \left(\frac{m_e}{m_i} f_{i0} + f_{e0}\right)$$

! f_{i0}, f_{e0} הן ההתפלגויות של האלקטרונים והיונים בסדר 0 של ההפרעה.

אם f_{i0}, f_{e0} הן כאלו שב $V_x = \frac{\omega}{k}$, $g(V_x)$ גזירה, אז אין בעיה לקחת את האינטגרל ב(*) ולקבל את יחס הדיספרסיה $\omega(k)$.

בכיתה, הזנחנו את f_{i0} והנחנו ש f_{e0} מקסווליאן. בנוסף, הנחנו ש $\frac{\omega}{k}$ נמצא בתחום הרחוק של המקסווליאן וכתוצאה קיבלנו את יחס הנפיצה:
$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2V_e^2$$

מצד שני, אם $g(V_x)$ לא גזירה ב $V_x = \frac{\omega}{k}$ אז יש לפתור למשוואות ולאסוב-פואסון לאחר הלינאריזציה, לעשות טרנ' פורייה רק במרחב וטרנספורם לפלס בזמן (כלומר לאפשר לω להיות מרוכב).

הוכח, נניח ש $g(V_x)$ גזירה באזור הרלוונטי ונפתור 2 בעיות:

א: נניח f_{i0}, f_{e0} התפלגויות מקסוול אך לא נזניח את תרומת היונים.

ב: נזניח את תרומת היונים ונניח ש f_{e0} סכום של שתי דלתאות (אלומות אלקטרונים קרות).

נתחיל מא: ההתפלגויות מקסוול: $f_{s0} = \frac{n_0}{(2\pi)^{3/2}V_s^3} e^{-\frac{V_x^2+V_y^2+V_z^2}{2V_s^2}}$ כאשר $V_s = \sqrt{\frac{K_BT}{M_s}}$

הערה! $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+b)^2}{c^2}}\,dx = c\sqrt{\pi}$, נקבל ש:

$$g(V_x) = \frac{m_e}{m_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}V_i} e^{-\frac{V_x^2}{2V_i^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}V_e} e^{-\frac{V_x^2}{2V_e^2}}$$

כאמור, נניח את V_e, V_i קטנים מ $\frac{\omega}{k}$ ($\frac{\omega}{k} \gg V_i, V_e$) ונפתח את המכנה באינטגרל של (*):

$$\frac{1}{\frac{\omega^2}{k^2}\underbrace{\left(1-\frac{kV_x}{\omega}\right)^2}} \approx \left(1+\frac{2kV_x}{\omega}+\frac{3k^2V_x^2}{\omega^2}\right)\frac{k^2}{\omega^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

לכן, נציב בחזרה ל(*) ונשמור עד סדר חשיבות שני:

$$(i)\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U^2}{2V_T^2}}\,dU=\sqrt{2\pi}\,V_T$$

$$(ii)\ \int_{-\infty}^{\infty} U e^{-\frac{U^2}{2V_T^2}}\,dU=0$$

$$(iii)\ \int_{-\infty}^{\infty} U^2 e^{-\frac{U^2}{2V_T^2}}\,dU=-\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{2V_T^2}\right)}\left[\left(\frac{1}{2V_T^2}\right)^{-1/2}\sqrt{\pi}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2V_T^2}\right)^{-3/2}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}\cdot 2^{3/2}V_T^3\sqrt{\pi}=V_T^3\sqrt{2\pi}$$

כעת אפשר להציב בחזרה ל(*) ונקבל ש:

$$0=1-\frac{W_p^2}{W^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{m_e}{m_i}\frac{e^{-\frac{V_x^2}{2V_i^2}}}{\sqrt{2\pi}V_i}+\frac{e^{-\frac{V_x^2}{2V_e^2}}}{\sqrt{2\pi}V_e}\right]\left[1+\frac{2KV_x}{W}+\frac{3K^2V_x^2}{W^2}\right]dV_x=$$

$$=1-\frac{W_p^2}{W^2}\left[\frac{m_e}{m_i}\frac{\sqrt{2\pi}V_i}{\sqrt{2\pi}V_i}+\frac{\sqrt{2\pi}V_e}{\sqrt{2\pi}V_e}+0+0+\frac{m_e}{m_i}\frac{3K^2\sqrt{2\pi}V_i^3}{\sqrt{2\pi}V_iW^2}+\frac{3K^2\sqrt{2\pi}V_e^3}{\sqrt{2\pi}V_eW^2}\right]=$$

$$=1-\frac{W_p^2}{W^2}\left[\frac{m_e}{m_i}+1+\frac{m_e}{m_i}\frac{3K^2V_i^2}{W^2}+\frac{3K^2V_e^2}{W^2}\right]=$$

$$=1-\frac{W_p^2}{W^2}\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)-\frac{3W_p^2K^2}{W^4}\left(\frac{m_e}{m_i}V_i^2+V_e^2\right)$$

נסדר קצת את הביטוי הנ"ל.

בסדר אפס של ההפרעה מקבל: $1-\frac{W_p^2}{W_0^2}\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)=0$

אז $W_0^2=W_p^2\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)$, נציב בחזרה בביטוי המלא ונקבל:

$$W^2=W_p^2\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)+\underline{\frac{3W_p^2K^2}{W_p^2\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)}}\left(\frac{m_e}{m_i}V_i^2+V_e^2\right)$$

קירבנו את W^4 ל $W^2W_0^2$.

ובסוף:

$$\boxed{W^2=W_p^2\left(1+\frac{m_e}{m_i}\right)+3K^2V_e^2\left[\frac{1+\frac{m_e}{m_i}\frac{V_i^2}{V_e^2}}{1+\frac{m_e}{m_i}}\right]}$$

נשים-לב שאם נזניח את היונים נקבל בחזרה: $W^2=W_p^2+3K^2V_e^2$.

ב. נזניח את תרמית היונים אך נניח בסדר אפס התפלגות דלתא של האלקטרונים, או: "אלומת אלקטרונים קרה" (במהירות U_0 בכיוון x), נחזור ל(*) ונקבל ש:

$$0=1-\frac{W_p^2}{K^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(U-U_0)}{\left(\frac{W}{K}-U\right)^2}\,dU\underset{\uparrow}{=}1-\frac{W_p^2}{K^2}\frac{1}{\left(\frac{W}{K}-U_0\right)^2}$$

בהנחה ש $\frac{W}{K}\neq U_0$

מכאן ש: $K^2\left(\frac{W}{K}-V_0\right)^2=W_p^2 \Rightarrow W-KV_0=\pm W_p \Rightarrow \underline{W=KV_0\pm W_p}$.

באותה צורה, אפשר לפתח התפלגויות נוספות אם מתקיים ש $\frac{W}{K}$ נמצא "מחוץ להתפלגות".

• אם $\frac{W}{K}$ נמצא "בתוך ההתפלגות" הדרך היא לחפש פתרון עם W מרוכב ולעשות טרנס' לפלס בזמן. זה מוביל <u>לדעיכה</u> בנוסף לאוסצילציות הרגילות, הקרויה <u>דעיכת לנדאו</u>. בגרף, אם $\frac{W}{K}$ נמצא היכן ש f_{e_0} יורדת נקבל דעיכת לנדאו. אם $\frac{W}{K}$ היכן ש f_{e_0} עולה נקבל גידולה של הפולס ואם $\frac{W}{K}$ מחוץ להתפלגות נקבל רק <u>אוסצילציות</u>.