מעבר מלגרנז'יאן להמילטוניאן

נתחיל מ N $L(q_i,\dot q_i,t)$ $i=1..N$

1- מוצאים תנע צמוד לכל q_i $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}(q_j,\dot q_j,t)$ $(i,j=1..N)$.

2- ההמילטוניאן: $H=\sum_i p_i\dot q_i-L$

3- בביטוי לH עוברים מ $\dot q_i$ ל p_i ומקבלים פונק' של t,q_i,p_i: $H(q_i,p_i,t)$

4- במקום משוואות EL, מש' התנועה החדשות יהיו מש' המילטון:

$\dot q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $(i=1..N)$. סה"כ $2N$ מש' מסדר ראשון.

דוגמא- אוסצילטור הרמוני:

ב 1D הלגרנז'יאן של אוסצילטור הוא: $L=\frac{m}{2}\dot x^2-\frac{k}{2}x^2$

1- התנע הצמוד לx הוא: $p=\frac{\partial L}{\partial \dot x}=m\dot x$

2+3- ההמילטוניאן יהיה: $H=p\dot x-L=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2$

4- מש' המילטון יהיו: $\dot x=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}$, $\dot p=-\frac{\partial H}{\partial x}=-kx$

בכתיב מטריצוני נקבל:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/m\\-k&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\p\end{pmatrix}$$

נעבור למשתנים חדשים כך ששני רכיבי הוקטור יהיו באותן יחידות:

$\tilde x=x$, $\tilde p=\frac{p}{\sqrt{mk}}$ $\Leftarrow$ $\dot{\tilde x}=\sqrt{\frac{k}{m}}\tilde p$, $\dot{\tilde p}=-\sqrt{\frac{k}{m}}\tilde x$. נסמן

$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ונקבל בכתיב מטריצוני:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde x\\\tilde p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\omega\\-\omega&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde x\\\tilde p\end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה ב M.

נמצא את הערכים העצמיים של M:

$$\det(\lambda I-M)=0 \Rightarrow \lambda^2-\omega^2=0 \rightarrow \lambda=\pm i\omega$$

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים לכל ערך עצמי.

עבור $\lambda=i\omega$: נחפש $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ כך ש $M\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=i\omega\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

ומכאן ש: $\begin{pmatrix}\omega B\\-\omega A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\omega A\\i\omega B\end{pmatrix}$

יש לנו חופש בבחירת הגודל של הו"ע, נקח $A=1$ ונקבל $B=i$

$\Leftarrow$ הו"ע הוא: $\begin{pmatrix}\tilde x\\\tilde p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$.

נחזיר את היחידות ונקבל שהו"ע הוא $a=x+\frac{i}{m\omega}p$

באותו אופן עבור $\lambda=-i\omega$ נקבל $\begin{pmatrix}\tilde x\\\tilde p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $a^*=x-\frac{i}{m\omega}p$

מש' התנועה של a היא "מלוכסנת": $\frac{da}{dt}=-i\omega a$

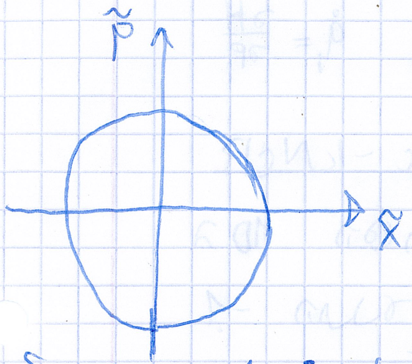
וכך גם עבור a^*: $\frac{da^*}{dt}=i\omega a^*$.

a,a^* יקבלו משוואות מיוחדות בדיון בבעיה המקבילה בתורת הקוונטים.

במרחב הפאזה המסלול יהיה מעגלי אם נעבוד עם $\tilde{x},\tilde{p}$ (מנורמל)

עם x,p (הרגילים) נשמר ש $E=\frac{1}{2}K\tilde{x}^2+\frac{1}{2}K\tilde{p}^2=const$

⇐ מעגל ברדיוס $\sqrt{\frac{2E}{K}}$ סביב הראשית:



דוגמא - חלקיק בשדה א"מ

הלגרנז'יאן של חלקיק בשדה א"מ נתון ע"י $L=\frac{1}{2}mv^2-q(\varphi-\vec{A}\cdot\vec{v}\frac{1}{c})$ (תרגיל 3)

כאשר φ הפוטנציאל החשמלי ו-$\vec{A}$ וקטור הפוטנציאל המגנטי. נכתוב מחדש את L בתור: $L=\sum_i\left[\frac{1}{2}mv_i^2-q(\varphi\frac{1}{3}-\frac{1}{c}A_iv_i)\right]$ ומכאן ש $p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=mv_i+\frac{q}{c}A_i$

ובכתיב וקטורי $\vec{p}=m\vec{v}+\frac{q}{c}\vec{A}$. נעבור מלגרנז'יאן להמילטוניאן:

$$H=\sum_i p_iv_i-L=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=(m\vec{v}+\frac{q}{c}\vec{A})\cdot\vec{v}-\left[\frac{1}{2}m\vec{v}^2-q(\varphi-\frac{1}{c}\vec{A}\cdot\vec{v})\right]=\frac{1}{2}m\vec{v}^2+q\varphi$$

נציב $\vec{p}$ במקום $\vec{v}$ ונקבל:

$$H=\frac{(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m}+q\varphi$$

נשים-לב ש H נשמר אם $\vec{A}$ ו-φ לא תלויים בזמן.

* נקבל את מש' התנועה עבור המקרה $\varphi=0$, $\vec{A}=-\frac{B}{2}y\hat{x}+\frac{B}{2}x\hat{y}$

(כאשר B גודל השדה המגנטי). נכתוב את H במפורש, ונשתמש בגודל $\omega_c=\frac{qB}{mc}$:

$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{1}{2}\omega_c(xp_y-yp_x)+\frac{1}{8}m\omega_c^2(x^2+y^2)$. מש' המילטון יהיו:

$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}+\frac{1}{2}\omega_c y$ (1) $\qquad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\omega_c}{2}p_y-\frac{m}{4}\omega_c^2 x$ (4)

$\dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}-\frac{1}{2}\omega_c x$ (2) $\qquad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{\omega_c}{2}p_x-\frac{m}{4}\omega_c^2 y$ (5)

$\dot{z}=\frac{\partial H}{\partial p_z}=\frac{p_z}{m}$ (3) $\qquad \dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=0$ (6)

התנועה בציר z ברורה: (6) ⇐ $p_z=const$ ⇐ $z=z_0+\frac{p_z}{m}t$.

עלינו לפתור את מש' התנועה במישור xy, נרשום את מש' התנע כעת:

$\dot{p}_x=\frac{m\omega_c}{2}\left[\frac{p_y}{m}-\frac{\omega_c}{2}x\right]=\frac{m\omega_c}{2}\dot{y}$ (א) $\qquad \dot{p}_y=\frac{m\omega_c}{2}\left[-\frac{p_x}{m}+\frac{\omega_c}{2}y\right]=-\frac{m\omega_c}{2}\dot{x}$ (ב)

נגזור את (1), (2) לפי t: $\dot{x}=\frac{1}{m}\dot{p}_x+\frac{\omega_c}{2}\dot{y}\underset{\text{הצבת (א)}}{=}\omega_c\dot{y}$ $\qquad \dot{y}=\frac{\dot{p}_y}{m}-\frac{\omega_c}{2}\dot{x}\underset{\text{הצבת (ב)}}{=}-\omega_c\dot{x}$

נגזור את המש' ל $\dot{y}$ לפי t ונקבל: $\dddot{y}=-\omega_c\ddot{x}$, נציב במש' ל $\ddot{x}$

נקבל $\dddot{y}+\omega_c^2\dot{y}=0 \Rightarrow \dot{y}=C\cos(\omega_c t+\varphi) \Rightarrow \dot{x}=\frac{-\ddot{y}}{\omega_c}=C\sin(\omega_c t+\varphi)$

ומכאן ש $y=\int\dot{y}\,dt=\frac{C}{\omega_c}\sin(\omega_c t+\varphi)+y_0$, $x=\int\dot{x}\,dt=\frac{-C}{\omega_c}\cos(\omega_c t+\varphi)+x_0$

כלומר האלק' מבצע תנועה מעגלית במישור xy בזמן שהוא מתקדם בציר z במהירות קבועה (תנועת "בורג").

<u>שאלה 1 - מועד א' תשס"ז</u>

לגרנז'יאן $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}-V(x)$ מתאר תנועה יחסותית חד-ממדית של מסה m בהשפעת כח משמר, כאשר $V(x)$ הפוטנציאל ! C מהירות האור.

א: מצאו את ההמילטוניאן בבעיה.

ב: כתבו את מש' המילטון למקרה של כח כובד קבוע: $V=mgx$ ופתרו את המשוואות עבור מסה הנמצאת במנוחה $x(0)=\dot{x}(0)=0$.

<u>פתרון</u>

א.
$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=-\frac{1}{2}mc^2\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(-\frac{2\dot{x}}{c^2}\right)=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}\equiv\gamma m\dot{x}$$

$$H=p\dot{x}-L=\frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}+mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}+V(x)=\frac{m\dot{x}^2+mc^2-m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}+V(x)$$
$$=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}+V(x)=\gamma mc^2+V(x)$$

נרצה לבטא את המומנטום של p. מהגדרת p: $p=\gamma m\dot{x}$

ולכן $p^2=\frac{m^2\dot{x}^2}{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \Rightarrow p^2-\frac{p^2}{c^2}\dot{x}^2=m^2\dot{x}^2 \Rightarrow \dot{x}^2\left(m^2+\frac{p^2}{c^2}\right)=p^2$

$\Rightarrow \dot{x}^2=\frac{p^2c^2}{m^2c^2+p^2} \Rightarrow \dot{x}=\frac{pc}{\sqrt{m^2c^2+p^2}}$ (*). נציב חזרה ל H ונקבל:

$$H=\frac{p}{m\dot{x}}mc^2+V(x)=c\sqrt{m^2c^2+p^2}+V(x)=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}+V(x)$$

ב: עבור $V=mgx$, מש' המילטון יהיו:

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-mg \quad (1) \qquad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{1}{2}\cdot 2pc^2(m^2c^4+p^2c^2)^{-1/2} \quad (2)$$

ממש' (1) נקבל $p(t)=-mgt+p(0)$. הואיל ! $\dot{x}(0)=0$ אז מ (*)

נובע ש $p(0)=0$ ולכן $p(t)=-mgt$. נציב במש' (2) ונקבל:

$$\dot{x}=-mgtc^2(m^2c^4+m^2g^2t^2c^2)^{-1/2}=-gtc(c^2+g^2t^2)^{-1/2}$$
$$=-gt\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$
$$\rightarrow x=\int -gt\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{-1/2}dt=-\frac{c^2}{g}\int\frac{\frac{g}{c}t}{\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{g}{c}\,dt$$

נעבור משתנה ל $y=\frac{g}{c}t$ ונקבל:

$$x(t) = -\frac{c^2}{g}\int \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{1/2}} = -\frac{c^2}{g}(1+y^2)^{1/2} + \text{Const} = -\frac{c^2}{g}\left(1+\frac{g^2t^2}{c^2}\right)^{1/2} + \text{const}$$

מכך ש $x(0)=0$ נקבל $-\frac{c^2}{g}+\text{const}=0 \Leftarrow \text{Const}=\frac{c^2}{g}$

ובסה"כ נקבל ש: $x(t)=-\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}+\frac{c^2}{g}$

נסתכל על התוצאה בשני גבולות:

עבור $\frac{gt}{c}\ll 1$ נפתח בטור טיילור ונקבל:

$$x(t)\cong -\frac{c^2}{g}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right)+\frac{c^2}{g} = -\frac{1}{2}gt^2$$

כפי שציפינו קיבלנו את המקרה הקלאסי (כלומר לא יחסותי) של תאוצה קבועה.

לחלופין, עבור $\frac{gt}{c}\gg 1$, x לא יכול להמשיך ולגדול ריבועית בזמן, אלא $x(t)\approx -\frac{c^2}{g}\sqrt{\frac{g^2t^2}{c^2}} = -ct$

המיקום מתקרב אסימפטוטית ל $x=-ct$ שמשמעותו התקדמות במהירות האור. קיבלנו את התוצאה המוכרת שגם אם ממשיכים להפעיל את הכוח לאורך זמן רב הגוף לא מצליח לעבור (ואף להגיע) למהירות האור.