משוואת ולאסוב

בקורס דיברנו על משוואות הנוזל המתארות פלזמה. התחלנו ממשוואת קלימונטוביץ' שמתארת את החלקיקים המדויקים במרחב הפאזה אך משוואה זו מכילה סינגולריות וקשה לפתרון ולכן עשינו מיצוע על נפחים קטנים במרחב הפאזה וקיבלנו את משוואת ולאסוב: $\frac{\partial f_s}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r)f_s+(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}_v)f_s=0$.

כשהפונקציה $f_s=f_s(\vec{r},\vec{v},t)$ היא התפלגות החלקיקים מסוג s במרחב הפאזה.

בנוכחות שדות $\vec{E},\vec{B}$, התאוצה $\vec{a}$ היא $\vec{a}_s=\frac{q_s}{m_s}\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$

• ניתן להציג את המערכת ע"י ולאסוב ולקבל משוואה ל-f שנוכל לפתור בהינתן $\vec{E}$, $\vec{B}$.

* כפי שראינו בהרצאה, עפ"י ולאסוב נשמרת הצפיפות לאורך מסלול של פונקציית ההתפלגות במרחב הפאזה: $\frac{df_s}{dt}=0$. מכך נסיק שאם $\{C_i\}$ הם קבועי תנועה אז $\frac{df_s}{dt}=\sum_i\frac{\partial f_s}{\partial C_i}\dot{C}_i=0$ ולכן: כל פונקציה של קבועי תנועה בלבד היא גם פתרון של ולאסוב.

תרגיל

נניח חלקיק עם מטען q הנע בהשפעת פוטנציאל $\phi(\vec{r})$ ושדה מגנטי $\vec{B}$ קבועים בזמן. האנרגיה של החלקיק: $E=\frac{1}{2}mv^2+q\phi(\vec{r})$ נשארת קבועה ולכן נבדוק שפונק' מקסוול-בולצמן: $f(\vec{r},\vec{v})=A\exp\left[-\frac{\frac{1}{2}mv^2+q\phi(\vec{r})}{k_BT}\right]$ שהיא פונק' של קבוע תנועה, תהיה פתרון של משוואת ולאסוב.

נראה את הטענה:

א: ראשית, ברור ש: $\frac{\partial f}{\partial t}=0$

ב: $\vec{\nabla}_r f=\frac{q}{k_BT}\overbrace{(-\vec{\nabla}_r\phi)}^{\vec{E}}f=\frac{q\vec{E}}{k_BT}f$

ג: $\vec{\nabla}_v f=-\frac{m\vec{v}}{k_BT}f$

ד: נציב הכל במש' ולאסוב:

$$0+\frac{qf}{k_BT}\vec{v}\cdot\vec{E}+\frac{q}{m}\left(\vec{E}+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\left(-\frac{m\vec{v}}{k_BT}f\right)=$$

$$=\frac{qf}{k_BT}\vec{v}\cdot\vec{E}-\frac{qf}{k_BT}\vec{v}\cdot\vec{E}-\frac{qf}{ck_BT}\underline{(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}=0$$

כלומר קיבלנו ש $\frac{df}{dt}=0$ ולכן (כי $\vec{v}\times\vec{B}$ ניצב ל $\vec{v}$)

f המתוארת ע"י פונק' בולצמן היא אכן פתרון של ולאסוב כפי שציפינו מראש.

תרגיל 2 - גרביטציה

התאוצה $\vec{a}$ לא חייבת לנבוע מכח לורנץ. ע"י ולאסוב אפשר גם לתאר תנועות של כוכבים בגלקסיה, התנגשויות בין כוכבים הן נדירות כמו בפלזמה.

האופק המשוב הוא המשוואות הקלסיות. בהינתן הפוטנציאל החיצוני $\phi(\vec{r})$
אפשר לרשום מש' ולסוב לכוכבים בגלקסיה:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_r f-\underbrace{\frac{(\vec{\nabla}_r\phi)}{m}}_{a}\cdot\vec{\nabla}_v f=0$$

במקרה זה,
$n(\vec{r},t)=\int f(\vec{r},\vec{v},t)\,d^3\vec{v}$ הוא הצפיפות המספרית של כוכבים
והמהירות הממוצעת שלהם הוא: $\langle\vec{v}\rangle=\int f(\vec{r},\vec{v},t)\,\vec{v}\,d^3\vec{v}$.

תרגיל 3- אנטרופיה

האנטרופיה של התפלגות חלקיקים: $f(v,x)$ עם מטען q נתונה ע"י:

$$S'=-\int dx\int dv\, f(x,v)\ln f(x,v)\,.$$

הראה כי הדרישה ש-S אקסטרמלי תחת ההגבלות שמס' החלקיקים והאנרגיה הכללית, נשמרים, מובילה להתפלגות מקסוול בולצמן משוואה 1.

פתרון: מס' החלקיקים נתון ע"י: $N=\int dx\int dv\, f$

האנרגיה הכללית נתונה ע"י: $E=\int dx\int dv\left(\frac{1}{2}mv^2+q\phi\right)f$

נדרוש מקסימום תחת האילוצים ש N ו E קבועים. לשם-כך נגדיר $\hat{S}$ עם כופלי לגרנג':

$$\hat{S}=S+\left(\int dx\int dv f-N\right)\lambda_N+\left(\int dx\int dv\left(\tfrac{1}{2}mv^2+q\phi\right)f-E\right)\lambda_E=-\int dx\int dv\, f\ln f+\lambda_N\int dx\int dv\, f-\lambda_N N$$
$$+\lambda_E\int dx\int dv\left(\tfrac{1}{2}mv^2+q\phi\right)f-\lambda_E E=\int dx\int dv\left[-f\ln f+\lambda_N f+\lambda_E\left(\tfrac{1}{2}mv^2+q\phi\right)f\right]-\lambda_N N-\lambda_E E$$

נקח וריאציה לפי f ונדרוש התאפסות (כי $\hat{S}$ במקסימום)

$$\frac{\partial\hat{S}}{\partial f}=\int dx\int dv\left[-\ln f-1+\lambda_N+\lambda_E\left(\tfrac{1}{2}mv^2+q\phi\right)\right]=0$$

מכאן ש: $\ln f=\lambda_N-1+\lambda_E\left(\frac{1}{2}mv^2+q\phi\right)$ $\leftarrow$ $\underline{f=e^{\lambda_N-1}e^{\lambda_E\left(\frac{1}{2}mv^2+q\phi\right)}}$

נקבל בדיוק התפלגות מקסוול-בולצמן עבור $\lambda_E=-\frac{1}{T}$, $e^{\lambda_N-1}=\frac{n_0}{(2\pi k_BT/m)^{3/2}}$

תרגיל 4- סימטריה גלילית

לבעיה בעלת סימטריה גלילית יש פונק' התפלגות f התלויה בשני קבועי התנועה
H ו- p_θ (כאשר p_θ התנע הקנוני הזוויתי לθ: $\left(p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=r\left(mv_\theta+\frac{qA_\theta}{c}\right)\right)$:

$$f=\frac{n_0}{(2\pi k_BT/m)^{3/2}}\exp\left[-\frac{H-\lambda p_\theta}{k_BT}\right]$$

כאשר T,λ,n_0 כולם קבועים ! ו- $A_\theta(r)$ יוצר שדה מגנטי קבוע. מצא ביטויים
עבור הצפיפות וקצב הסיבוב כפונקציה של r.

פתרון: איזה שדה נוצר ע"י וקטור פוטנציאל עם רכיב A_θ בלבד ?

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\hat{\theta}A_\theta(r)=\begin{vmatrix}\frac{\hat{r}}{r} & \hat{\theta} & \frac{\hat{z}}{r}\\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z\\ 0 & rA_\theta(r) & 0\end{vmatrix}=\frac{\hat{z}}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta(r)\right)-0\right)\equiv B_z\hat{z}$$

כלומר השדה המגנטי הוא בכיוון $\hat{z}$ ואחיד, ע"מ שהוא יהיה קבוע, על $A_\theta(r)$ להיות לינארי ב-r או ליתר דיוק: $A_\theta(r)=\frac{rB_z}{2}$

כעת נרשום את f כ:

$$f=\frac{n_0}{(2\pi k_BT/m)^{3/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_BT}}\, e^{\lambda\left(mv_\theta+\frac{qB_z r}{2c}\right)r\frac{1}{k_BT}}$$

כאשר $v^2=v_r^2+v_\theta^2+v_z^2$, ע"מ לחשב את הצפיפות יש לחשב את: $\int f\,d^3\vec{v}$.

האינטגרלים על v_r ו-v_z הם אינטגרלים גאוסיים רגילים. נתבונן על v_θ:

האיבר של v_θ באקספ' ניתן לכתיבה כריבוע שלם שנותן את ההתפלגות הדרושה-

$$-\frac{1}{2}m\frac{v_\theta^2}{k_BT}+\frac{\lambda r m v_\theta}{k_BT}=-\frac{1}{2}\frac{m}{k_BT}(v_\theta-U_\theta)^2+\frac{1}{2}\frac{mU_\theta^2}{k_BT}$$

עבור $U_\theta\equiv\lambda r$. לכן:

$$n(r)=\int f\,d^3\vec{v}=n_0\frac{1}{(2\pi k_BT/m)^{3/2}}\int e^{-\frac{mv_r^2}{2k_BT}}dv_r\int e^{-\frac{mv_z^2}{2k_BT}}dv_z\int e^{-\frac{m(v_\theta-U_\theta)^2}{2k_BT}}dv_\theta\; e^{\frac{\lambda qB_z r^2}{2c}}\, e^{\frac{m\lambda^2r^2}{2k_BT}}=$$

$$=\underline{n_0\, e^{\frac{m}{2k_BT}r^2\lambda(\lambda+\Omega)}}$$

כאשר $\Omega\equiv\frac{qB_z}{mc}$ = תדירות הציקלוטרון.

נותר רק למצוא את תדירות הסיבוב:

$$\omega=\frac{1}{r}\frac{1}{n}\int d^3v\, v_\theta f$$

זה חישוב דומה לאינטגרל הקודם פרט לאיבר של v_θ, עבורו נקבל אינטגרל:

$$\int v_\theta\, e^{-\frac{m(v_\theta-U_\theta)^2}{2k_BT}}dv_\theta=\int(v_\theta-U_\theta)\,e^{-\frac{m(v_\theta-U_\theta)^2}{2k_BT}}dv_\theta+\int U_\theta\, e^{-\frac{m(v_\theta-U_\theta)^2}{2k_BT}}dv_\theta$$

האינטגרל השני הוא אינטגרל גאוסי רגיל ונותן: $U_\theta\sqrt{\frac{2\pi k_BT}{m}}$, ע"מ לפתור את האינטגרל הראשון נכפול ונחלק ב: $\sqrt{\frac{m}{2k_BT}}$ ונסמן $\sqrt{\frac{m(v_\theta-U_\theta)^2}{2k_BT}}=t$ ואז נקבל אינטגרל מהצורה:

$$\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,e^{-t^2}dt=0$$

(אינטגרל על פונקציה אי-זוגית בתחום סימטרי)

נציב הכל בחזרה ל-ω ונקבל $\underline{\omega=\lambda}$.

כלומר הצפיפות שמצאנו מבטאת את ההתפלגות שבה המגנט מסובב את הפלזמה כגוף קשיח.