מכניקה אנליטית - תרגול 6

1 אלימינציה של קואורדינטות ציקליות

כאשר יש בבעיה קואורדינטה ציקלית אחת או יותר, לעתים נרצה לכתוב פעולה חדשה (או, באופן שקול, לגראנז'יאן חדש) אשר לא כולל את הקואורדינטות הללו, וממנו לקבל את משוואות התנועה עבור הקואורדינטות האחרות. בהינתן קואורדינטה ציקלית q_i ותנע שמור

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

לא נוכל פשוט להציב בלגראנז'יאן את הביטוי ל־$\dot{q}_i$ המתקבל ממשוואה זו.
כדי לבצע נכון את האלימינציה, עלינו לבצע טרנספורם לז'נדר ללגראנז'יאן.

טרנספורם לג'נדר: תזכורת

בהינתן פונקציה של כמה משתנים, טרנספורם לג'נדר משמש להחלפת התלות באחד או יותר מהמשתנים לתלות בנגזרות לפי אותם משתנים. למשל, עבור $f = f(x, y)$, נגדיר $u = \frac{\partial f}{\partial y}$.
ע"י המשוואה הזו נבטא $y = y(x, u)$. טרנספורם לג'נדר של f הוא הפונקציה:

$$g(x, u) = f(x, y(x, u)) - u \cdot y(x, u)$$

הדיפרנציאל של f:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

של g:

$$dg = df - udy - ydu = \frac{\partial f}{\partial x}dx + udy - udy - ydu = \frac{\partial f}{\partial x}dx - ydu$$

כלומר, קיבלנו:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -y$$

עברנו מתיאור לפי x, y לתיאור לפי x, u ותפקידי y, u התחלפו.
המוטיבציה לביצוע טרנס' לג'נדר משתנה מתחום לתחום - בתרמודינמיקה משתמשים בו למעבר בין הפוטנציאלים התרמודינמיים השונים, כדי שנוכל לעבוד במשתנים הטבעיים של הבעיה (נפח קבוע, לחץ קבוע...). בהקשר שלנו, ניתן להשתמש בו כדי להיפתר מקואורדינטות ציקליות ברמת הפעולה.

טרנספורם לג'נדר ביחס לתנע של קואורדינטה ציקלית

נחזור למצב שתיארנו בהתחלה. נגדיר לגראנז'יאן אפקטיבי:

$$L^* = L - p_i \cdot \dot{q}_i$$

כאשר q_i ציקלית, ואת $\dot{q}_i$ הבענו באמצעות p_i וע"י כל שאר הקואורדינטות והמהירויות. מ־L^* יתקבלו משוואות התנועה הנכונות עבור הקואורדינטות שנשארו.

הערה: ניתן לבצע את התהליך עבור יותר מקואורדינטה ציקלית אחת: נניח ש־ $q_1, ..., q_k$ קואורדינטות ציקליות.

$$L^* = L - \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \dot{q}_i$$

כאשר אנחנו מביעים את כל אחת מהמהירויות $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_k$ באמצעות הקואורדינטות הלא ציקליות ונגזרותיהן לפי הזמן, באמצעות סט המשוואות

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

עבור $i = 1, ..., k$.

דוגמא: מטוטלת ספרית

נתונה מטוטלת ספרית עם אורך חוט R. ע"י טרנספורם לג'נדר קבלו לגראנז'יאן אפקטיבי לבעייה. ע"י אנלוגיה לבעיה חד מימדית עם בור פוטנציאל, מצאו את הפוטנציאל האפקטיבי וחקרו את התנועה.

- כתבו משוואה לזווית θ (הזווית ביחס לציר z) עבורה מתקיימת תנועה מעגלית מאוזנת.
- כתבו משוואה אינטגרלית עבור זמן המחזור של התנועה.

פתרון: הלגראנז'יאן (θ נבחרת כך שהקוטב הצפוני נמצא ב־ $\theta = 0$):

$$L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right) - mgR \cdot cos(\theta)$$

כאן ϕ הינה קואורדינטה ציקלית.

$$p_\phi = mR^2 sin^2(\theta)\dot{\phi} \rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2 sin^2(\theta)}$$

נניח במקרה זה ש־$p_\phi \neq 0$. נכתוב את L^*:

$$L^* = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{m^2R^4 sin^2(\theta)}\right) - mgR \cdot cos(\theta) - p_\phi \cdot \frac{p_\phi}{mR^2 sin^2(\theta)} =$$

$$= \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{p_\phi^2}{2mR^2 sin^2(\theta)} - mgR \cdot cos(\theta)$$

לגראנז'יאן זה שקול לתנועה חד מימדית בבור פוטנציאל אפקטיבי

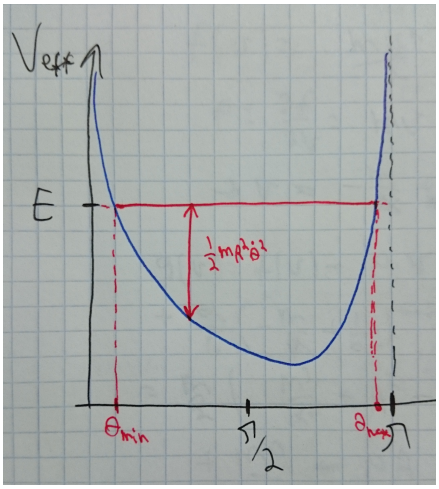
$$V_{eff}(\theta) = \frac{p_\phi^2}{2mR^2 sin^2(\theta)} + mgR \cdot cos(\theta)$$

כאשר האנרגיה הקינטית היא

$$T_{eff} = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

משוואת התנועה ל θתהיה:

$$mR^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial V_{eff}(\theta)}{\partial\theta}$$



לפוטנציאל יש נקודת מינימום בטווח שבין $\theta = 0$ ו־ $\theta = \pi$. נכתוב משוואה למיקום המינימום:

$$\frac{dV_{eff}}{d\theta} = -mgR \cdot sin(\theta) - \frac{p_\phi^2 cos(\theta)}{mR^2 sin^3(\theta)}$$

נשים לב שהמינימום נמצא ב־ $\theta \geq \pi/2$. זאת ניתן לראות מכך שהנגזרת שקיבלנו היא שלילית ב־$\pi/2$, ומתאפסת שם במקרה בו אין כבידה (הגיוני ־ ללא כבידה המסה פשוט עושה מעגלים גדולים לפי כיוון המהירות ההתחלתית). זה הגיוני ששיווי המשקל יהיה בזווית גדולה מ־ $\pi/2$, כי יש צורך ברכיב של המתיחות שיקזז את כח המשיכה.
משוואה למיקום המינימום:

$$0 = -mgR \cdot sin^4(\theta) - \frac{p_\phi^2 cos(\theta)}{mR^2} \rightarrow sin^3(\theta)tan(\theta) = -\frac{p_\phi^2}{m^2 gR^3}$$

בנקודה זו ישנו מסלול מעגלי עם מסלול בו θקבועה.
על מנת למצוא משוואה לזמן המחזור בבעיה, נכתוב את האנרגיה המכנית של המערכת, שהינה שמורה (שווה ל־h, והלגראנז'יאן לא תלוי בזמן):

$$E = \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2mR^2 sin^2(\theta)} + mgR \cdot cos(\theta)$$

שימו לב שהאנרגיה שווה ל־$T+V$ מהבעיה המקורית, וכן ל־$T_{eff}+V_{eff}$ בבעיה המצומצמת.
מכאן:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2E}{mR^2} - \frac{p_\phi^2}{m^2R^4sin^2(\theta)} - \frac{2g}{R}\cdot cos(\theta)}$$

וזמן המחזור:

$$T = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} d\theta \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{mR^2} - \frac{p_\phi^2}{m^2R^4sin^2(\theta)} - \frac{2g}{R}\cdot cos(\theta)}}$$

את $\theta_{min},\ \theta_{max}$ מוצאים ע"י פתרון המשוואה

$$E = \frac{p_\phi^2}{2mR^2sin^2(\theta)} + mgR\cdot cos(\theta)$$

אלו הנקודות בהן האנרגיה הקינטית האפקטיבית מתאפסת.
נזכיר: $E,\ p_\phi$ נקבעים מתנאי ההתחלה.

כופלי לגראנז'

נניח שרוצים למצוא נקודת אקסטרמום של הפונקציה $f(\bar{x})$ תחת האילוץ $g(\bar{x}) = c$. נחשוב על קווי הגובה של f: בנקודות בהן קווי הגובה של f חוצים את קו הגובה $g(\bar{x}) = c$, הערך של f משתנה - במהלך תנועה לאורך קו הגובה $g(\bar{x}) = c$ f עולה או יורדת. הנקודה היחידה בה זה לא קורה היא כאשר קו גובה של f משיק לקו הגובה $g(\bar{x}) = c$, שם f לא עולה או יורדת, ולכן נקודת ההשקה הזו תהיה הנקודה אותה אנחנו מחפשים. שם מתקיים:

$$\bar{\nabla} f = \lambda \bar{\nabla} g$$

או בצורה אחרת: נגדיר פונקציה חדשה:

$$L(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \lambda(g(\bar{x}) - c)$$

כלומר, הפחתנו מ-f את האילוץ כפול קבוע לא ידוע כלשהו. כעת, $\bar{\nabla} L = 0$ היא המשוואה שלנו. ממנה נקבל $\bar{x}(\lambda)$, ואז נוכל למצוא את λע"י הצבה באילוץ.

דוגמא:

מצא את המינימום של הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$ תחת האילוץ $x + y = 5$ (המינימום של חיתוך של המישור $x + y = 5$ עם הפרבולואיד $f(x,y) = x^2 + y^2$).

פתרון:

נגדיר $L = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 5)$, ונדרוש $\bar{\nabla} L = 0$:

$$2x - \lambda = 0 \qquad 2y - \lambda = 0$$

קיבלנו $x = y = \frac{\lambda}{2}$. מהצבה במשוואת האילוץ נקבל $\lambda = 5$. (אינטואיציה: המישור המדובר ניצב לוקטור $(1,1)$, ולכן צפוי שהנקודה המבוקשת תקיים $x = y$, ומכאן האילוץ דורש ש- $x = y = 2.5$).

באופן דומה, אם מחפשים פונקציה $y(x)$ עבורה הפונקציונל $S[y] = \int \mathcal{L}(y, y', x)dx$ אקסטרמלי, תחת האילוץ $\int g(y, y', x)dx = C$, אז מגדירים פונקציונל חדש $\tilde{S}[y] = \int (\mathcal{L}(y, y', x) - \lambda(g(y, y', x) - \tilde{C})dx$ ($\tilde{C}$ הוא הקבוע C חלקי אורך קטע האינטגרציה) ומחשבים את האקסטרמום שלו ע"י חשבון וריאציות. נגדיר $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(y, y', x) - \lambda\left(g(y, y', x) - \tilde{C}\right)$, כך ש- $\tilde{S}[y] = \int \tilde{\mathcal{L}}(y, y', x)dx$. כמו שראיתם בשעור, $\tilde{S}$ תהיה אקסטרמילית עבור $y(x)$ אשר מקיימת את משוואת אוילר- לגראנז': $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y'}\right) = 0$.

דוגמא 2: מצאו את הצורה (הפו"ג) של חבל באורך $2L$ שנתלה בין $x=-a$, $y=0$ לבין $x=a$, $y=0$.

פתרון: נניח שהמסה הכללית של החבל היא M, ונסמן אלמנט מסה קטן בתור dm ואלמנט אורך קטן בתור ds.

מתקיים: $dm=\frac{M}{2L}ds$.

נסמן ב dU שינוי קטן באנרגיה הפוטנציאלית הנקבעת ממסה dm.

מתקיים:

$$dU=gy\,dm=gy\frac{M}{2L}ds=gy\frac{M}{2L}\sqrt{dx^2+dy^2}=gy\frac{M}{2L}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

האנרגיה הכוללת תהיה:

$$U=\int_{-a}^{a}\frac{gM}{2L}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

יש לנו אילוץ שאורך החבל קבוע $=2L$ ולכן:

$$\int_{-a}^{a}ds=2L\to\int_{-a}^{a}\sqrt{dx^2+dy^2}=2L\to\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx-2L=0\to\int_{-a}^{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-\frac{L}{a}\right)dx=0$$

עלינו למצוא מינימיזציה לאנרגיה בהנתן האילוץ ולכן:

$$\delta\underbrace{\int_{-a}^{a}\left[\frac{gM}{2L}y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\lambda\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}-\frac{L}{a}\right)\right]dx}_{G}=0$$

$$\to\frac{gM}{2L}\delta\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+y'^2}+\tilde{\lambda}\left(\sqrt{1+y'^2}-\frac{L}{a}\right)dx=0,\qquad \tilde{\lambda}=\frac{2L\lambda}{gM}$$

נוכיח בע"ה אנלוגיה להתאפסות הוריאציה של הפעולה שהיא האינטגרל של הלגרנז'יאן.

בקיצור, ראינו כי אם $S=\int L(q,\dot q,t)dt$ אז $\delta S=0$ ⇐ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$ (EL). אנלוגיה נוכל להמיר בין הבעיות:

אנלוגיה		מכניקה
G	↔	S
y,y'	↔	$q,\dot q$
x	↔	t

עתה:

לכן $\delta G=0$ ⇐ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$

(עבור F שהוא האינטגרנד של G).

היות ו F בת"ל ב x אז נקבל שניתן לכתוב את משוואת EL בצורה: $F-y'\frac{dF}{dy'}=C$ (נוכיח בלמה)

הוכחת הטענה:

$$\frac{dF(x,y',y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''+\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\to\frac{\partial F}{\partial y}y'=\frac{dF}{dx}-\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial x}\qquad(*)$$

מצד שני, נכפול את EL ב y' לקבל: $y'\frac{\partial F}{\partial y}-y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$

נציב את (*) ונקבל: $\frac{dF}{dx}-\frac{\partial F}{\partial y'}y''-\frac{\partial F}{\partial x}-y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$