מכניקה אנליטית תרגול 5

חוקי שימור

אם המערכת אינווריאנטית להזזות בזמן $t \to t+\delta t$ אז $\frac{\partial L}{\partial t}=0$.
בשבוע שעבר ראינו שאז פונק' האנרגיה $h=\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$ נשמרת.

* מתי פונק' האנרגיה שווה לאנרגיה?

מצד אחד $E=T+U$

ומצד שני $h=\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - T + U$

ולכן נצטרך לקיים ש $\boxed{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 2T}$.

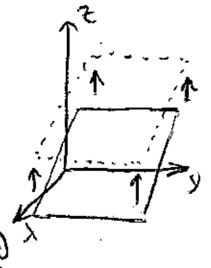
- בגלל רק האנרגיה הקינטית מכילה $\dot{q}_i$ ולכן רק שם מקבלת תרומה ל $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. לכן, צורה כללית של מצב בהן פונק' האנרגיה שווה לאנרגיה היא $T=T(\dot{q},q,t)=\frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ (כאשר $M_{ij}=f(q,t)$). במקרה זה נאמר שהאנרגיה הקינטית היא תבנית הומוגנית ריבועית (כלומר כזו שמקיימת: $(T^*(\lambda\dot{q}_1,\dots,\lambda\dot{q}_n)=\lambda^2 T(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n))$ והאנרגיה שווה לפונק' האנרגיה.

הסבר לכך הוא: משפט אוילר לפיו פונק' הומוגנית T מסדר α מקיימת: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\alpha T$. אצלנו: $\alpha=2$.

*הנחות $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ נשמרת כל עוד טרנס' הקואור' לא תלויה מפורשות בזמן.

<u>מסקנות</u>:
1. אם אין תלות מפורשת בזמן של הלגרנז'יאן אז פונק' האנרגיה קבועה.
2. אם אין תלות מפורשת בזמן בטרנס' הקואור' אז $h=E$.
3. במידה ו 1 ו 2 מתקיימים אז האנרגיה נשמרת.

דוגמא: $h \neq E$



נתון חלקיק בעל מסה m המאולץ לנוע במישור $x+z=\alpha t$ (המישור עולה עם הזמן). מהי פונק' יעקובי ומהי האנרגיה בבעיה?

<u>פתרון</u>: נבחר קואור' מוכללות $q_1=y$, $q_2=z$.

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{m}{2}\left((\alpha-\dot{z})^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{y}^2+2\dot{z}^2-2\alpha\dot{z}+\alpha^2\right)$$

האיבריק $2\alpha\dot{z}$, α^2 גורמים לכך שT לא תבנית ריבועית הומוגנית של המהירויות ולכן $E\neq h$. זה נובע מכך שלגרנ' בקואור' תלויה ב t. נראה מפורשות את אי-השוויון:

$$E=T+U=\frac{m}{2}\left(\dot{y}^2+2\dot{z}^2-2\alpha\dot{z}+\alpha^2\right)+mgz$$

$$h=\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=$$

$$=m\dot{y}^2+(2m\dot{z}-m\alpha)\dot{z}-\frac{m}{2}\left(\dot{y}^2+2\dot{z}^2-2\alpha\dot{z}+\alpha^2\right)+mgz=$$
$$=\frac{m}{2}\dot{y}^2+m\dot{z}^2-\frac{m}{2}\alpha^2+mgz$$

היות והלגרנז'יאן לא תלוי מפורשות בזמן אז $h=const$. נשמרת, בשונה מ $E\neq h$.

• לו נבחר שתי קואורדינטות אחרות: y,x (והטרנספורמציה תהיה $z=\alpha t-x$)

אז: $L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+2\dot{x}^2-\alpha\dot{x}+\alpha^2\right)-mg(\alpha t-x)$

כעת L תלוי מפורשות בt ולכן חוק' האנרגיה <u>לא שמורה</u>.

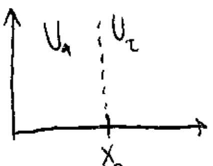
זו לא סתירה היות וחוק' האנרגיה (שימורה) הן תכונה של הקואור'.

* <u>הגדרה</u>: תנע מוכלל מוגדר כך: $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. נגדיר קואור' ציקלית כקואור' שמקיים $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ (L לא תלוי מפורשות ב q_i). במקרה זה:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}p_i=0 \Rightarrow p_i$ נשמר.

<u>דוגמא:</u>

נתון מישור שבחציו (עד x_0) יש פוטנציאל U_1 ובחציו השני פוטנציאל U_2.
מה השינוי במהירות החלקיק העובר מ U_1 לU_2?



<u>פתרון:</u> $\Delta T=-\Delta U$ ולכן $\frac{1}{2}m(V_2^2-V_1^2)=U_1-U_2$

$\Leftarrow$ $V_2=\sqrt{V_1^2+2\frac{U_1-U_2}{m}}$.

יש לנו סימטריה בכיוון ציר y (y קואור' ציקלית) ולכן $P_y=const$.

לכן:

$$P_y=\vec{P}\cdot\hat{y}=mv\sin\theta=const \Rightarrow V_1\sin\theta_1=V_2\sin\theta_2 \rightarrow \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{1+\frac{2(U_1-U_2)}{mV_1^2}}$$

זה נותן משוואה לθ_2 ולכן לV_2.

דוגמא 2: מגדירים מערכת ע"י הלגרנג'יאן $L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+\frac{eB}{2c}(x\dot y-y\dot x)$

א. הראו כי המערכת אינו' לטרנס' בזמן. מהו הגודל הנשמר המתאים?

ב. הראו כי המערכת אינו' לסיבובים סביב $\hat z$. מהו הגודל הנשמר המתאים?

ג. נגדיר $L^*=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+\frac{eB}{c}\dot y x$, הראו ש-$L$ ו-L^* שקולים.

ד. מצאו קבועי תנועה מרחביים הקשורים ל-z,y,x.

פתרון:

א. L לא תלוי מפורשות בזמן (ולכן לא משתנה תחת $t+\delta t\to t$). נובע מכך ש-h נשמר.

ב. יש להראות $L(\theta)=L(\theta+\delta\theta)$. נעבור לקואור' גליליות:

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$
$z=z$

$\Rightarrow$ $\dot x=\dot r\cos\theta-r\sin\theta\,\dot\theta$
$\dot y=\dot r\sin\theta+r\cos\theta\,\dot\theta$
$\dot z=\dot z$

לכן:

$$L=\frac{m}{2}(\dot r^2+(r\dot\theta)^2+\dot z^2)+\frac{eB}{2c}\Big(r\cos\theta(\cancel{\dot r\sin\theta}+r\dot\theta\cos\theta)-r\sin\theta(\cancel{\dot r\cos\theta}-r\dot\theta\sin\theta)\Big)=\frac{m}{2}(\dot r^2+(r\dot\theta)^2+\dot z^2)+\frac{eB}{2c}r^2\dot\theta$$

עכשיו אפשר לראות שאין תלות מפורשת ב-θ ולכן θ קואור' ציקלית ומתקיים $p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=const$. במקרה זה: $p_\theta=mr^2\dot\theta+\frac{eB}{2c}r^2$

ג. נעשה זאת ע"י כך שנראה ש-$L^*=L+\frac{df}{dt}$ עבור $f=f(q,t)$. לשם כך נמצא את ההפרש L^*-L:

$$L^*-L=\frac{eB}{c}\dot y x-\frac{eB}{2c}(x\dot y-y\dot x)=\frac{eB}{2c}(x\dot y+y\dot x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{eB}{2c}xy\right)$$

ולכן נקבל את הדרוש עבור $f=\frac{eB}{2c}xy$.

ד. היות ו-L לא תלוי מפורשות ב-z אז $\frac{\partial L}{\partial z}=0\Rightarrow$ סימטריה להזזה בציר z, ולכן $p_z=\frac{\partial L}{\partial\dot z}=m\dot z=const$.

היות ו-L^* שקול ל-L והוא לא תלוי ב-y אז $p^*_y=\frac{\partial L^*}{\partial\dot y}=m\dot y+\frac{eB}{c}x=const$

אפשר גם לקבל סימטריה בx ע"י הלגר' $L^{**}=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-\frac{eB}{2c}\dot x y$ שהוא שקול לשניים הקודמים, ונותן: $p_x=\frac{\partial L^{**}}{\partial\dot x}=m\dot x-\frac{eBy}{c}=const$.

דמיון מכאני

אם נכפול את L בקבוע, משוואות EL ישארו זהות. זה יאפשר להגיע למסקנות על התנועה בלי לפתור משוואות. מקרים מסוג זה הם מקרים בהם U פונקציה הומוגנית:

$U(\alpha\vec r_1,\dots,\alpha\vec r_N)=\alpha^k U(\vec r_1,\dots,\vec r_N)$.

נבצע מתיחה של קואורדינטות וזמן: $t\to\beta t$; $\vec r_i\to\alpha\vec r_i$

לכן: $\vec v_i=\frac{d\vec r_i}{dt}\to\frac{\alpha}{\beta}\vec v_i$.

נקבל ש: $T \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} T$ ו- $U \to \alpha^k U$. נרצה לקבוע
קבוע מלגרנז'יאן כולו ולכן נרצה שהקבוע שמכפיל את U יהיה
שווה לזה שמכפיל את T, כלומר: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k \Rightarrow \boxed{\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}}$.
וכעת $L \to \alpha^k L$ ולכן משוואות התנועה לא משתנות.

מסקנה: כאשר U פונקציה הומוגנית, אז קיימת סדרה של פתרונות דומים שעבורם $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$

יחס מרחקים אופייניים במסלולים יחס זמנים המאפיינים לשני מסלולים

בנוסף לכך: $\frac{v'}{v} = \frac{l'/t'}{l/t} = \left(\frac{l'}{l}\right)\left(\frac{t'}{t}\right)^{-1} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}$

הלגרנז'יאן הוכפל ב-α^k ולכן: $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k$

- למשל, עבור חלקיק במתנד הרמוני $U = x^2 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \beta = 1$.
נקבל שזמן המחזור לא תלוי באמפליטודה כי $\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{2}{2}} = 1$

- בגרביטציה $U \sim \frac{1}{r} \Rightarrow k=-1 \Rightarrow \frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}$ (החוק השלישי של קפלר).

דוגמה: שני חלקיקים זהים נעים במסלולים דומים בעלי רדיוס שונה בהשפעת פוטנציאל מהצורה $V \sim r^{-2}$. הוכיחו כי לשני החלקיקים אותו תנ"ז.
פתרון: נזכור ש $J \sim vl$ ולכן: $\frac{J'}{J} = \frac{v'}{v} \cdot \frac{l'}{l} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}} \underset{k=-2}{=} 1$

דוגמה: שני אלקטרונים בהשפעת כח קולון נעים סביב גרעין מסוים. זמן המחזור של אחד גדול פי 3 משני, מהו יחס האנרגיות?
פתרון: $\frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k = \left(\frac{t'}{t}\right)^{\frac{2k}{2-k}}$. לכח קולון $U \sim r^{-1} \Rightarrow k=-1$. נציב גם $\frac{t'}{t} = 3$ ונקבל:
$\frac{E'}{E} = 3^{-\frac{2}{2+1}} \approx 0.48$

(שאלה 2-ג)   מישור משופע על קרח   <u>שאלה 1</u>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{\xi}^2 + \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\xi}\cos\alpha\right) - mg\xi\sin\alpha$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ לכן x קואו' ציקלי

"התנע הכולל בכיוון x" $\Leftarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + m\dot{\xi}\cos\alpha = const = P$

$$\Leftarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{M+m}\left(P - m\dot{\xi}\cos\alpha\right)$$

עבור המשו' ξ

$$\left[\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = -mg\sin\alpha - \frac{d}{dt}m(\dot{\xi} + \dot{x}\cos\alpha) = \\ &= -mg\sin\alpha - m\frac{d}{dt}\left(\dot{\xi} + \cos\alpha\frac{1}{M+m}\left(P - m\dot{\xi}\cos\alpha\right)\right) \\ &= -mg\sin\alpha - m\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha\right)\ddot{\xi} \end{aligned}\right]$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\xi} = -g\sin\alpha\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha\right)^{-1} = -g\sin\alpha\frac{M+m}{M+m\sin^2\alpha} \Leftarrow$$

[בדיקה: גבול $m \ll M$ $\ddot{\xi} = -g\sin\alpha$]

נציב בחזרה במשו' x, עם לפי זמן $\dot{x}$

$$\longrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{m\cos\alpha}{M+m}\ddot{\xi} = g\sin\alpha\cos\alpha\frac{m}{M+m}\underbrace{\left(1 - \frac{m}{M+m}\cos^2\alpha\right)}_{\frac{M+m\sin^2\alpha}{M+m}}{}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}g\sin 2\alpha\frac{m}{M+m\sin^2\alpha}$$

<u>בדיקה</u> בצורה מטר' קיבלנו את המשוואות

$$\begin{bmatrix} M+m & m\cos\alpha \\ m\cos\alpha & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{m(M+m\sin^2\alpha)}\begin{bmatrix} m & -m\cos\alpha \\ -m\cos\alpha & M+m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -mg\sin\alpha \end{bmatrix} = \frac{g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}\begin{bmatrix} m\cos\alpha \\ -(M+m) \end{bmatrix}$$