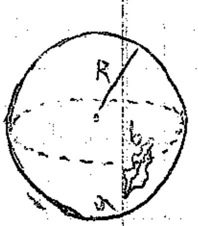
תרגול 4 - עקרון הוריאציה

דוגמא: חישוב המרחק הקצר ביותר על כדור



נקרא $R=1$. הקואורדינטות שלנו יהיו: φ,θ.

אלמנט האורך על פני כדור: $dl=\sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2}$

נחפש מסלול מהצורה $\varphi(\theta)$ (זו בחירה טבעית כי אלמנט האורך מכיל ביטויים עבור θ אך לא עבור φ). נסמן $\varphi'=\frac{d\varphi}{d\theta}$ ונקבל

$dl=\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2}\,d\theta$ ← $L=\int_a^b dl=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2}\,d\theta$ = אורך כולל

האורך הכולל הוא פונקציונל = פונקציה של פונקציות, $(\varphi(\theta))$.

כעת נקרא את המסלול האופטימלי $\varphi(\theta)$ ונוסיף לו תוספת כלשהי:

$\tilde\varphi(\theta)=\varphi(\theta)+\varepsilon\alpha(\theta)$. גם במסלול לא אופטימלי, נקודות הקצה הן אותן נקודות ולכן: $\tilde\varphi(\theta_a)=\varphi_a$, $\tilde\varphi(\theta_b)=\varphi_b$ ומכאן ש: $\alpha(\theta_a)=\alpha(\theta_b)=0$.

נדרוש שהמסלול אופטימלי ולכן: $\frac{dL}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0$. בניסוח שקול $\delta L=0$. כעת, בניסוח ש: $\delta(\tilde\varphi')=\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\tilde\varphi}{d\theta}\right)\Big|_{\varepsilon=0}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\tilde\varphi}{d\varepsilon}\right)\Big|_{\varepsilon=0}=(\delta\tilde\varphi)'$

החלפת סדר הגזירות

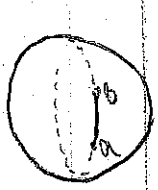
אם-כך:

$$\delta L=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\delta\left(\sqrt{1+\sin^2\theta\,\tilde\varphi'^2}\right)d\theta=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{\sin^2\theta\,\delta(\tilde\varphi')\,\tilde\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\tilde\varphi'^2}}d\theta=$$

$$=\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{\sin^2\theta\,\tilde\varphi'(\delta\tilde\varphi)'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\tilde\varphi'^2}}d\theta=\underbrace{\frac{\sin^2\theta\,\delta\tilde\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\tilde\varphi'^2}}\Bigg|_{\theta_a}^{\theta_b}}_{\text{זה אפס מפני ש-}\delta\tilde\varphi\text{ מתאפס ב-}\theta_b,\theta_a}-\int_{\theta_a}^{\theta_b}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\,\tilde\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\tilde\varphi'^2}}\right)\delta\tilde\varphi\, d\theta$$

אינטגרציה בחלקים עם $y'=(\delta\tilde\varphi)'$

על-מנת שהאינטגרל האחרון יתאפס עבור __כל__ $\tilde\varphi$ נצטרך לדרוש ש: $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\,\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2}}\right)=0$. זוהי מד"ר מסדר שני, שפתרונה מקיים כי $\frac{\sin^2\theta\,\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2}}=const$ (*). כדור הוא משטח הומוגני ולכן נוכל להגדיר כל נקודה כראשית. לפיכך, נגדיר את נק' תחילת המסלול כראשית: $(\theta_a,\varphi_a)=(0,0)$. נציב את התנאי ב-(*) ונקבל: $\frac{\sin^2\theta\,\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\,\varphi'^2}}=0$ ומכאן שהקבוע ב-(*) הוא 0. על מנת שזה יתקיים גם ל-$\theta\neq0$ אז צריך $\varphi'=0$, כלומר מסלולים שהם מקטעים של מעגלים ברדיוס R (=1).



בעיית הברכיסטוכרון ללא כלל שרשרת

נמצא את המסלול שמביא מינימיזציה לזמן הנפילה מנק' A לנק' B תחת שדה גרביטציה קבוע $\vec{g}$.

בשיעור בתרגיל הש"ה עשו מינימיזציה ל:

$$T=\int\frac{ds}{v}=\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}}\propto\int\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}}\,dt$$

ראינו בהרצאה כי מינימיזציה של פעולה מהצורה: $S=\int\sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j}=\int\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}}\,ds$ שקולה למינימיזציה של: $\tilde{S}=\frac{1}{2}\int g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\,ds$

עבור בעיית הברכיסטוכרון, שיקול זה מפשט מאוד את הפתרון.

נרשום: $\tilde{S}=\frac{1}{2}\int\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y}\,dt$ מינימיזציה ל-$\tilde{S}$ תיתן משוואות EL ל-x,y:

$$(1)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{y}\right)=0$$

$$(2)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2y^2}=0$$

מ-(1) נקבל $\frac{\dot{x}}{y}=const\equiv p_x$. ניתן להגדיר יחידות חדשות לזמן ובכך לבחור ש-$p_x=1$ ומכאן $\dot{x}=y$ [בכך עברנו לעבוד עם "זמן חסר יחידות"].

נציב ב-(2): $\frac{1}{2}+\frac{\dot{y}^2}{2y^2}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)=0$ נכפול ב-$\dot{y}$:

$$0=\frac{\dot{y}}{2}+\frac{\dot{y}^3}{2y^2}+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)=\frac{\dot{y}}{2}+\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}y\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[y+\frac{\dot{y}^2}{y}\right]$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{2}\left[y+\frac{\dot{y}^2}{y}\right]=R=const\ \rightarrow\ \frac{\dot{y}^2}{2y}=R-\frac{1}{2}y\ \rightarrow\ \dot{y}^2=2yR-y^2$$

$$\rightarrow\ dt=\frac{dy}{\sqrt{y(2R-y)}}\ \rightarrow\ t=\int_0^t dt=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{y(2R-y)}}=\int_0^{\hat{y}}\frac{d\hat{y}}{\sqrt{\hat{y}(2-\hat{y})}}=$$

נעבור למשתנה חדש $\hat{y}=\frac{y}{R}$ (חסר יחידות) $\qquad \tilde{y}=1-\hat{y}=1-\frac{y}{R}$

$$=-\int_1^{1-\frac{y}{R}}\frac{d\tilde{y}}{\sqrt{(1+\tilde{y})(1-\tilde{y})}}=-\int_1^{1-\frac{y}{R}}\frac{d\tilde{y}}{\sqrt{1-\tilde{y}^2}}=-\sin^{-1}\left(1-\frac{y}{R}\right)+\sin^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(1-\frac{y}{R}\right)$$

$$\rightarrow\ \sin^{-1}\left(1-\frac{y}{R}\right)=\frac{\pi}{2}-t\ \rightarrow\ 1-\frac{y}{R}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t\ \rightarrow\ \frac{y}{R}=1-\cos t$$

$$\rightarrow\ y=R(1-\cos t)$$

נחזור ל-x: $\dot{x}=y=R(1-\cos t)$ ומכאן ש:

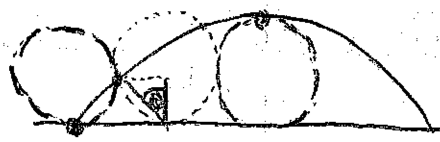
$$x=\int_0^x dx=\int_0^t R(1-\cos t)\,dt=R[t-\sin t]_0^t=R(t-\sin t)$$

קיבלנו בסה"כ את משוואות הציקלואידה באופן פרמטרי

$$\begin{cases}x=R(\theta-\sin\theta)\\ y=R(1-\cos\theta)\end{cases}$$

(השארנו בינתיים ללא הוכחה את העובדה ש-$\theta=t$, כאשר θ זווית הסיבוב של המעגל היוצר את

הציקלואידה, נראה שאת המשך) :

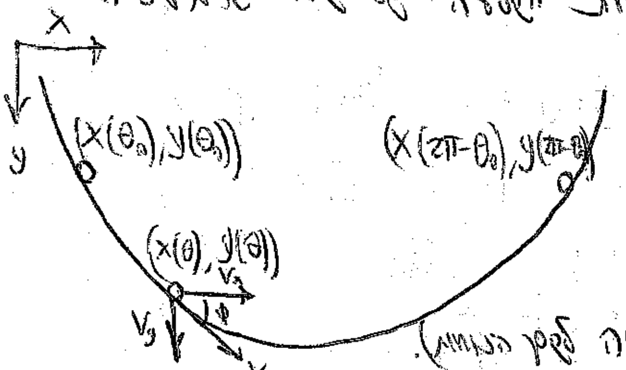


אם נבדוק לעבור חזרה לזמן ביחידות סטנדרטיות נקבל ש:

$$dt' = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \frac{R\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta}{\sqrt{2gR(1-\cos\theta)}} = \sqrt{\frac{R}{g}}\,d\theta$$

תכונת ה Tautochrone של הציקלואידה

לציקלואידה יש תכונה מעניינת נוספת והיא תכונת הטאוטוכרון. משמעותה שאם נניח למסה קטנה להחליק בתנועה מחזורית על גבי הצורה של ציקלואידה, זמן המחזור של התנועה יהיה בלתי תלוי בנקודת ההתחלה, כלומר באורך המסלול. זוהי הצורה היחידה שמקיימת תכונה זו בדיוק תחת השפעה של שדה גרביטציה קבוע: $\vec{g}$.



עלינו להראות זאת. נתבונן על מסה המשוחררת ממנוחה מ: $(x(\theta_0),y(\theta_0))$ (כאן נבחר את ציר y להצביע כלפי מטה לפי הנוחות). משימור אנרגיה, המסה תעלה חזרה עד לגובה ממנו התחילה ולכן תגיע ל: $(x(2\pi-\theta_0),y(2\pi-\theta_0))$. נסמן ב $\tau(\theta_0)$ את הזמן שלוקח למסה להגיע לנקודה הקצרה [זה יהיה רבע מזמן המחזור הכולל], כלומר ל: $(x(\pi),y(\pi))$. נסמן גם ב V_y את מהירות המסה בכיוון ציר y ונקבל ש

$$\tau(\theta_0) = \int_0^{\tau(\theta_0)} dt = \int_{y(\theta_0)}^{y(\pi)} \frac{dy}{V_y(\theta)} = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{1}{V_y(\theta)} \underbrace{\frac{dy}{d\theta}} d\theta = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{1}{V_y(\theta)} R\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = R\sin\theta \Leftarrow y = R(1-\cos\theta)$$

נרצה לחשב את $V_y(\theta)$. נעזר בשימור אנרגיה. המהירות $V(\theta)$ תלויה במרחק האנכי שעברה המסה: $h(\theta)=y(\theta)-y(\theta_0)=R(\cos\theta_0-\cos\theta)$

ולכן $V(\theta)=\sqrt{2gh(\theta)}=\sqrt{2gR}\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta} \Rightarrow V_y=V(\theta)\sin\phi$

(ϕ הזווית בין המשיק לכיוון התקדמות המסה). נשים לב ש:

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

ולכן

$$1+\tan^2\phi=1+\frac{\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2}=\frac{2-2\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2}=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

ומכאן ש:

$$\sin\phi=\sqrt{1-\cos^2\phi}=\sqrt{1-\frac{1}{1+\tan^2\phi}}=\sqrt{1-\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{2-1+\cos\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

נציב בנוסחה ל-$V_y(\theta)$:

$$V_y(\theta)=\sqrt{gR}\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}$$

נחזור לאינטגרל:

$$\frac{1}{V_y(\theta)}\frac{dy}{d\theta}=\frac{R\sin\theta}{\sqrt{gR}\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\sqrt{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}=$$

השתמשנו ב- $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
כי $\sin\theta$ חיובי בתחום הרלוונטי של θ
(בין 0 ל-π)

$$=\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\sqrt{2}\sin(\theta/2)}{\sqrt{\cos\theta_0-\cos\theta}}=\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\cos^2(\frac{\theta_0}{2})-\cos^2(\frac{\theta}{2})}}\rightarrow\tau(\theta)=\int\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\cos^2(\frac{\theta_0}{2})-\cos^2(\frac{\theta}{2})}}d\theta$$

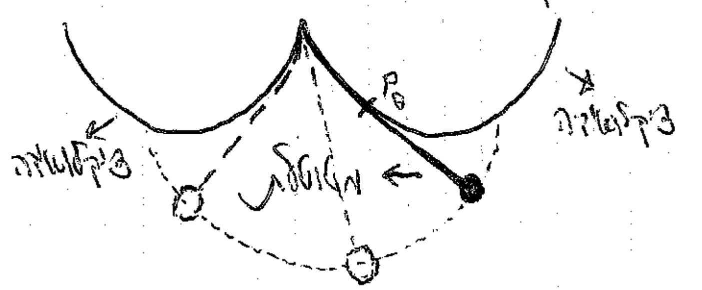
$$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$$

$$=-\sqrt{\frac{R}{g}}\int_1^0\frac{2}{\sqrt{1-u^2}}du=-2\sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin u\Big|_1^0=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

נגדיר משתנה $u=\frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta_0}{2})}$ ו- $du=-\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta_0}{2})}d\theta$

מכאן שזמן המחזור הנ"ל ב-θ_0 ושווה $4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

המשמעות היא שבניגוד למטוטלת שבה זמן המחזור רק בקירוב, זמן המחזור כאן בטאוטוכרונה, כיוון, המטוטלת מדויקת. לכן שעון המבוסס על צורת ציקלואידה יהיה עדיף על שעון מטוטלת שבו יהיה דיוק לבד ההתחלה של תנודה (הויגנס שהבין שכל מחזור אורך לגלגל שנייה). התשובה הנ"ל של הציקלואידה נמצאה ע"י הויגנס שהשתמש בזה לבניית השעון הבא:



פתרון נוסף לבעיית ה Tautochrone

נניח שמיקום החלקיק מתחילת הבור נתון ע"י אורך הקשת $s(t)$.
האנרגיה הקינטית תהייה פרופ' ל $\dot{s}^2$ והפוטנציאלית
לגובה: $y(s)$. בכדי לקבל זמן מחזור בלתי תלוי באמפליטודה נדרוש
שהלגרנז'יאן יהיה זהה לזה של מתנד הרמוני ולכן הפוטנציאל צריך
להיות פרופ' ל s^2: $y(s)=s^2$ (קיבענו את קבוע הפרופ'
ל 1 ע"י שינוי יחידות). מכאן ש $dy=2s\,ds$ ולכן:

$$dy^2 = 4s^2\,ds^2 = 4y\,(dx^2+dy^2)$$

כעת הפכנו את המשוואה וקיבלנו קשר בין x ו y:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}} \to x=\int\frac{\sqrt{1-4y}}{2\sqrt{y}}\,dy = \int\sqrt{1-4u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2}+\frac{1}{4}\sin^{-1}(2u)$$

$$u=\sqrt{y}$$
$$du=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

קיבלנו:

$$x=\frac{1}{2}u\sqrt{1-4u^2}+\frac{1}{4}\sin^{-1}(2u)=\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{4}\theta=\frac{1}{8}(\sin 2\theta+2\theta)$$
$$y=u^2=\frac{1}{4}\sin^2\theta=\frac{1}{8}(1-\cos(2\theta))$$

שזה פתרון הציקלואידה