מודל חלקיק יחיד

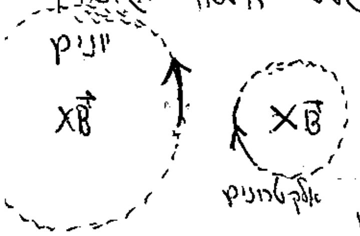
סחיפת $\vec E\times\vec B$

בשדה חשמלי קבוע $\vec E=const$ נקבל תנועה בתאוצה קבועה: $a=\frac{q_s E}{m_s}$

בשדה מגנטי קבוע $\vec B=const$ נקבל תנועה בסיבוב ציקלוטרוני: $m_s\dot{\vec v}_s=q_s\frac{\vec v_s\times\vec B}{c}$.

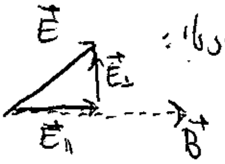
בגלל ההבדל במטען, מגמת הסיבוב שונה ליונים ולאלקטרונים ובגלל המסה השונה גם רדיוס הסיבוב שונה:

$$R_c=\frac{V_\perp}{\Omega_c}=\frac{m_s c V_\perp}{q_s B}$$



כאשר $V_\perp$ = רכיב המהירות הניצב לשדה המגנטי לגבי תדירות הציקלוטרון.

איך נראית תנועת החלקיק כאשר יש שדה חשמלי ומגנטי כלליים?



נפרק את השדה החשמלי לרכיבים מקבילים וניצבים לשדה המגנטי: $\vec E=E_\parallel\hat B+E_\perp\hat B_\perp$ ונבצע אותה חלוקה למהירות $\vec V=\vec V_\parallel+\vec V_\perp$

לאורך השדה המגנטי: $\vec V_\parallel\times\vec B=0$ ולכן נקבל פשוט תנועה בתאוצה קבועה: $m_s\dot V_\parallel=q_sE_\parallel$.

במאונך לשדה המגנטי, משוואת הכוחות תהיה: $m_s\dot{\vec V}_\perp=q_s\vec E_\perp+\frac{q_s}{c}\vec V_\perp\times\vec B$

ננסה הצבה מהצורה $\vec V_\perp=\vec V_c+\vec V_d$ כאשר V_c מהירות הציקלוטרון ו-$\vec V_d$ מהירות קבועה:

$$\cancel{m_s(\dot{\vec V}_c}+\underbrace{\dot{\vec V}_d}_{0})=q_s\vec E_\perp+\cancel{\frac{q_s}{c}\vec V_c\times\vec B}+\frac{q_s}{c}\vec V_d\times\vec B$$

נשתמש בכך ש $m_s\dot{\vec V}_c=\frac{q_s}{c}\vec V_c\times\vec B$ ונישאר עם $q_s\vec E_\perp+\frac{q_s}{c}\vec V_d\times\vec B=0$

נכפול וקטורית משמאל ב $\vec B$: $\vec B\times\vec E_\perp+\frac{\vec B}{c}\times(\vec V_d\times\vec B)=0$

$$\leftarrow\quad \vec E_\perp\times\vec B=\frac{\vec B}{c}\times(\vec V_d\times\vec B)$$

נשתמש בכך ש: $\vec A\times(\vec B\times\vec C)=\vec B\cdot(\vec A\cdot\vec C)-\vec C\cdot(\vec A\cdot\vec B)$

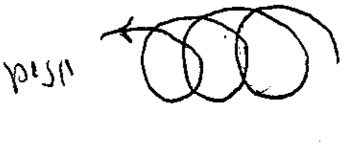
ונקבל: $\vec E_\perp\times\vec B=\vec V_d\cdot\left(\frac{\vec B}{c}\cdot\vec B\right)-\vec B\underbrace{\cancel{\left(\frac{\vec B}{c}\cdot\vec V_d\right)}}_{=0}$ $\leftarrow$ $\vec E_\perp\times\vec B=\frac{V_d}{c}B^2$

$=0$ כי $\vec V_d$ מאונך ל $\vec B$

מכאן ש: $\boxed{\vec V_d=\frac{\vec E_\perp\times\vec B}{B^2}\cdot c}$

קיבלנו מהירות סחיפה קבועה הניצבת הן לשדה המגנטי והן לחשמלי. המהירות בלתי תלויה ב q_s, m_s ולכן משותפת ליונים ולאלקטרונים.

* מאיפה מגיעה הסחיפה? לגבי V_d היא תנועה שהתנועה ממוצעת על פני סיבוב הציקלוטרון. נסתכל למשל על שדה מגנטי לתוך הדף $\otimes\vec B$ ושדה חשמלי כלפי מעלה $\uparrow\vec E$. בגלל השדה החשמלי, יון ינוע במהירות גדולה יותר בחלק העליון של המעגל ביחס לתחתית. כתוצאה, רדיוס הציקלוטרון המקומי יהיה גדול יותר והיון יקבל הטייה שמאלה ביחס לכיוונו המקורי (באותו הכיוון של $\vec E\times\vec B$)



אבל [יון היינו מקבלים] במקום אלקטרון, אז מהירות היתה גדולה יותר בתחתית המעגל אך גם מגמת הסיבוב הפוכה ולכן הסחיפה שוב תהיה לאותו כיוון.

אלקטרונים:

הסחיפה מקסימלית כש-$\vec{E}$ ו-$\vec{B}$ מאונכים ואז $V_d = c\frac{E}{B}$. ברור שמשוואה זו לא תקפה עבור $E>B$. במקרה כזה יש לפתור את הבעיה באופן יחסותי. במקרה היחסותי, $V_\perp$ הוא בקירוב קבוע אך $\Omega_c \to 0$ כשמתקרבים למהירות האור כי $M_s \to \gamma M_s$ ($\gamma=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$). היות ורדיוס הציקלוטרון משתנה במהלך התנועה, עדיין נקבל סחיפה, אך הפער במהירות קטנה ממהירות האור לכל E,B.

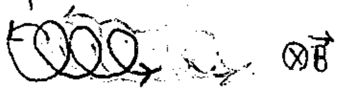
<u>הערה:</u> נשים-לב שהפיתוח שעשינו ניתן להכללה לכל כח $\vec{F}$ קבוע במקום $\vec{E}$ (לדוגמא חלקיק בשדה גרביטציה + שדה מגנטי). במקרה זה (נרשום:

$$\vec{V}_d = \frac{c}{q_s}\frac{q_s\vec{E}_\perp\times\vec{B}}{B^2} = \frac{c}{q_s}\frac{\vec{F}_\perp\times\vec{B}}{B^2} \underset{\uparrow\ \text{עבור גרביטציה}}{=} \frac{c}{q_s}\frac{M_s\vec{g}_\perp\times\vec{B}}{B^2}$$

כאן נקבל שכבר יש הפרדה בין יונים ואלקטרונים.

<u>סחיפת גראד B</u>

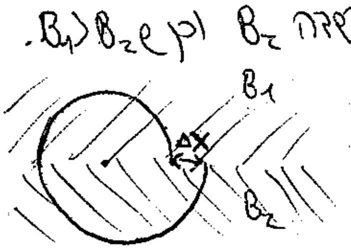
נסתכל על מצב בו יש רק שדה מגנטי במרחב, אך ערכו משתנה ממקום למקום. נזכר כי $R_c=\frac{V_\perp M_s c}{q_s B}$. לכן, היכן שB גדול, R_c קטן. נסתכל על מצב בו ∇B כלפי מעלה. התנועה של יון תראה כך:



כיוון מהירות הסחיפה הוא $\nabla B\times\vec{B}$.

עכשיו נחשב את המהירות בקירוב, נשתמש במודל פשוט. נניח שבחצי המרחב מעל מרכז המעגל של החלקיק, השדה B_1 ובחצי התחתון השדה B_2 וכן ש-$B_1>B_2$.

נניח ש-$|B_1-B_2|\ll B_1,B_2$ (כלומר $\vec\nabla B$ קטן).



עכשיו לחשב את הסחיפה נחשב את המרחק ΔX שבו נסחפת נק' ההתחלה של כל סיבוב ציקלוטרון.

$$\Delta X = 2\underset{\uparrow\ \text{ההפרש בין רדיוסי הציקלוטרון}}{\Delta R_c} = 2\frac{V_\perp M_s c}{q_s B^2}\Delta B$$

$$\to V_{gradB} = \frac{|\Delta X|}{T_c} = |\Delta X|\frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{2V_\perp M_s c}{q_s B^2}\frac{\Omega_c}{2\pi}\Delta B\frac{R_c}{R_c} = \frac{1}{\pi}\frac{M_s c}{q_s B}\frac{V_\perp}{B}\frac{V_\perp/\Omega_c}{R_c}\Omega_c\nabla B =$$

$$\frac{\Delta B}{R_c}\approx\nabla B$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{M_s c}{q_s B}\frac{V_\perp^2}{B}\nabla B = \underset{\uparrow\ \text{מיצוע מדויק היה נותן 2 במקום }\pi}{\frac{1}{\pi}}\frac{V_\perp^2\nabla B}{B\Omega_c}$$

כלומר, קיבלנו:

$$\boxed{V_{gradB} = \frac{V_\perp^2}{2}\frac{\vec{B}\times\vec\nabla B}{B^2\Omega_c}}$$

חשוב לציין שבאופן כללי לא יתכן שדה שמשתנה רק בכיוון אחד, שכן $\vec\nabla\cdot\vec{B}=0$ אומר שאם [illegible]