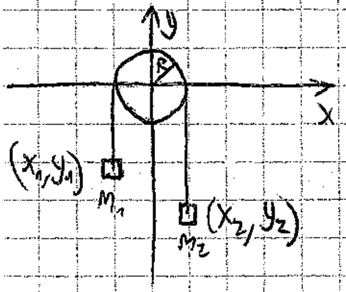
מכניקה אנליטית - תרגול ב

תזכורת: אנו דנים במערכות בעלות N חלקיקים. בהעדר אילוצים יש למערכת כמו $3N$ דרגות חופש. בהינתן k אילוצים הולונומיים (כאלה המופיעים כמשוואות אלגבריות) מהצורה: $f_i(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t)=0$ יש $n=3N-k$ דח"ח.

בסופו של דבר נקבל n מש' דיפ' עם לתאר את הבעיה במונחים של הקואורד' המוכללות $q_1,\dots,q_n$. לשם כך נדרוש את הקשרים בין הקואו' הישנות והחדשות:

$$\vec{r}_1=\vec{r}_1(q_1,\dots,q_n,t)$$
$$\vec{r}_2=\vec{r}_2(q_1,\dots,q_n,t)$$
$$\vdots$$
$$\vec{r}_N=\vec{r}_N(q_1,\dots,q_n,t)$$

דוגמה - גלגלת



יש לנו 2 גופים בדו-מימד ולכן בסה"כ 4 דח"ח.

נספור את האילוצים:

א- אורך החוט קבוע: $-y_1-y_2+\pi R=L$

$\Leftarrow$ $y_2=Const-y_1$

ב- $x_1=-R$

ג- $x_2=R$

בסה"כ יש 3 אילוצים ולכן יש $4-3=1$ דח"ח. נבחר את $q=y_1$ כקואורד' מוכללת. כעת $y_2=Const-q$, $x_2=R$, $x_1=-R$

ומכאן יש: $\dot{x}_1=0$, $\dot{y}_1=\dot{q}$; $\dot{x}_2=0$, $\dot{y}_2=-\dot{q}$

נחשב את האנרגיה הקינטית והפוטנציאלית:

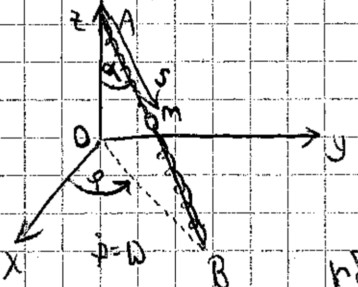
$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)=\frac{1}{2}m_1\dot{q}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{q}^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}^2$$

$$U=m_1gy_1+m_2gy_2=m_1gq+m_2g(Const-q)=(m_1-m_2)gq+\underline{Const}$$

איבר קבוע בפוטנציאל לא משפיע על הדינמיקה של המערכת

דוגמה - חרוז על חוט מסתובב

חרוז בעל מסה m מחליק ללא חיכוך על חוט ישר חסר מסה בעל אורך $2L$. קצוות החוט קשורות באופן קבוע לצלעות של זווית ישרה AOB המסתובבת סביב הצלע AO במהירות זוויתית קבועה ω. החרוז מחובר לאמצעו



2 קפיצים (קבוע כל קפיץ k, ואורכו הרפוי l). הזווית α בציור קבועה.

נכתוב את האילוצים במערכת:

ראשית, יש לנו מסה 1 במרחב תלת-מימדי

ולכן 3 קואורד'. בנוסף, יש לנו 2 אילוצים:

1- בגלל שהמסה חייבת מחליקה על המוט, יש קשר בין z ל-r

$$[z=2l\cos\alpha-r\cot\alpha \Leftarrow r=s\sin\alpha \quad , \quad z=(2l-s)\cos\alpha \;]$$

2- $\varphi=\varphi_0+\omega t$

לכן, יש $3-2=1$ דר"ח. נבחר את הקואורד' המוכללת כ s.

נרשום את הקואורד' הקרטזיות כפונק' של המוכללת:

$$\left.\begin{aligned} x&=s\sin\alpha\cos\varphi \\ y&=s\sin\alpha\sin\varphi \\ z&=(2l-s)\cos\alpha \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} \dot x&=\dot s\sin\alpha\cos\varphi-s\sin\alpha\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot y&=\dot s\sin\alpha\sin\varphi+s\sin\alpha\cos\varphi\,\dot\varphi \\ \dot z&=-\dot s\cos\alpha \end{aligned}$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{m}{2}[\sin^2\alpha(\dot s^2\cos^2\varphi+s^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi^2+\dot s^2\sin^2\varphi+s^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi^2)$$

$$+\dot s^2\cos^2\alpha]=\frac{m}{2}(\dot s^2+s^2\sin^2\alpha\,\dot\varphi^2)=\frac{m}{2}(\dot s^2+s^2\sin^2\alpha\,\omega^2)$$

$$U=\frac{2\cdot k(s-l)^2}{2}+mgz=k(s-l)^2+mg(2l-s)\cos\alpha$$

התאפסות העבודה הוירטואלית

הגדרה העתקות וירטואליות הן הזזות שמקיימות שלושה תנאים:

1- $t=const$ (העתקות בזמן קבוע)

2- אינפיניטסימליות

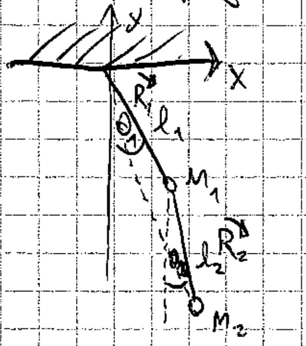
3- שומרות על האילוצים

נסמן את ההעתקה הוירטואלית של החלקיק ה-i ב $\delta\vec r_i$. עקרון התאפסות העבודה הוירטואלית אומר ש $W=\sum_{i=1}^{N}\vec f_i\cdot\delta\vec r_i=0$ כאשר $\{\vec f_i\}$ הם כוחות האילוצים. ניתן לכתוב את התנאי הנ"ל (ולכן את משוואות התנועה) ללא התייחסות בכוחות האילוץ. כאמור, שקול הכוחות על חלקיק i הוא $\vec F_i=\vec f_i+\vec F_i^{ext}$ ($\vec F_i^{ext}$ - כח חיצוני על חלקיק i). מכאן ש $\vec f_i=\vec F_i-\vec F_i^{ext}$. נציב $\vec F_i=\dot{\vec p}_i$ ונקבל $\vec f_i=\dot{\vec p}_i-\vec F_i^{ext}$

$$\Leftarrow \quad \boxed{\sum_i(\vec F_i^{ext}-\dot{\vec p}_i)\delta\vec r_i=0}$$

דוגמא-מטוטלת כפולה ב 2D

נרצה להראות שכוחות שבמערכת לו העבודה הוירטואלית מתאפס. לפני-כן, נמצא תחילה קואור' מוכללות ונקבע את האנרגיות של המע' בשלמותה.



יש לנו 2 מסות במרחב דו-ממדי ולכן 4 דר"ח.

יש לנו גם 2 אילוצים:

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2$$

סה"כ, יש $2=4-2$ דר"ח בת"ל.

נבחר את הקואור' θ_1,θ_2 בתור קואור' מוכללות. מתקיים:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=l_1\sin\theta_1 & y_1=-l_1\cos\theta_1 \\ x_2=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2 & y_2=-l_1\cos\theta_1-l_2\cos\theta_2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dot x_1=l_1\cos\theta_1\dot\theta_1 \quad \dot y_1=l_1\sin\theta_1\dot\theta_1 \\ \dot x_2=l_1\cos\theta_1\dot\theta_1+l_2\cos\theta_2\dot\theta_2 \\ \dot y_2=l_1\sin\theta_1\dot\theta_1+l_2\sin\theta_2\dot\theta_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{2}m_1(\dot x_1^2+\dot y_1^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot x_2^2+\dot y_2^2)=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}m_2\big(l_1^2\cos^2\theta_1\dot\theta_1^2+l_2^2\cos^2\theta_2\dot\theta_2^2$$

$$+2l_1l_2\cos\theta_1\cos\theta_2\dot\theta_1\dot\theta_2+l_1^2\sin^2\theta_1\dot\theta_1^2+l_2^2\sin^2\theta_2\dot\theta_2^2+2l_1l_2\sin\theta_1\sin\theta_2\dot\theta_1\dot\theta_2\big)=$$

$$=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot\theta_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot\theta_1^2+l_2^2\dot\theta_2^2+2l_1l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot\theta_1\dot\theta_2\right)$$

$$U=m_1gy_1+m_2gy_2=-m_1gl_1\cos\theta_1-m_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)$$

כעת נראה את התאפסות העבודה הוירטואלית. המסה m_1 מחוברת בחוט באורך l_1 לס' ולכן $|\vec R_1|=l_1$. המסה m_2 מחוברת בחוט באורך l_2 ל-m_1 ולכן $|\vec R_2-\vec R_1|=l_2$. נחשב את עבודת כוחות האילוץ שהם במקרה זה המתיחות בחוטים. $\vec T_1$, המתיחות בחוט העליון, מקבילה ל-$\vec R_1$. m_1 נעה על מעגל שמרכזו ב-O; $\vec R_1$ הוא בכיוון הרדיוס המעגל. לכן בקואור' פולריות סביב O נקבל ש $\delta\vec r_1=a\cdot\hat\theta$ ולכן $W_{T_1}=\vec T_1\cdot\delta\vec r_1=0$ (וקטורים אורתוגונליים)

לגבי המתיחות בחוט התחתון, נסמן $\vec R=\vec R_1-\vec R_2$ ואז $\delta\vec R=\delta\vec r_1-\delta\vec r_2$.
$\vec R$ מחבר את המסות לפני ההזזה! $\vec R+\delta\vec R$ מחבר אותן אחריה. נשים-לב כי:

$$l_2^2=|\vec R|^2=|\vec R+\delta\vec R|^2 \Rightarrow 0=|\vec R+\delta\vec R|^2-|\vec R|^2 \underset{\text{הזזה אינפיניטסימלית}}{=} 2\cdot\vec R\cdot\delta\vec R$$

מכאן ש $\vec R$ ניצב ל $\delta\vec R$ בהזזה אינפיניטסימלית ומצד שני $\vec T_2\parallel\vec R$ ולכן:

$$W_{T_2}=\vec T_2\cdot\delta\vec r_1-\vec T_2\cdot\delta\vec r_2=\vec T_2\cdot\delta\vec r\propto\vec R\cdot\delta\vec R=0$$

כפי שרצינו להראות.

דוגמא: גליל בתוך גליל

גליל בעל רדיוס a מתגלגל ללא החלקה בחלקו הפנימי של גליל ברדיוס A (הגליל החיצוני נייח), תחת השפעת הכבידה: g. מצאו את מס' דח"ח של הבעיה ואת האנרגיות.

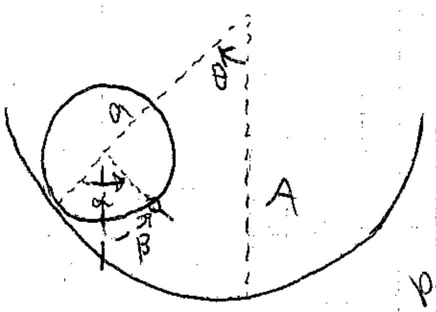
פתרון: לכאורה, צריך לתאר את מיקום של שני נק' במרחב דו-ממדי (מרכז הגליל הקטן ונק' כלשהי על השפה שלו). לכן יש 4 קוארד'.

האילוצים הם: 1- מרחק קבוע בין מרכז הגליל הקטן לנקודה על שפתו.

2- קוארד' x ו-y של הגליל הפנימי מגדירות נק' הנע רק במעגל שהגליל הקטן נע בתוך הגליל הגדול.

3- הגליל מתגלגל ללא החלקה, יש קשר בין מיקום הנק' על שפת הגליל הפנימי והתקדמות של מרכז המסה שלו.

לפיכך יש $4-3=1$ דח"ח בלבד. נבחר את θ שבציור.



מרכז המסה נע לאורך מעגל ברדיוס $A-a$ ולכן:

$$T_{cm}=\frac{m}{2}(A-a)^2\dot{\theta}^2$$

הסיבוב של הגליל הקטן סביב עצמו תורם:

$$T_{rot}=\frac{m}{2}a^2\dot{\beta}^2$$

כעת, מהציור: $\beta=\alpha-\theta$ ו-α ו-θ קשורים

בגלל התנאי של אי החלקה: $a\alpha=A\theta$

$\beta=\frac{A}{a}\theta-\theta \Rightarrow \dot{\beta}=\left(\frac{A}{a}-1\right)\dot{\theta} \Rightarrow$ לכן: $T_{rot}=\frac{m}{2}(A-a)^2\dot{\theta}^2$

(זהה לאנרגיה הקינטית של מרכז המסה).

האנרגיה הפוטנציאלית תהיה: $U=-mg(A-a)\cos\theta$