אינווריאנטות אדיאבטיות

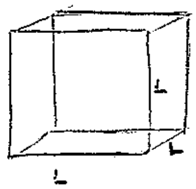
בבעיות מחזוריות במרחב הפאזה בהן ההמילטוניאן משתנה לאט דרך הפרמטר $\lambda=\lambda(t)$, $H=H(p,q,\lambda)$. רואים כי כל עוד $\frac{T\dot\lambda}{\lambda}\ll1$ (כאשר $T\dot\lambda$ הוא השינוי בλ עפ"י מחזור אחד: $T\dot\lambda=\Delta\lambda$) אז $I=\frac{1}{2\pi}\oint p(q,E,\lambda)\,dq\cong const$

אף-אלו: גם E ו-I משתנים בזמן. לגודל כזה, שהפרמטרים שלו משתנים אך הוא קבוע בזמן נקרא <u>אינווריאנטה אדיאבטית</u>.

בנוסף, הראינו כי ניתן לבטא את תדירות המחזור ע"י $\frac{\partial E(I,\lambda)}{\partial I}=\omega$.

<u>דוגמאות</u>

- בתרמודינמיקה השתמשנו בחוק הראשון: $dU=TdS-PdV$ ע"מ להראות שבתהליכים אדיאבטיים (לגז מונואטומי) - $P\sim\rho^{5/3}$. נקבל זאת בקלות ע"י שימוש באינווריאנטה אדיאבטית.
- נניח קופסא עם גז אידיאלי. מחוק הגז האידיאלי $P\sim\rho T$ (*)
נניח שכווצים/מרחיבים את הקירות בצורה איטית. מהאינווריאנטה האדיאבטית השנייה נובע $VL=const$ (כאשר V המהירות הממוצעת של החלקיקים בין הדפנות).



האנרגיה הקינטית הממוצעת של חלקיקים בקופסא היא $E_K\sim V^2\sim\frac{1}{L^2}$

ולכן גם הטמפרטורה מקיימת: $T\sim\frac{1}{L^2}$.

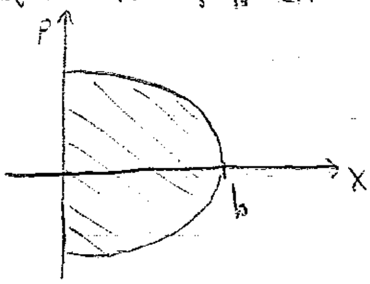
מצד שני, הצפיפות מקיימת $\rho\sim\frac{1}{L^3}$ ולכן נציב ב(*) ונקבל:

$$P\sim\rho T\sim\frac{1}{L^3}\frac{1}{L^2}=\frac{1}{L^5}=\left(\frac{1}{L^3}\right)^{5/3}\Rightarrow \underline{P\sim\rho^{5/3}}$$

כאשר ב"דחיסה איטית" הכוונה ש $\frac{|\dot L|}{L}T^*\ll1$ כאשר T^* זמן המחזור של החלקיקים ולכן $T^*=\frac{2L}{V}$ $\Leftarrow$ $\frac{|\dot L|}{L}\frac{L}{V}\ll1$ $\Leftarrow$ $\underline{|\dot L|\ll V}$.

המשתנים בכדור הקופץ בעזרת כבידה משתנה לאט ($g=g(t)$).

ההמילטוניאן של כדור נתון ע"י $H=\frac{p^2}{2m}+mgx$, במרחב הפאזה נקבל פרבולה כמו בשרטוט:



בנקודה המקסימלית (h): $p=0$ ונקבל $E=mgh$.

לכן ניתן לרשום את p כ: $p=m\sqrt{2g(h-x)}$

האינווריאנט האדיאבטי מייצג שטח במרחב הפאזה, לכן:

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^h m\sqrt{2g(h-x)}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^h m\sqrt{2gy}\,dy=\frac{m\sqrt{2g}}{\pi}\frac{h^{3/2}}{3/2}=\frac{2\sqrt2}{3\pi}mg^{1/2}h^{3/2}$$

נבצע החלפת משתנים $y=h-x$, $dy=-dx$

לדוגמא, במעלית נחליף g ב: $g_{eff}=a+g$ (a = תאוצת המעלית)

אז $I\propto(a+g)^{1/2}h^{3/2}=const$. הואיל ו-$I$ שמור נשווה אותו בין מצב ההתחלה לזמן מאוחר יותר ונקבל $(a+g)^{1/2}h^{3/2}=g^{1/2}h_0^{3/2}$

$$\Rightarrow h=h_0\left(\frac{g}{g+a}\right)^{1/3}$$

נמצא את התדירות: צריך לבטא את $E(I,\omega)$. הואיל ו-$E\sim h$ ו- $I\sim h^{3/2}$ אז $I\sim E^{3/2}$

$$I=(mg_{eff}h)^{3/2}m^{-1/2}g_{eff}^{-1}\frac{2\sqrt2}{3\pi}=E^{3/2}m^{-1/2}(g+a)^{-1}\frac{2\sqrt2}{3\pi}$$

ומכאן ש:

$$E=I^{2/3}m^{1/3}(g+a)^{2/3}\left(\frac{3\pi}{2\sqrt2}\right)^{2/3}$$

$$\omega=\frac{\partial E}{\partial I}=\frac{2}{3}\left(\frac{3\pi}{2\sqrt2}\right)^{3/2}I^{-1/3}m^{1/3}(g+a)^{2/3}$$