גלי לנגמיור לא ליניאריים - משוואות זקרוב

גלי קול אקוסטיים של יונים המצומדים לגלי לנגמיור שתדירותם גבוהה בהרבה. הכח הפונדרמוטיבי מצמד בין התדירויות הנמוכות לגבוהות. המשוואה מאופיינת בכך שיש לה שני סקאלות זמן שונות ולכן יופרדו ע״י מהצורה:

$$(*)\quad a(t) + b(t)\exp(-i\omega_e t) = c(t) + d(t)\exp(-i\omega_e t)$$

כאשר a,b,c,d משתנים לאט ביחס ל ω_e^{-1} (ω_e = תדירות הפלסמה)

אינטגרציה על (*) מ t עד $t+\frac{2\pi}{\omega_e}$ בהנחה ש a,b,c,d לא משתנים על זמן קצר זה, נותן: $a(t)=c(t)$.

זהו "מיצוע על סקלות הזמן המהירה".

בדומה אם נכפיל את (*) ב $\exp(i\omega_e t)$ ונעשה אותה אינטגרציה נקבל: $b(t)=d(t)$. לכן, במשוואה נתונה ניתן להפריד בין איברים שמשתנים מהר בניגוד לאלו שמשתנים לאט בנפרד.

נסמן איברים עם תדירות גבוהה ב h ותדירות נמוכה ב l:

$$n_e(x,t) = n_0 + n_{el}(x,t) + n_{eh}(x,t)$$
$$n_i(x,t) = n_0 + n_{il}(x,t)$$
$$V_e(x,t) = V_{el}(x,t) + V_{eh}(x,t)$$
$$V_i(x,t) = V_{il}(x,t)$$
$$E(x,t) = E_l(x,t) + E_h(x,t)$$

כאשר הנחנו הפרדה בסדר גודל עבור היונים שמסתם גבוהה.

נסתכל על פואסון לנגמיור בנוכחות הפרעות הנמוכות בצפיפות $n_{el}(x,t)$

נבודד את הסדר הגבוה ממש' פואסון, רצף לאלקטרונים ומומנט לאלקטרונים:

$$\partial_x E_h = -4\pi e n_{eh} \;;\quad \partial_t n_{eh} + \partial_x[(n_0+n_{el})V_{eh}] = 0 \;;\quad m_e n_0 \partial_t V_{eh} = -3T_e \partial_x n_{eh} - e n_0 E_h$$

כאשר נציין כי מכפלה של איברים בתדירות גבוהה ונמוכה נותן איבר בתדירות גבוהה. יש כאן הכנסה של $\partial_x(n_{eh}V_{el})$ במש' הרציפות והחלפנו של n_0 ב n_0+n_{el} במס' מקומות. נקח את הנגזרת בזמן של האיברים בתדירות גבוהה במש' הרציפות ונשתמש ב $\partial_t V_{eh}$ ממש' הפואסון ע״י לקבל: (*)

$$-\omega_e^2 \frac{n_{el}}{n_0} E_h = \partial_t^2 E_h + \omega_e^2 E_h - 3V_e^2 \partial_x^2 E_h$$

צד ימין של משוואה זו, זה החלק הליניארי של גלי לנגמיור הרגילים. צד שמאל מתאר את התרומה לשדה כתוצאה מהשינוי בצפיפות הפלסמה בעקבות n_{el}.

נכתוב את E_h בצורה: $E_h(x,t)=\frac{1}{2}\underbrace{\tilde{E}(x,t)}_{\text{משתנה לאט}}\underbrace{\exp(-i\omega_e t)}_{\text{משתנה מהר}} + c.c.$

נציב ל(*) ונקבל (לאחר שנשמור רק איברים "מהירים"):

$$\boxed{i\partial_t\tilde{E} + \frac{3}{2}\frac{v_e^2}{\omega_e}\partial_x^2\tilde{E} = \frac{\omega_e}{2}\frac{n_{el}}{n_0}\tilde{E}} \quad (1c)$$

כאשר $|\partial_t^2\tilde{E}| \ll |\omega_e\partial_t\tilde{E}|$ ולכן ניתן להזניח.

המשוואה שקיבלנו היא מש' בתדירות נמוכה המתארת את השינוי בזמן של המעטפת האיטית $\tilde{E}(x,t)$ של השדה המהיר $E_h(x,t)$.

כעת, נחשוב על התנועה של גלים אקוסטיים ליוניים בנוסף עם הכוח הפונדרומוטורי בגלל התנודות של האלקטרונים. בהנחת קוואזי-ניטרליות: $n_{el}\cong n_{il}$; $v_{il}\approx v_{el}$.

המרכיב בתדירות נמוכה של מש' הרצף לאלקטרונים, נותן:

$$\partial_t n_{el} + n_0\partial_x v_{el} = 0 \quad (1)$$

״ ״ ״ ״ הכוחות נותן:

$$0 = -\frac{T_e\gamma_e}{n_0}\partial_x n_{el} - eE_l - \frac{e^2}{4m_e\omega_e^2}\partial_x|\tilde{E}|^2 \quad (2)$$

בהזנחת האיבר $m_e\partial_t v_{el}$ (כי מסת האלקטרון קטנה).

אותה מש' ליונים תיתן:

$$M_i\partial_t v_{il} = -\frac{T_i\gamma_i}{n_0}\partial_x n_{il} + eE_l \quad (3)$$

נבודד את E_l מ(3) ונציב ל(2). נגזור לפי x ונציב את v_{el} מ(1) ונקבל:

$$\boxed{\partial_t^2 n_{el} - C_s^2\partial_x^2 n_{el} = \frac{1}{16\pi m_i}\partial_x^2|\tilde{E}|^2} \quad (ב)$$

כאשר $C_s^2 = \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{M_i}$ הוא מהירות הקול היוני.

צמד המש' (1c) ; (ב) עבור $\tilde{E}$; n_{el} ידועות כמשוואות זקרוב.

כדי לחקור את צמד המשוואות הנ"ל, נהוג להגדיר מספר משתנים חסרי יחידות:

$$\mu = \frac{\gamma_e T_i + \gamma_i T_i}{T_e}$$

$$\tau = \left(\frac{2\mu}{3}\right)\cdot\left(\frac{m_e}{M_i}\right)(\omega_e t)$$

$$z = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\mu m_e}{M_i}\right)^{1/2}\frac{x}{\lambda_e}$$

$$E=\left(\frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{M_i}{M_e}\right)^{1/2}\left(\frac{3\tilde{E}^2}{64\pi n_0 T_e}\right)^{1/2}$$

$$n=\left(\frac{3M_i}{4M_e}\right)\left(\frac{n_{el}}{n_0}\right)$$

במונחים אלו ניתן לכתוב את (א) ו-(ב) כ:

(A) $i\partial_\tau E+\partial_z^2 E=nE$

(B) $\partial_\tau^2 n-\partial_z^2 n=\partial_z^2|E|^2$

פתרון הסוליטון הקשור בזמן לבעית משוואות אלה הוא פתרון סטציונרי

לח במובן המעבדה: פסגה מקומית בשדה יחד עם חור מקומי בצפיפות הנוצר באמצעות הכח הפונדרמוטיבי.

האיבר הראשון ב(B) יפול ונקבל לאחר אינטגרציה פשוטה: $n=-|E|^2$

ונציב ב (A): $i\partial_\tau E+\partial_z^2 E+|E|^2E=0$ שהיא משו' שרדינגר הלא ליניארית.

למשו' זו יש סוליטון מהצורה: $E(z,\tau)=(2\Omega)^{1/2}\exp(i\Omega\tau)\operatorname{sech}(\Omega^{1/2}z)$.