גלים אלקטרומגנטיים מקבילים ל-B_0

המשוואות שנצטרך הן:

מקסוול
$$(1)\quad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t}$$
$$(2)\quad \vec\nabla\times\vec B = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec J$$

משו' תנועה (בהנחת פלסמה קרה)
$$(3)\quad m_e\left(\frac{\partial\vec U_e}{\partial t} + (\vec U_e\cdot\vec\nabla)\vec U_e\right) = -e\vec E - \frac{e}{c}\vec U_e\times\vec B$$

יש לנו כאן 3 משוואות ל-4 נעלמים: $n_e, U_e, \vec B, \vec E$ ולכן נצטרך לפחות עוד משוואה. המשו' החסרה כאן היא משו' פואסון: $\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi e(n_0-n_e)$.

למעשה, נראה שהתלות ב-n_e תבוטל ולכן לא נצטרך את המשוואה הזו.

בנוסף, נעיר שהנחנו כאן ש-$n_{i1}=0$, $u_{i1}=0$ (ולכן לא כתבנו משו' יונים) משום שהיונים קשים יותר לתזוזה בתדירויות גבוהות. לסיכום, ההפרעה היא:

$$\begin{cases} \vec E = 0 + \vec E_1 \\ \vec B = \underbrace{\vec B_0}_{B_0\hat z \text{ נייח}} + \vec B_1 \\ \vec U_e = 0 + \vec U_{e1} \\ n_e = n_0 + n_{e1} \end{cases}$$

נציב למשוואות ונעשה לינאריזציה:

$$(1)\quad \vec\nabla\times\vec E_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B_1}{\partial t}$$
$$(2)\quad \vec\nabla\times\vec B_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec E_1}{\partial t} - 4\pi e\frac{n_0}{c}\vec U_{e1} - \underbrace{4\pi e\frac{n_{e1}}{c}\cdot 0}_{\text{מוזנח ולכן לא צריך את משו' פואסון}} \quad \text{(הצבנו את הזרם)}$$
$$(3)\quad m_e\frac{\partial\vec U_{e1}}{\partial t} = -e\vec E_1 - \frac{e}{c}\vec U_{e1}\times\vec B_0$$

נניח הפרעה מהצורה: $\begin{pmatrix}\vec E_1\\ \vec B_1\\ \vec U_{e1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{\vec E}_1\\ \tilde{\vec B}_1\\ \tilde{\vec U}_{e1}\end{pmatrix} e^{i(\vec K\vec r-\omega t)}$. נציב למשוואות:

$$(1)\quad i\vec K\times\tilde{\vec E}_1 = \frac{i}{c}\omega\tilde{\vec B}_1$$
$$(2)\quad i\vec K\times\tilde{\vec B}_1 = -\frac{i}{c}\omega\tilde{\vec E}_1 - \frac{4\pi}{c}en_0\tilde{\vec U}_1$$
$$(3)\quad -i\omega m\tilde{\vec U}_1 = -e\tilde{\vec E}_1 - \frac{e}{c}\tilde{\vec U}_1\times\vec B_0$$

ממשו' (1) נקבל: $i\vec K\times(\vec K\times\tilde{\vec E}_1) = \frac{i\omega}{c}\vec K\times\tilde{\vec B}_1$ את אגף שמאל נפתח לפי הנוסחה הוקטורית של $\vec A\times(\vec B\times\vec C) = (\vec A\cdot\vec C)\vec B - (\vec A\cdot\vec B)\vec C$ ואת אגף ימין נציב משו' (2):

$$(*)\quad i\left(\vec K(\vec K\cdot\tilde{\vec E}_1) - K^2\tilde{\vec E}_1\right) = \frac{\omega}{c}\left(-\frac{i\omega}{c}\tilde{\vec E}_1 - \frac{4\pi}{c}en_0\tilde{\vec U}_1\right)$$

צ"ל להתבדק מכאן, נסתכל על מספר מקרים ספציפיים. נתבונן בהפרעות שמתפשטות בכיוון $\hat z$ (במקביל ל-$\vec B_0$), כלומר $\vec K = K\hat z$.

קיימות מספר אפשרויות לבחירת הכיוון של $\tilde E_1$.

1. גלים אורכיים (אלקטרוסטטיים): $\tilde{\vec E}_1 = \tilde E_1\hat z$.

במקרה זה: $\vec K(\vec K\cdot\tilde{\vec E}_1) = K^2\tilde{\vec E}_1$. לכן, נציב ב-(*) ונקבל:

$-i\omega\tilde E_1 = 4\pi n_0\tilde U_1 e$ מכאן ש-$\tilde{\vec U}_1$ גם-כן בכיוון $\tilde{\vec E}_1$ (ולכן בכיוון $\hat z$)! $\tilde{\vec U}_1\times\vec B_0 = 0$. מ-(3) נקבל:

$-i\omega m\tilde U_1 = -e\frac{4\pi e n_0\tilde U_1}{-i\omega} \Leftarrow \underline{\omega=\omega_p}$ שזה יחס הדיספרסיה שקיבלנו עבור גלים

אלקטרוסטטיים בהזנחת הטמפרטורה.

ב: גלים רוחביים (אלקטרומגנטיים): $\vec{E}_1 = \tilde{E}_{1x}\hat{x} + \tilde{E}_{1y}\hat{y}$

כעת נקבל $\vec{K}\cdot\vec{E}=0$. לכן (*) נותן: $\vec{E}_1\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) = -i\frac{4\pi e n_0 \omega}{c^2}\vec{u}_1$

ומכאן שעם $\vec{U}_1$ הצורה הבאה: $\vec{u}_1 = u_{1x}\hat{x} + u_{1y}\hat{y}$ נציב ל(3):

$$-i\omega\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{u}_1 = i\frac{4\pi e^2 n_0 \omega \vec{u}_1}{m_e c^2} - \frac{e}{c}\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\frac{B_0}{m_e}\vec{u}_1\times\hat{z}$$

$$i\omega\left(K^2+\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}\right)\vec{u}_1 = \omega_c\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{u}_1\times\hat{z}$$

$\omega_c = \frac{eB_0}{mc}$ = תדירות הציקלוטרון

נרצה להסתכל על המשוואה רכיב-רכיב. תחילה: $\vec{u}_1\times\hat{z} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \tilde{u}_{1x} & \tilde{u}_{1y} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \hat{x}\tilde{U}_{1y} - \hat{y}\tilde{U}_{1x}$

בכיוון $\hat{x}$ נקבל: $i\omega\left(K^2+\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}\right)\tilde{u}_{1x} = \omega_c\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{u}_{1y}$

ובכיוון $\hat{y}$ נקבל: $i\omega\left(K^2+\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}\right)\tilde{u}_{1y} = -\omega_c\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{u}_{1x}$

קיבלנו שתי משוואות מהצורה:

$$A\tilde{U}_{1x} = B\tilde{U}_{1y}$$
$$A\tilde{U}_{1y} = -B\tilde{U}_{1x}$$

פתרון: $A\tilde{U}_{1y} = -\frac{B^2}{A}\tilde{U}_{1y} \Leftarrow A^2+B^2=0$. לכן, יחס הדיספרסיה יהיה:

$$-\omega^2\left(K^2+\frac{\omega_p^2-\omega^2}{c^2}\right)^2 + \omega_c^2\left(K^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 = 0$$

נכפול ב $\frac{c^2}{\omega^2}$:

$$\left(K^2c^2-\omega^2+\omega_p^2\right)^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2}\left(c^2K^2-\omega^2\right)^2$$

$$K^2c^2-\omega^2+\omega_p^2 = \pm\frac{\omega_c}{\omega}\left(c^2K^2-\omega^2\right)$$

נחלק ב ω^2:

$$\frac{K^2c^2}{\omega^2} - 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \pm\frac{\omega_c}{\omega}\left(\frac{c^2K^2}{\omega^2}-1\right)$$

$$\frac{K^2c^2}{\omega^2}\left(1\mp\frac{\omega_c}{\omega}\right) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + 1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}$$

ולבסוף:

$$\boxed{\frac{K^2c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1\mp\frac{\omega_c}{\omega}}}$$

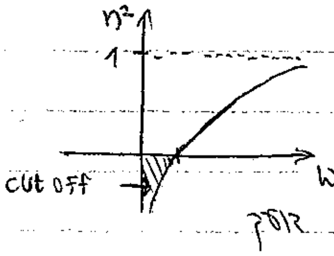
הפתרון עם המינוס מתאר R-wave (תנועה נגד כיוון השעון) והפתרון עם הפלוס מתאר L-wave (תנועה עם כיוון השעון). (זהו יחס הדיספרסיה של גלים אלקטרומגנטיים הנעים בכיוון שדה מגנטי חיצוני $\vec{B}_0$ ומקוטבים מעגלית. +/- מתאים לסיבוב השדה החשמלי עם ונגד כיוון השעון, בהתאמה.)

<u>דיון בפתרונות</u>

נניח שאנו מאירים את הפלסמה בתדירות <u>קבועה</u> ובגל הנע בכיוון $\hat{z}$ המקביל ל-$\vec{B}_0$.

נרצה לראות מה יקרה ל-K לאורך המסלול. לשם-כך, נגדיר את אינדקס השבירה: $n \equiv \frac{cK}{\omega}$.

נקבל לריבוע משוואה ל-n: $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega\pm\omega_c)}$.

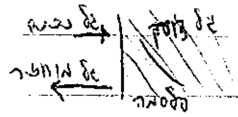


<u>פתרון ה L-Wave</u> (פתרון הפלוס). פתרון זה נראה כך:

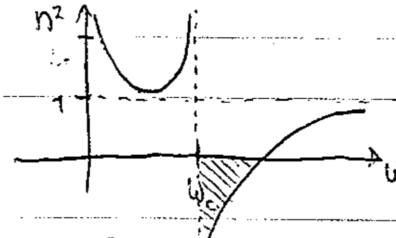
ישנה תדירות: $\omega = \frac{1}{2}\left(-\omega_c+\sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}\right) > 0$ שבה $n^2=0$.

בתחום הנמוכות נקבל $n^2<0$. משמעות הדבר ש-n מדומה ולכן K מדומה. מכאן שהגל $e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ הופך מאוסצילטורי לאקספוננציאלי דועך עם ההתקדמות ב-$\vec{r}$. למעשה ככל שהגל מתקדם הוא קטן אקספוננציאלית. מישור אנרגיה, משמעות

הדבר שנקבל גל מוחזר שהוא חסר כמעט כמו הגל המקורי, ככל ש-ω יותר קטן, כך הקירוב של המחזרה מלאה יותר טוב.



במקרה של R-Wave: יש התבדרות בתדירות הציקלוטרון, ω_c, ובסה"כ נקבל את התמונה משמאל.



הפסק $n^2=0$ כאשר $\omega=\frac{1}{2}\left(\omega_c+\sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}\right)$

שוב קיבלנו אזור של cutoff עבור $\omega_c<\omega<\omega$

(לעומת $\omega_p<\omega$ במקרה של גל בלי שדה מגנטי חיצוני).

בנוסף, רואים כאן רזוננס: ב-$\omega=0$, $n=\infty$ (גם ב-L-wave) אבל איכשהו להישאר קבוע. לכן זה לא רזוננס אמיתי.

לעומת זאת, ב-$\omega=\omega_c$, $k\to\infty$ $\Leftarrow$ $\lambda\to 0$. מכיון שכל אופק דיאלקטרי קטן, צריך במקרה זה להסתכל על הגל. הגל הפולריזציה היא סיבוב באותו כיוון של הגל בדיוק ב-R-wave להצגת הג'יירו של האלקטרונים. בתדירות ω_c הגל והאלקטרונים נעים יחד והגל מעביר אנרגיה לאלקטרונים הופכת לקינטית ולכן אינו מתקדם. במקרה של L-wave יש רזוננס דומה ב: $\omega=\Omega_i$ (תדירות הציקלוטרון של היונים) כאשר הם מתקדמים יחד עם הגל.

סיבוב פאראדיי

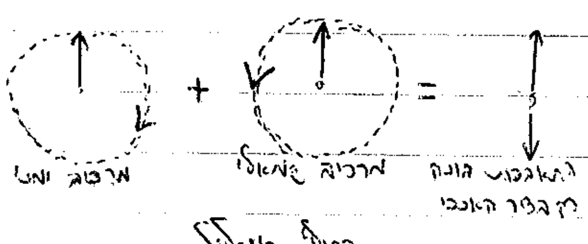
נחזור להתבונן במשוואות הנ"ל: $n_{R,L}=1-\dfrac{\omega_p^2/\omega^2}{1\mp\frac{\omega_c}{\omega}}$

הגלים בפתרונות הקודמים נעים במהירויות שונות. לכן, גל מקוטב לינארית, שהוא סופרפוזיציה של קיטובים מעגליים ימני ושמאלי, לא ישמור על כיוון הקיטוב שלו לאורך התקדמות הגל. במקום, נקבל סיבוב של כיוון הקיטוב הידוע כ-סיבוב פאראדיי.

הפאזה המצטברת לאחר שהגל מתקדם מרחק d היא $k\cdot d$. אולם כאן, כאשר k יכול להשתנות, הפאזה היא: $\phi_{R,L}=\int_0^d K_{R,L}\,ds$ כאשר $K_{R,L}=\frac{\omega}{c}n_{R,L}$

$\Delta\theta=\frac{\phi_R-\phi_L}{2}$ גל נכנס לפלסמה כשהוא מקוטב לינארית ומסתובב בזווית כפי שניתן לראות מהשרטוט.

בתחילת המסלול:

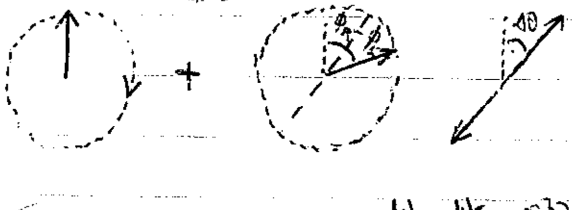


עבור $\omega\gg\omega_p$, $\omega\gg\omega_c$ נקבל:

$$K_{R,L}=\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2/\omega^2}{1\mp\frac{\omega_c}{\omega}}}\approx\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1\pm\frac{\omega_c}{\omega}\right)}\approx$$

$$\frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\left(1\pm\frac{\omega_c}{\omega}\right)\right)$$

בסוף המסלול



לכן:

$$\Delta\theta=\frac{1}{2}\int_0^d (K_R-K_L)\,ds=\frac{1}{2}\int_0^d\frac{\omega_p^2\omega_c}{c\,\omega^2}\,ds=$$

$$=\frac{2\pi e^3}{m_e^2c^2\omega^2}\int_0^d n B_{\parallel}\,ds$$

בהצבת ω_p, ω_c

הוכח ! $\Delta\theta \sim \omega^{-2}$ עבור קו ראייה נתון, אזי ניתן לבדוק מדידות של $\int n B_{\parallel} ds$ ע"י מדידת $\Delta\theta$ בשתי תדירויות שונות. כך ניתן ללמוד על השדה המגנטי והצפיפות בתווך הבין כוכבי. אולם מאחר, וגודל וכיוון השדה משתנים משמעותית לאורך קו הראייה נקבל רק חסם תחתון לגודל השדה הממוצע באמצעות שיטה זו.

מדידת מרחקים באמצעות דיספרסיה

העובדה שלתדירויות שונות בפלסמה מתאימות מהירויות חבורה שונות, יוצרת דיספרסיה שמאפשרת לחשב את המרחק של מקורות אסטרופיזיקליים שונים.
נקח למשל פולסר, המרחק d מכדוה"א. הזמן שייקח לפולס להגיע לכדה"א בתדירות ω יהיה: $t_p = \int_0^d \frac{ds}{V_g}$ כאשר S מודד את המרחק לפולסר לאורך קו הראייה. תדירויות הפלסמה בתווך הבין כוכבי הן לרוב מאוד נמוכות (בסדר של $10^3 Hz$) ולכן נניח $\omega_p \ll \omega$ ונקבל:

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \rightarrow \frac{1}{V_g} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t_p = \int_0^d \frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) ds = \frac{d}{c} + \frac{1}{2c\omega^2}\int_0^d \omega_p^2\, ds$$

האיבר הראשון הוא פשוט הזמן שלוקח לסיגנל לעבור בוואקום.
האיבר השני הוא התיקון עבור פלסמה. מה שמודדים בפועל הוא את השינוי בזמן ההגעה של פולסים כפונק' של התדירות $\frac{dt_p}{d\omega}$ כלומר (בהגדרת ω_p):

$$\frac{dt}{d\omega} = -\frac{4\pi e^2}{c m_e \omega^3} D$$ עבור $D = \int_0^d n\, ds \equiv$ dispersion-measure

כעת אם נוסיף הנחות נוכל לחשב את המרחק לפולסר.