מכניקה אנליטית

תנודות

1. אוסצילטור הרמוני דו-מימדי

נתון הלגרנז'יאן $L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{m\omega_0^2}{2}(x^2+y^2)+\alpha xy$

א. מהן משוואות התנועה?

ב. הראו כי המערכת שקולה למערכת של שני אוסצילטורים הרמוניים לא מצומדים עם תדירויות שונות.

ג. מצאו את התדירויות העצמיות.

פתרון:

א. לפי משוואות אוילר-לגרנז', $\begin{cases} m\ddot{x}+m\omega_0^2 x=\alpha y \\ m\ddot{y}+m\omega_0^2 y=\alpha x \end{cases}$

כלומר - קיבלנו שני אוס' הרמוניים צמודים ביניהם. למשל, שני מעגלי RLC המצומדים ע"י סלילים.

ב. נשנה קואו' ע"י טרנספורמציה סיבוב: $\zeta=x-y$, $\eta=x+y$

מחיבור משוו' התנועה נקבל
ומחיסור "

$$\begin{cases} m\ddot{\eta}+(m\omega_0^2-\alpha)\eta=0 \\ m\ddot{\zeta}+(m\omega_0^2+\alpha)\zeta=0 \end{cases}$$

כלומר - קיבלנו משוואות לא מצומדות עם תדירויות שונות.

ג. התדירויות החדשות הן: $\omega_\zeta=\sqrt{\omega_0^2+\frac{\alpha}{m}}$ $\omega_\eta=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\alpha}{m}}$

ζ,η נקראים אופני תנודה נורמליים, והם ניצבים.

התדירויות ω_ζ,ω_η הן התדירויות העצמיות של המערכת.

באופן כללי, נרצה לעבור ממערכת מצומדת של N ד"ח -

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(M_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j-K_{ij}x_ix_j\right)$$

למערכת של N אוסצילטורים לא מצומדים

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(M_\alpha\dot{\theta}_\alpha^2-\omega_\alpha^2\theta_\alpha^2\right)$$

כאשר ω_α הן התדירויות העצמיות ו- θ_α אופני התנודה הנורמליים.

כדי לעשות זאת צריך ללכסן את המטריצות M, K יחד.

כעת נפתור את אותה בעיה שוב בגישה הזו.

בניסוח הזה, המטריצות הן -

$$M=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad K=\begin{pmatrix} m\omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & m\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

כדי ללכסן את המטריצות נדרוש $\det(K-\omega^2 M)=0$

$$0 \overset{!}{=} \begin{vmatrix} m\omega_0^2-m\omega^2 & -\alpha \\ -\alpha & m\omega_0^2-m\omega^2 \end{vmatrix} = m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2-\alpha^2=0$$

כלומר $(\omega_0^2-\omega^2)^2=\alpha^2/m^2$

ולכן התדירויות העצמיות $\omega_\pm^2=\omega_0^2\pm\frac{\alpha}{m}$

נרצה למצוא את הוקטורים העצמיים, כלומר אלו שמקיימים

$$(K-\omega^2 M)\vec{V}=0$$

$$\omega_+ : \begin{pmatrix} \overbrace{m\omega_0^2-m(\omega_0^2+\frac{\alpha}{m})}^{-\alpha} & -\alpha \\ -\alpha & m\omega_0^2-m(\omega_0^2+\frac{\alpha}{m}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a=-b\ , \ \vec{V}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_- : \begin{pmatrix} \overbrace{m\omega_0^2-m(\omega_0^2-\frac{\alpha}{m})}^{\alpha} & -\alpha \\ -\alpha & m\omega_0^2-m(\omega_0^2-\frac{\alpha}{m}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a=b\ , \ \vec{V}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

והפתרון הכללי -

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{i\omega_+ t}+B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{i\omega_- t}$$

כאשר A,B מספרים קומפלקסיים שנקבעים לפי 4 תנאי התחלה - $\{x(0),y(0),\dot{x}(0),\dot{y}(0)\}$ וקובעים את האמפליטודה והפאזה של אופני התנודה הנורמליים.

(כמובן, בבעיה הזה, הקואורדינטות יהו החלק <u>הממשי</u> של הפתרון).

בעיה 2 : מצאו את אופני התנודה הנורמליים של מולקולת CO_2 $O=C=O$

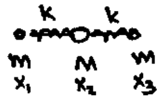
כמה ד"ח לתנודות יש למערכת?

$$3\times 3-3-2=4$$

3 חלקיקים ב-3 מימדים ; תנועה של מרכז המסה ; סיבובים "צדדיים" ; תנודות

נחלק לתנודות רוחביות - בניצב לציר המולקולה ואורכיות - במקביל לציר, ונתמקד בתנודות אורכיות. יש $3-1=2$ תנודות אורכיות.

נסתכל על תנודה קטנה סביב נק' ש"מ היציבה של האטומים, וננסה לקרב את המערכת כשלוש מסות מחוברות בשני קפיצים



בקירוב הזה, האנרגיה הקינטית היא
$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{M}{2}\dot{x}_2^2$$

והאנרגיה הפוטנציאלית
$$V=\frac{k}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(x_3-x_2)^2\right]$$

נעבור למערכת מרכז המסה כדי להתמקד בתנודות:
$$R_{cm}=m(x_1+x_3)+Mx_2=0$$
(⇐ אין כוחות חיצוניים ולכן התנע של מרכז המסה שמור).
$$x_2=-\frac{m}{M}(x_1+x_3)$$

נכתוב את הלגרנז'יאן בקואו' x_1,x_3:

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2)+\frac{M}{2}\Big[\underbrace{\frac{m}{M}(\dot{x}_1+\dot{x}_3)}_{\dot{x}_2}\Big]^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{m^2}{M}\right)\left[\dot{x}_1^2+\dot{x}_3^2\right]+\frac{m^2}{M}\dot{x}_1\dot{x}_3$$

$$V=\frac{k}{2}\left[\left(-\frac{m}{M}(x_1+x_3)-x_1\right)^2+\left(+\frac{m}{M}(x_1+x_3)+x_3\right)^2\right]=$$
$$=\frac{k}{2}\left[\frac{2\cancel{k}m^2}{M^2}+\frac{2m}{M}+1\right](x_1^2+x_3^2)+\frac{2km}{M}\left(\frac{m}{M}+1\right)x_1x_3$$

כלומר, ניתן לכתוב את הלגרנז'יאן כ-
$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{ij}m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j+\frac{1}{2}\sum_{ij}k_{ij}x_ix_j$$

כאשר ij סוכמים על 1,3, עם המטריצות

$$M=\begin{pmatrix} m+\frac{m^2}{M} & \frac{m^2}{M} \\ \frac{m^2}{M} & m+\frac{m^2}{M}\end{pmatrix},\qquad k=\begin{pmatrix} \frac{2km^2}{M^2}+\frac{2kM}{M}+k & \frac{2km^2}{M^2}+\frac{2kM}{M} \\ \frac{2km^2}{M^2}+\frac{2kM}{M} & \frac{2km^2}{M^2}+\frac{2kM}{M}+k\end{pmatrix}$$

עם הסימונים
$$\alpha=m+\frac{m^2}{M}\qquad \beta=\frac{m^2}{M}\qquad \gamma=\frac{2km^2}{M^2}+\frac{2kM}{M}+k\qquad \delta=\frac{2km^2}{M^2}+\frac{2m}{M}k,$$

מתקבל -
$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},\qquad k=\begin{pmatrix}\gamma & \delta\\ \delta & \gamma\end{pmatrix},$$

כדי למצוא את התדירויות העצמיות יש לפתור את המשוואה
$$\det(k-\omega^2M)=0$$

כלומר, המשוואה הסקולרית היא -
$$(\gamma-\omega^2\alpha)^2-(\delta-\omega^2\beta)^2=\omega^4(\alpha^2-\beta^2)+(2\beta\delta-2\alpha\gamma)\omega^2+\gamma^2-\delta^2=0$$

זו משוואה ריבועית ב-ω^2, ופתרונותיה -

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = k\left(\frac{2}{M}+\frac{1}{m}\right)$$

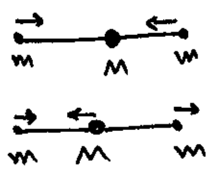
נרצה למצוא גם את אופני התנודה העצמיים, כלומר אלו שמקיימים -

$$\left(K-\omega_i^2 M\right)\vec{V}_i = 0$$

$$\omega_1: \begin{pmatrix} \frac{km^2}{M^2}+\frac{km}{2M} & \frac{km^2}{M^2}+\frac{km}{2M} \\ \frac{km^2}{M^2}+\frac{km}{2M} & \frac{km^2}{M^2}+\frac{km}{2M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2: \begin{pmatrix} -\frac{km}{2M} & \frac{km}{2M} \\ \frac{km}{2M} & -\frac{km}{2M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר - קיבלנו את שני אופני התנודה האורכיים, והם הנ"ל :



והתנועה באופן כללי היא

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = A\vec{V}_1 e^{i\omega_1 t} + B\vec{V}_2 e^{i\omega_2 t}$$

כאשר A,B נקבעים מתנאי ההתחלה, ומתארים את האמפליטודה והפאזה של שני אופני התנודה הנורמליים.