גלים אקוסטיים בפלסמה

בכתה דנתנו בגלים אלקטרוסטטים בתדירות גבוהה $\omega_p \gg \omega$ והנחנו לכן שהאלקטרונים נעים מהר מהתנודות השדה כך שהם רואים שדה קבוע ומתפלגים עפ"י מקסוול-בולצמן. כאן לא נזניח עוד את מסת האלקטרונים ביחס לפרוטונים ונקבל את יחס הדיספרסיה במקרה זה..

המשוואות:

$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i U_i) = 0$ — מ' הרצף ליונים

$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e U_e) = 0$ — מ' הרצף לאלקטרונים

$\cancel{n_i} M \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x}\right) = -e\cancel{n_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ — מ' תנועה ליונים

$n_e m \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x}\right) = e n_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma K_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x}$ — מ' תנועה לאלקטרונים

נזניח את טמפ' היונים ביחס לאלקטרונים

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e - n_i)$ — מ' פואסון

נשתמש בתורת ההפרעות: $\varphi = 0 + \varphi_1$, $n_i = n_0 + n_{i1}$, $n_e = n_0 + n_{e1}$, $U_i = 0 + U_{i1}$, $U_e = 0 + U_{e1}$

נציב למשוואות ונשאר עם הסדר הראשון:

(1) $\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial U_{i1}}{\partial x} = 0$

(2) $\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial U_{e1}}{\partial x} = 0$

(3) $M \frac{\partial U_{i1}}{\partial t} = -e \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$

(4) $m n_0 \frac{\partial U_{e1}}{\partial t} = e n_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \gamma K_B T_e \frac{\partial n_{e1}}{\partial x}$

(5) $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 4\pi e (n_{e1} - n_{i1})$

נציב פתרון גלי $\sim e^{i(kx-\omega t)}$ ונקבל על משוואות אלגבריות:

(1) $-i\omega n_{i1} + n_0 i k U_{i1} = 0$

(2) $-i\omega n_{e1} + n_0 i k U_{e1} = 0$

(3) $-i\omega M U_{i1} = -e i k \varphi_1$

(4) $-i\omega m n_0 U_{e1} = e n_0 i k \varphi_1 - \gamma K_B T_e i k n_{e1}$

(5) $-k^2 \varphi_1 = 4\pi e (n_{e1} - n_{i1})$

מ(1) נקבל $n_0 k U_{i1} = \omega n_{i1} \Leftarrow U_{i1} = \frac{\omega n_{i1}}{k n_0}$. נציב ל(3) ונקבל:

$\omega M \frac{\omega n_{i1}}{k n_0} = e k \varphi_1 \Leftarrow$ (#) $n_{i1} = \frac{e k^2 n_0}{\omega^2 M}\varphi_1$

מ(2) נקבל $U_{e1} = \frac{\omega n_{e1}}{k n_0}$. נציב ל(4) ונקבל: $-\omega m \frac{\omega n_{e1}}{k} = e n_0 k \varphi_1 - \gamma K_B T_e k n_{e1}$

$\Leftarrow \left(\gamma K_B T_e k - \frac{\omega^2 m}{k}\right) n_{e1} = e n_0 k \varphi_1 \Leftarrow$ (*) $n_{e1} = \frac{e n_0 k \varphi_1}{\gamma K_B T_e k - \frac{\omega^2 m}{k}}$

נציב את (#) ואת (*) ל(5) ונקבל:

$-k^2 \varphi_1 = 4\pi e \left(\frac{e n_0 k \varphi_1}{\gamma K_B T_e k - \frac{\omega^2 m}{k}} - \frac{e k^2 n_0}{\omega^2 M}\varphi_1\right) \Leftarrow -1 = 4\pi e^2 n_0 \left(\frac{1}{\gamma K_B T_e k^2 - \omega^2 m} - \frac{1}{\omega^2 M}\right)$

$$\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega^2}=\frac{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}+1}{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}} \leftarrow \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega^2}=\frac{1}{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}}+1 \leftarrow -1=\frac{1}{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}}-\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega^2}$$

$$\underline{\omega^2=\omega_{p_i}^2\,\frac{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}}{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}+1}} \leftarrow$$

בסדר. עבור $m\to 0$, $\omega_{p_e}\to\infty$ (מקבלים אותו יחס דיספרסיה כמו שקיבלנו

בשיעור (עבור $T_i=0$).

נסתכל על שני גבולות:

1. $\lambda_0 K \ll 1$: במקרה זה אפשר להזניח את $\lambda_0^2K^2$ מהמכנה (קטן מאוד ביחס ל-1

ונשאר רק הסדרים הגבוהים יותר) ונקבל

$$\omega^2\approx\omega_{p_i}^2\,\frac{\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}} \underset{\omega\ll\omega_{p_e}}{\approx} \omega_{p_i}^2\left(\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}\right)\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}\right)\approx\omega_{p_i}^2\left(\lambda_0^2K^2-\frac{\omega^2}{\omega_{p_e}^2}\right)$$

ומכאן ש $\omega^2\left(1+\frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{p_e}^2}\right)=\omega_{p_i}^2\lambda_0^2K^2 \rightarrow$

$$\underline{\omega=\frac{\omega_{p_i}\lambda_0K}{1+\frac{m}{M}}}$$

תוצאה דומה לזו שקיבלנו בשיעור עם תיקון מסה של יחס מסת האלקטרון והפרוטון.

2. $1\ll\lambda_0K$: במקרה זה אפשר להזניח את ה-1 מהמכנה ונקבל

$\underline{\omega=\omega_{p_i}}$ כמו שקיבלנו בשיעור.

אי-יציבות 2 קרניים במודל הנוזל

נניח פלסמה קרה עם צפיפות ממוצעת של יונים ואלקטרונים n_0 ומהירות ממוצעת אפס. נכניס קרן אלקטרונים עם צפיפות ממוצעת של אלקטרונים ויונים n_{0b} ומהירות ממוצעת v_0. נמצא את יחס הדיספרסיה לגלים אלקטרוסטטיים, ב-1D, כאשר היונים נייחים.

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \frac{\partial n_e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e)=0\\&(2)\quad \frac{\partial n_b}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_b v_b)=0\end{aligned}\right\}\quad \text{א. רציפות}$$

$$\left.\begin{aligned}&(3)\quad n_e\left(\frac{\partial v_e}{\partial t}+v_e\frac{\partial v_e}{\partial x}\right)=-\frac{e n_e}{m_e}E\\&(4)\quad n_b\left(\frac{\partial v_b}{\partial t}+v_b\frac{\partial v_b}{\partial x}\right)=-\frac{e n_b}{m_e}E\end{aligned}\right\}\quad \text{ב. תנועה}$$

בהנחת טמפ' הפלסמה והאלומה $\left(\frac{\partial p}{\partial x}=0\right)$

$$(5)\quad \frac{\partial E}{\partial x}=4\pi e(n_0+n_{0b}-n_e-n_b)\qquad \text{ג. פואסון}$$

לינאריזציה:

$$E=0+E_1$$
$$n_e=n_0+n_1$$
$$n_b=n_{0b}+n_{1,b}$$
$$v_e=0+v_1$$
$$v_b=v_0+v_{1b}$$

נציב במשוואות:

$$(1)\quad \frac{\partial n_1}{\partial t}+n_0\frac{\partial v_1}{\partial x}=0$$
$$(2)\quad \frac{\partial n_{1,b}}{\partial t}+n_{0,b}\frac{\partial v_{1,b}}{\partial x}+v_0\frac{\partial n_{1,b}}{\partial x}=0$$
$$(3)\quad \cancel{n_0}\frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{e\cancel{n_0}}{m_e}E_1$$
$$(4)\quad \cancel{n_{0b}}\frac{\partial v_{1b}}{\partial t}+\cancel{n_{0b}}v_0\frac{\partial v_{1b}}{\partial x}=-\frac{e\cancel{n_{0b}}}{m_e}E_1$$
$$(5)\quad \frac{\partial E_1}{\partial x}=-4\pi e(n_1+n_{1b})$$

נחפש פתרון מהצורה $\sim e^{i(kx-\omega t)}$ עם מקדמים קבועים. נציב במשוואות ונקבל את יחס הדיספרסיה:

$$1=\frac{4\pi e^2}{m_e}\left(\frac{n_0}{\omega^2}+\frac{n_{0b}}{(\omega-kv)^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ 1=\frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega-kv)^2}\ \Rightarrow\ k=\frac{\omega}{v_0}\left[1\pm\frac{\omega_{pb}}{\sqrt{\omega^2-\omega_{p0}^2}}\right]$$

כפי שקיבלנו למודל זה בעבר.

נניח ש-ω של הגל ממשי ידוע. עבור $\omega<\omega_{p0}$ נקבל פתרון מרוכב ל-k, כלומר יש פתרון דועך אבל יש פתרון לא יציב עבור הגל האלקטרוסטטי. בגלל ההנחות הפיזיקליות שעשינו כאן אין מידע נוסף. אם רוצים לקבל את הפרטים צריך לחשב במסגרת המודל הקינטי, כפי שעשינו בעבר ולהתחשב בצורה המעשית של פונקצית ההתפלגות (ולא רק מומנטים) ע"מ לקבל תנאי של צפיפות הקרן כך שתהיה אי-יציבות וכו'.