גוף קשיח בדו-מימד

תמיד ניתן לפרק תנועה של גוף קשיח לתנועה של מרכז המסה וסיבוב סביב מרכז המסה.

בדו-מימד מומנט האינרציה מוגדר ביחס לציר $\hat z$ (או ציר מקביל לו):

$I=\sum_i m_i r_i^2=\int r^2 dm$, כאשר r הוא המרחק מהראשית במישור xy.

אם $\hat z$ הוא ציר הסיבוב אז $\vec\omega=\omega\hat z$.

כעת נוכל לפרק את האנרגיה הקינטית לתנועה של מרכז המסה וסיבוב סביבו בנפרד:

$$T=T_{cm}+T_{rot}=\frac{mV_{cm}^2}{2}+\frac{I_{cm}\omega^2}{2}$$

כאשר I_{cm} מומנט האינרציה המחושב ביחס למרכז המסה.

התנע במקרה זה הוא בכיוון $\hat z$ וניתן לרשום באמצעות I באופן:

$$\vec J=\underbrace{\vec L}_{\text{תנע של מרכז המסה}}+\underbrace{\vec S}_{\text{תנע ביחס למרכז המסה}}=M\vec R_{cm}\times\vec V_{cm}+I\vec\omega\underset{2D}{=}MR_{cm}V_{cm}\hat z+I_z\omega\hat z$$

כאשר $\vec V_{cm},\vec R_{cm}$ מיקום ומהירות מרכז המסה בהתאמה.

<u>הערה</u>: גוף קשיח מסתובב באותה מהירות זוויתית סביב כל ציר המקביל לציר הנתון.

<u>דוגמא</u>

נמצא את תדירות התנודות הקטנות של דיסקה כאשר מרכז המסה שלה מרוחק מרחק a ממרכזה, רדיוס R, מסה M ומומנט אינרציה ביחס למרכז המסה הוא I.

<u>פתרון</u>: המרחק מציר הסיבוב של מרכז המסה הוא:

$$l=\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}$$

$$\to V_{cm}=l\dot\theta=\dot\theta\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos\theta}$$

$$\to T=\frac{M}{2}V_{cm}^2+\frac{I}{2}\dot\theta^2=\frac{M}{2}(R^2+a^2-2aR\cos\theta)\dot\theta^2+\frac{I}{2}\dot\theta^2$$

$$U=-Mga\cos\theta$$

$$\to L=T-U=\frac12[M(a^2+R^2-2aR\cos\theta)+I]\dot\theta^2+Mga\cos\theta$$

יש נק' שיווי משקל יציבה ב- $\theta=0$. נקרב $\cos\theta\approx1$ באנרגיה הקינטית (אין צורך בסדר הבא, אנחנו מעוניינים בתיקונים עד סדר שני) ו- $\cos\theta\approx1-\frac12\theta^2$ באנרגיה הפוטנציאלית:

$$L\approx\frac12[M(a-R)^2+I]\dot\theta^2-\frac{Mga}{2}\theta^2+\overbrace{Mga}^{\text{קבוע בלגרנז'יאן}}$$

קיבלנו לגרנז'יאן מהצורה $L=\frac12\tilde M\dot\theta^2-\frac12\tilde K\theta^2$ כמו באוסצילטור הרמוני. מכאן שתדירות התנודות הקטנות: $\omega^2=\frac{\tilde K}{\tilde M}=\frac{Mga}{M(a-R)^2+I}$

גוף קשיח ב-3D

תזכורת: מומנט האינרציה יהיה טנזור מסדר 2 המוגדר לפי:

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\vec{\omega}^t\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}=\frac{1}{2}\sum_{ij}\omega_i I_{ij}\omega_j$$

את I_{ij} נחשב על-פי $I_{ij}=\sum_{\text{על נקודות הגוף}} m(r^2\delta_{ij}-r_ir_j)$

כך למשל, נקבל: $I_{xx}=\sum m(x^2+y^2+z^2-x^2)=\sum m(y^2+z^2)$

באופן כללי נקבל:

$$I=\begin{pmatrix}\sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz\\ -\sum mxy & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz\\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m(x^2+y^2)\end{pmatrix}$$

במעבר לרצף, הסכימה תהפוך לאינטגרציה

$$I_{ij}=\int\rho(\vec{r})(r^2\delta_{ij}-r_ir_j)d^3r$$

מערכת צירים תיקרא ראשית אם היא כזאת שבה I מלוכסנת:

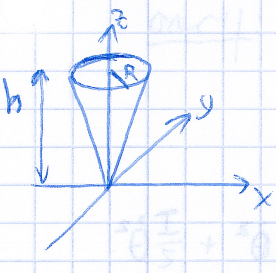
$$I=\begin{pmatrix}I_{x'x'} & 0 & 0\\ 0 & I_{y'y'} & 0\\ 0 & 0 & I_{z'z'}\end{pmatrix}$$

ניתן להוכיח כי כאשר יש ציר סימטריה לגוף הוא גם ציר ראשי.

* אם נתון סיבוב סביב ציר $\hat{n}$: $\vec{\omega}=\omega\hat{n}$ אז מומנט האינרציה סביב הציר $\hat{n}$ מתקבל ע"י: $I_{\hat{n}}=\sum_{ij}\hat{n}_i I_{ij}\hat{n}_j$ (או $\hat{n}^T I\hat{n}$). כך שגם באופן אפקטיבי להחזיר בעיה תלת ממדית לחד-ממדית.

* התנע של הסיבוב ניתן ע"י המכפלה של הטנזור I בוקטור $\vec{\omega}$: $\vec{L}=\overleftrightarrow{I}\vec{\omega}$

<u>דוגמה - מומנט התמד של חרוט המשמש:</u>



נסמן את מסת החרוט ב-M, גובהו ב-h ורדיוס בסיסו ב-R.

נבחר את הראשית בקודקוד החרוט ואת ציר z בתור ציר הסימטריה של החרוט.

צפיפות החרוט תינתן ע"י: $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{\pi}{3}R^2h}$

$$I_{zz}=\rho\int_0^h dz\iint(x^2+y^2)dxdy=\rho\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{Rz}{h}}r^2\cdot rdr=2\pi\rho\int_0^h dz\int_0^{\frac{Rz}{h}}r^3dr=$$

$$=2\pi\rho\int_0^h\frac{R^4z^4}{4h^4}dz=\frac{2\pi\rho R^4}{4h^4}\frac{h^5}{5}=\frac{\pi}{10}\rho R^4h=\frac{3}{10}MR^2$$

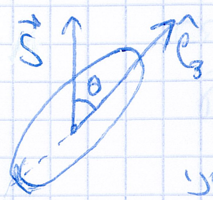
$$I_{xx}=\rho\int_0^h dz\int(y^2+z^2)dxdy=\rho\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{Rz}{h}}(r^2\sin^2\varphi+z^2)rdr=\frac{\pi}{20}\rho\frac{R^4}{h^4}h^5+\frac{\pi}{3}\rho\frac{R^2}{h^2}h^5$$

$$=\frac{3}{5}M\left(1+\frac{R^2}{4h^2}\right)h^2$$

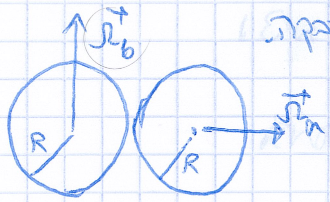
מסימטריה נקבל $I_{xx}=I_{yy}$. בנוסף, אלו צירים ראשיים שכן האיברים הלא אלכסוניים יכילו אינטגרלים מהצורה: $\int_{-(z^2R^2/h^2-y^2)^{1/2}}^{(z^2R^2/h^2-y^2)^{1/2}}x\,dx=0$ [אינטגרל של פונק' אי-זוגית בתחום סימטרי]

דוגמא ממבחן (2012)

א. הראו שעבור סביבון סימטרי ($I_1=I_2\neq I_3$) חופשי, הזווית θ בין התנע סביב מרכז המסה, $\vec{S}$ ובין ציר הסימטריה של הסביבון, $\hat{e}_3$, קבועה



ב. שני גופים כדוריים מתקרבים לפגוש זה לזה, נדבקים באופן קשיח ויוצרים סביבון סימטרי. לכל אחד מהגופים יש מסה M, רדיוס R ומומנט התמד $I_{cm}=\frac{2MR^2}{5}$. לפני ההדבקה, למהירויות הזוויתיות של הכדורים $\vec{\Omega}_{a,b}$, גודל Ω_0 שווה וכיוונן מאונכים זה לזה. מהם מומנטי ההתמד $I_{1,2,3}$ ביחס למרכז המסה של הסביבון הסימטרי הנוצר? מהו Ω של הסביבון הנוצר ומהו החלק של האנרגיה שעבר לחום בתהליך ההדבקה.



פתרון

א. נבחר את $\hat{e}_1$ במישור של $\vec{S}$ ו-$\hat{e}_3$ ומאונך ל-$\hat{e}_3$.
נבחר $\hat{e}_2$ מאונך למישור. במערכת זו:

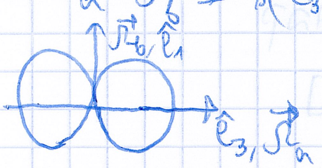
$$S_1=I_1\Omega_1\rightarrow\Omega_1=\frac{S_1}{I_1}=\frac{S\sin\theta}{I_1}\ ;\ S_2=I_2\Omega_2=0\rightarrow\Omega_2=0\ ;\ S_3=I_3\Omega_3\rightarrow\Omega_3=\frac{S_3}{I_3}=\frac{S\cos\theta}{I_3}$$

האנרגיה של הסביבון נשמרת ולכן:

$$E=\frac{1}{2}\left(\Omega_1^2I_1+\Omega_3^2I_3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{S^2\sin^2\theta}{I_1}+\frac{S^2\cos^2\theta}{I_3}\right)=\text{Const}$$

מכיוון שבמקרה $I_1\neq I_3$ בהכרח מתקיים $\theta=\text{const}$.

ב. התנע הכולל של המערכת נשמר: $\vec{J}=\vec{S}_a+\vec{S}_b=I\Omega_0(\hat{e}_3+\hat{e}_1)$



מומנטי ההתמד של הסביבון החדש ביחס למרכז המסה:

$$I_1=I_2=2MR^2+2I=2\cdot\frac{5}{2}I+2I=7I\ ;\ I_3=2I$$

$$\Omega_3=\frac{M_3}{I_3}=\frac{I\Omega_0}{2I}=\frac{\Omega_0}{2}\qquad\Omega_1=\frac{M_1}{I_1}=\frac{I\Omega_0}{7I}=\frac{\Omega_0}{7}$$

$$\rightarrow\Omega^2=\Omega_1^2+\Omega_3^2=\Omega_0^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{49}\right)\rightarrow\Omega=\Omega_0\frac{\sqrt{53}}{14}$$

ההבדל באנרגיה הקינטית הופך לחום:

$$\Delta E=2\cdot\frac{1}{2}I\Omega_0^2-\frac{1}{2}\left(I_3\Omega_3^2+I_1\Omega_1^2\right)=I\Omega_0^2\left(1-\frac{1}{2}\left[2\cdot\frac{1}{4}+7\cdot\frac{1}{49}\right]\right)=I\Omega_0^2\,\frac{19}{28}$$

משוואות אוילר

מש' אוילר הן מש' עבור ההתפתחות בזמן של $\vec{\omega}$ במע' הצמודה לגוף עבור גוף המסתובב במע' המעבדה בנוכחות מומנט כח $\vec{N}$ נרקום: $\dot{\vec{S}} = \vec{N}$

כדי לעבור למע' הצמודה לגוף (שהיא מע' מסתובבת ולא אינרציאלית) יש לקחת בחשבון את סיבוב הגוף. השינוי בזמן של כל וקטור $\vec{\alpha}$ במע' המעבדה מתורגם לשינוי בזמן במע' המסתובבת ע"י:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} \to \frac{d\vec{\alpha}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\alpha}$$

ולכן במע' הצמודה לגוף, התנע מקיים $\dot{\vec{S}} + \vec{\omega} \times \vec{S} = \vec{N}$,

ברכיבים נוכל לרשום $\dot{S}_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i$

נציב $\vec{S} = I\vec{\omega}$ ונקבל $\sum_j I_{ij}\dot{\omega}_j + \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijk} I_{kl} \omega_j \omega_l = N_i$

במע' צירים ראשיים, מע' המשוואות נהיית פשוטה יותר:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3 = N_1$$
$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 = N_2$$
$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2 \omega_1 = N_3$$

כמה מסקנות:

* עבור גוף חופשי ($\vec{N}=0$) עם $I_1 = I_2 = I_3$ (למשל כדור או קוביה) מתקיים $\dot{\vec{\omega}} = 0$ ← מהירות זוויתית קבועה.

* עבור סביבון אסימטרי חופשי (בה"כ $I_1 < I_2 < I_3$), סיבוב קבוע ($\vec{\omega}$ קבוע) יתכן רק אם הוא מסתובב סביב אחד הצירים הראשיים [כי אז לפחות שניים מבין $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ שווים אפס והמשוואה הרכיב המקביל של $\vec{\omega}$ שונה מאפס מקבל מש' אוילר באותו כיוון].

* עבור סביבון סימטרי ($I_1 = I_2 \neq I_3$) חופשי נקבל $\dot{\omega}_3 = 0$ ← $\omega_3 = const$.
בשני הכיוונים האחרים נקבל: $\dot{\omega}_1 = \frac{I - I_3}{I}\omega_2 \omega_3$ $\dot{\omega}_2 = \frac{I_3 - I}{I}\omega_1 \omega_3$
נשלב את שתי המשוואות ונציב תקנ"י: $\ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{I - I_3}{I}\omega_3\right)^2 \omega_1$
שזוהי מש' של אוסצילטור הרמוני. כלומר, וקטור המהירות הזוויתית מבצע פרצסיה סביב ציר 3. נדון יותר בפירוט בקורס הבא.