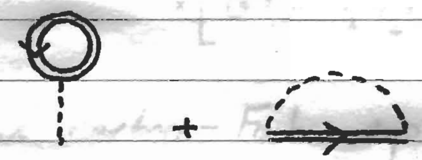
מכיון שבקרוב Hartree Fock ה-Σ ממשית ותלויה רק ב k ההשפעה היחידה שלה היא הזזה של אנרגיות האלקטרונים החופשיים בשיעור הניתן ע"י $\Sigma(k)$ $\Leftarrow$ קירוב זה שקול לתיקון ההמילטוניאן

$$H=\sum_{k\sigma}\left[-\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\Sigma_{HF}(k)\right]C^\dagger_{k\sigma}C_{k\sigma}$$

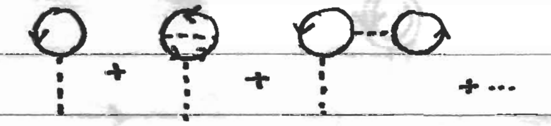
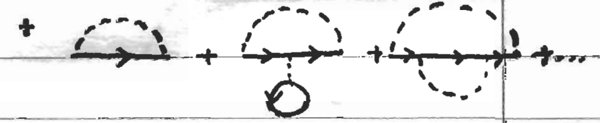
כאשר
$$\Sigma_{HF}(k)=U(0)\sum_{k'\sigma'}n^0_{k'\sigma'}-\sum_{k'}U(k-k')\,n^0_{k'\sigma}$$

שימו לב כי Σ_{HF} נקבעת ע"י מספרי האכלוס של המערכת החופשית n^0_k. ניתן להראות כי G המתקבלת מקירוב זה מתארת מספר שונה מהנתון וגם מופרות זהויות אחרות הקובעות את נגזרות החלקיקים - Ward identities. מכיון ש G קשורה למספר החלקיקים הפרת זהויות אלה גוררת הפרה של שימור מספר החלקיקים.
קירוב המקיים את חוקי השימור ניתן להתקבל ע"י תנאי self consistent:
Σ הקובעת את G מחושבת בעזרת G עצמה תוך קבלת יחס סגור:

בלשון דיאגרמטית:

$\Sigma =$  $= U(0)\sum_{k'\sigma'}n_{k'\sigma'}-\sum_{k'}U(k-k')\,n_{k'\sigma}$

יש להחליף באמצעות self consistent

$=$  $+$ 

בתרגיל תתבקשו להראות כיצד לקבל קירוב זה ממשוואות התנועה ל G.

הדרכה: א. הראו כי הפונקציות אינטגרליות G במקרה הפרמיוני מקיימות $(x=\vec{r},\tau)$

$$\left[\partial_{\tau_2}+H_0(r_2)\right]G(x_1,x_2)-\int dx'\,U(x_2-x')\,K(x_1,r'\tau_2,r_2\,\tau_2+\delta,r'\,\tau_2+\delta)=\delta(x_1-x_2)$$

כאשר ה two particle G.F הוא
$$K(x_1x_2x_3x_4)=\langle T_\tau\,\Psi(x_1)\Psi(x_2)\Psi^\dagger(x_3)\Psi^\dagger(x_4)\rangle$$

ב. במקרה של חלקיקים חופשיים הינו שקולים (בדקנו!)

$$K(X_1 X_2 X_3 X_4) = G_0(X_1 X_4)\, G(X_2 X_3) - G_0(X_1 X_3)\, G_0(X_2 X_4)$$

ג. נניח כי יש גם פוטנציאל בקירוב גם עבור המקרה הכללי אינטראקציות לקבל

$$\left[\partial_{\tau_2} + H_0(r_2)\right] G(X_1 X_2) = \delta(X_1 - X_2) - \int dx'\, U(X_2 - X')\Big[G(X_1, r'\tau_2+\delta)\, G(r'\tau_2, r_2\, \tau_2+\delta)$$

$$- G(X_1, r_2\, \tau_2+\delta)\, G(r'\tau_2, r'\tau_2+\delta)\Big]$$

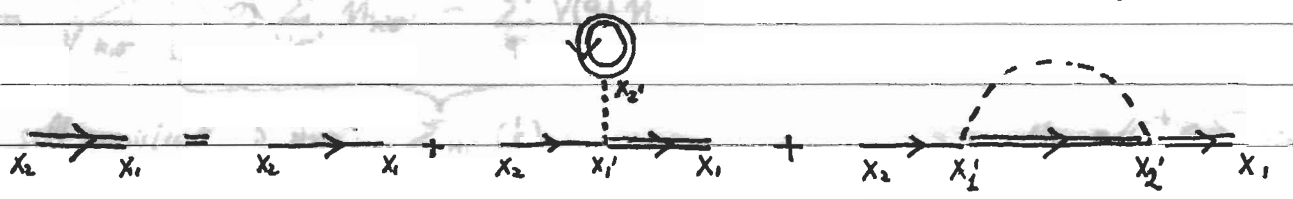
ד. השתמשו ב
כדי להגיע

$$\left[\partial_{\tau_2} + H_0(r_2)\right] G_0(X_1 X_2) = \delta(X_1 - X_2)$$

$$G(X_1 X_2) = G_0(X_1 X_2) + \int dx_1' dx_2'\, G_0(X_1' X_2)\, U(X_1' - X_2')$$

$$\times \Big[G(X_1\, r_1'\tau_1'+\delta)\, G(r_2'\tau_2', r_2'\tau_2'+\delta) - G(X_1, r_2'\tau_2'+\delta)\, G(X_2', r_1'\tau_1'+\delta)\Big]$$

שהוא בדיוק משוואת Dyson ל G בקירוב self consistent Hartree-Fock



אבל לפני כן כדאי להבין לקירוב ה self consistent מתוך ההמילטוניאן:

$$H = \sum_{k\sigma} \frac{k^2}{2M} C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \frac{1}{2V}\sum_{\substack{kk'q\\ \sigma\sigma'}} C^+_{k\sigma}\, C^+_{k'+q\sigma'}\, V(q)\, C_{k'\sigma'}\, C_{k+q\sigma}$$

המטרה שלנו היום לעבור מהמילטוניאן עם הכלל אינטראקציה להמילטוניאן אפקטיבי חסר אינטראקציה
הכולל בתוכו ממוצע של אפקטי האינטראקציה. נשלוט את אחד האינטראקציה רק ל 4 האופרטורים

המעבר כזה להמילטוניאן האפקטיבי

הסכום על כל האיברים האפשריים הכוללים שני אופרטורים ומיצוע על שני האופרטורים הנותרים:

$$c_1^\dagger c_2^\dagger c_3 c_4 \simeq -\langle c_1^\dagger c_3\rangle c_2^\dagger c_4 - \langle c_2^\dagger c_4\rangle c_1^\dagger c_3$$

$$+\langle c_1^\dagger c_4\rangle c_2^\dagger c_3 + \langle c_2^\dagger c_3\rangle c_1^\dagger c_4$$

שימו לב כי לא הורדנו איברים הכוללים $\langle cc\rangle$ או $\langle c^\dagger c^\dagger\rangle$. ממוצעים אלו מתאפסים במצב הנורמלי בגלל שימור מספר האלקטרונים אך הם קיימים ומשמעותיים במצב של על-מוליכות.
המיצוע הזה ניתן לתאר כשדה אפקטיבי: "mean field" בו האלקטרונים נעים.
עבור האינטראקציה שלנו נקבל את הקירוב

$$\frac{1}{2V}\sum_{\substack{kk'q\\ \sigma\sigma'}} V(q)\Big[-\langle c_{k\sigma}^\dagger c_{k'\sigma'}\rangle c_{k'+q\sigma'}^\dagger c_{k+q\sigma} - \langle c_{k'+q\sigma'}^\dagger c_{k+q\sigma}\rangle c_{k\sigma}^\dagger c_{k'\sigma'}$$

$$+\langle c_{k\sigma}^\dagger c_{k+q\sigma}\rangle c_{k'+q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'} + \langle c_{k'+q\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'}\rangle c_{k\sigma}^\dagger c_{k+q\sigma}\Big]$$

$$= -\frac{1}{V}\sum_{\substack{kq\\ \sigma}} V(q)\langle c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}\rangle c_{k+q\sigma}^\dagger c_{k+q\sigma} + V(0)\frac{1}{V}\sum_{\substack{kk'\\ \sigma\sigma'}}\langle c_{k'\sigma'}^\dagger c_{k'\sigma'}\rangle c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k\sigma}\underbrace{\Big[V(0)\sum_{k'\sigma'} n_{k'\sigma'} - \sum_q V(q)\, n_{k+q\sigma}\Big]}_{\Sigma_{HF}(k)} c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$$

כאשר $n_{k\sigma}=\langle c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}\rangle$ $\Sigma_{HF}(k)$ נקבע ה self consistent

$$H_{HF} = \sum_{k\sigma}\Big[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Sigma_{HF}(k)\Big] c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$$

שימו לב כי הפוטנציאל בהמילטוניאן זה תלוי בפתרונות ביחס להמילטוניאן כך שהוא נדרשת
לפתרון self consistent - דבר שלא נעשה באופן מלא:

באילו תנאים קירוב H-F הינו קירוב טוב? מסתבר כי קירוב זה הופך למדויק עבור מספר גבולות (בדוק את הגבולות) הגבול של צפיפות חלקיקים גבוהה אם האינטראקציה ארוכת טווח או הגבול של צפיפות נמוכה אם האינטראקציה קצרת טווח.

השאלה השני הינו אינטואיטיבי: אם האינטראקציה קצרת טווח הרי שבצפיפות חלקיקים נמוכה החלקיקים כמעט ולא חווים אינטראקציה. הגבול השני מעט פחות פשוט להבנה ולכן נרשום את ההמילטוניאן בנוכחות אינטראקציה קולומבית

$$H = \sum_{k\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} + \underbrace{\frac{1}{2V}}_{\text{נפח}} \sum_{\substack{k k' q \\ \sigma\sigma'}} c^\dagger_{k\sigma} c^\dagger_{k'+q\,\sigma'} \frac{4\pi e^2}{q^2} c_{k'\sigma'} c_{k+q\,\sigma}$$

$$= \frac{e^2}{2a_0 r_s^2}\left[\sum_{\bar k\sigma} \bar k^2 c^\dagger_{\bar k\sigma} c_{\bar k\sigma} + \frac{3r_s}{N}\sum_{\substack{\bar k \bar k' \bar q \\ \sigma\sigma'}} c^\dagger_{\bar k\sigma} c^\dagger_{\bar k'+\bar q\,\sigma'} \frac{1}{\bar q^2} c_{\bar k'\sigma'} c_{\bar k+\bar q\,\sigma}\right]$$

כאשר $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ Bohr radius

r_0: מרחק ממוצע בין חלקיקים $\Rightarrow V = N\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3$

$r_s = \frac{r_0}{a_0}$

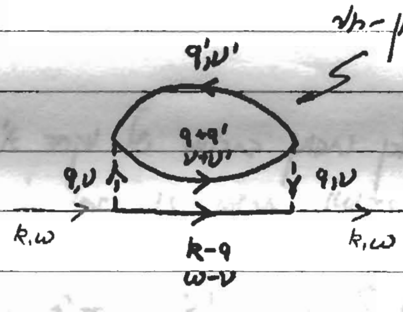
ו- $\bar k = k\cdot r_0$

כלומר נרמלנו את המשתנים הינן חסרות מימדים וניתן לראות כי בגבול $r_s \to 0$ דהיינו צפיפויות גבוהות איבר האינטראקציה הופך זניח ביחס לאיבר הקינטי.

לעומת זאת עבור אינטראקציה קצרת טווח: $V(q) \sim const$ איבר האינטראקציה פרופורציוני ל $\frac{1}{r_s}$ ולכן הופך זניח בגבול $r_s \to \infty$ צפיפות נמוכה.

עד כה ראינו כי במסגרת קירוב H-F (גם ה self consistent) Σ הינו ממשי ותלוי ב k בלבד. כתוצאה מכך ה q.p הינם מצבים עצמיים מדויקים של המערכת כיוון ש, כאשר ההבדל היחיד בינם לאלקטרונים החופשיים הינו בדיספרסיה $\omega = \xi(k)$ (ומיקום הפוטנציאל הכימי שלהם). המצב משתנה כאשר נכלול ב Σ דיאגרמות מסדר שני באינטראקציה מהסוג הבא:

האלקטרון מעורר זוג אלקטרון-חור



נניח לשם פשטות כי האינטראקציה קצרת טווח $V(q)=g$
נראה לאחר מכן כיצד נמנע הנחה מפשטת.

התרומה ל-Σ:

$$\Sigma^{(2)}(k,i\omega)=-g^2\frac{1}{\beta V}\sum_{q,\nu}\mathcal{G}_0(k-q,i\omega-i\nu)\,\chi_0(q,i\nu)$$

ללא הספין

כאשר χ הינו תרומת ה bubble

$$\chi_0(q,i\nu)=\frac{1}{\beta V}\sum_{k,\omega}\mathcal{G}_0(k,i\omega)\,\mathcal{G}_0(k+q,i\omega+i\nu)$$

$$=\frac{1}{\beta V}\sum_{k,\omega}\frac{1}{i\omega-\xi^0(k)}\,\frac{1}{i(\omega+\nu)-\xi^0(k+q)}$$

$$=\frac{1}{\beta V}\sum_{k,\omega}\frac{1}{\xi^0(k+q)-\xi^0(k)-i\nu}\left[\frac{1}{i(\omega+\nu)-\xi^0(k+q)}-\frac{1}{i\omega-\xi^0(k)}\right]$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{k}\frac{n_f(\xi^0(k))-n_f(\xi^0(k+q))}{i\nu+\xi^0(k)-\xi^0(k+q)}$$

סכום על ω_n נותן

$$\Leftarrow\quad \Sigma^{(2)}(k,i\omega)=-g^2\frac{1}{\beta V^2}\sum_{\substack{q q'\\ \nu}}\frac{1}{i(\omega-\nu)-\xi^0_{k-q}}\,\frac{n_f(\xi^0_{q'})-n_f(\xi^0_{q'+q})}{i\nu+\xi^0_{q'}-\xi^0_{q'+q}}$$

$$=-g^2\frac{1}{\beta V^2}\sum_{\substack{q q'\\ \nu}}\frac{n_f(\xi^0_{q'})-n_f(\xi^0_{q'+q})}{i\omega+\xi^0_{q'}-\xi^0_{q'+q}-\xi^0_{k-q}}\left[\frac{1}{i(\omega-\nu)-\xi^0_{k-q}}+\frac{1}{i\nu+\xi^0_{q'}-\xi^0_{q+q'}}\right]$$

$$=-g^2\frac{1}{V^2}\sum_{q q'}\frac{n_f(\xi^0_{q'})-n_f(\xi^0_{q'+q})}{i\omega+\xi^0_{q'}-\xi^0_{q'+q}-\xi^0_{k-q}}\left[n_f(\xi^0_{q+q'}-\xi^0_{q'})-n_f(-\xi^0_{k-q})\right]$$

ב $T=0$ האינטגרנד אינו מתאפס רק באחד משני המקרים הבאים:

א. $|\vec{q}'|<k_F,\quad |\vec{q}+\vec{q}'|>k_F,\quad |\vec{k}-\vec{q}|>k_F$

ב. $|\vec{q}'|>k_F\quad |\vec{q}+\vec{q}'|<k_F,\quad |\vec{k}-\vec{q}|<k_F$

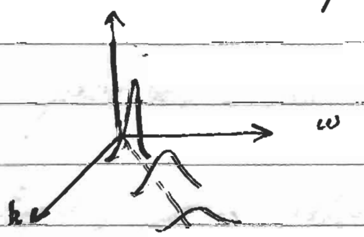
אנו מעוניינים לחשב את $A(k,\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,G^R(k,\omega)$ ולכן נתבונן בתרומה של מקרה א׳,
לתרומתו ל $\mathrm{Im}\,\Sigma^R(k,\omega)$ ממנו. תחת השימוש אוילר לו׳+ש׳וש׳ו תרומה זו היא

$$-\frac{g^2\pi}{V^2}\sum_{\substack{|\vec{q}'|<k_F \\ |\vec{l}|>k_F \quad |\vec{k}+\vec{q}'-\vec{l}|>k_F}} \delta\left(\omega+\xi^0_{q'}-\xi^0_{l}-\xi^0_{k+q'-l}\right) \qquad \vec{l}=\vec{q}+\vec{q}'$$

מתוך האילוצים על התנע ברור כי בנקודת הדלתא אפשרית רק אם סדרש. עבור ω נתון הערך המקסימלי ש $\xi^0_{q'}$ יכול לקבל הוא ω (כאשר ξ^0_l ו $\xi^0_{k+q'-l}$ מינימליים) ולכן כל עוד $\omega \ll E_F$ האינטגרציה על q' מוגבלת לאיזור ברוחב $\frac{\omega}{v_F}$ סביב k_F. שיקול דומה תקף גם עבור האינטגרציה על l.
קיבלנו שכן כי ה phase-space constraints תורמים מאוד לאילו מולכים בהשגת מימוש לתוצאה

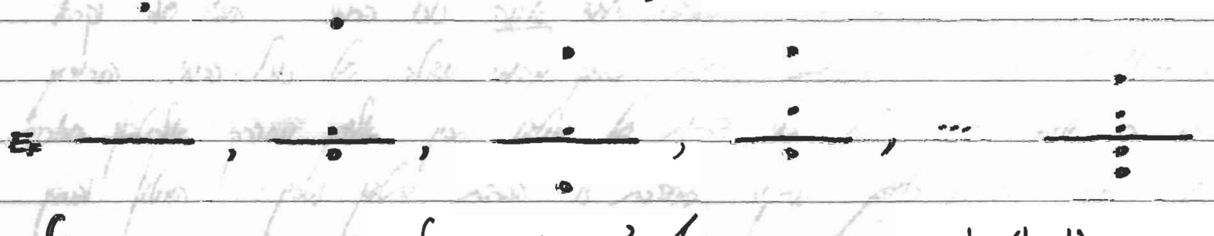
$$\frac{1}{\tau_k} = \mathrm{Im}\,\Sigma(k,\omega) \simeq C_k\,\omega^2$$

בנקודה של k



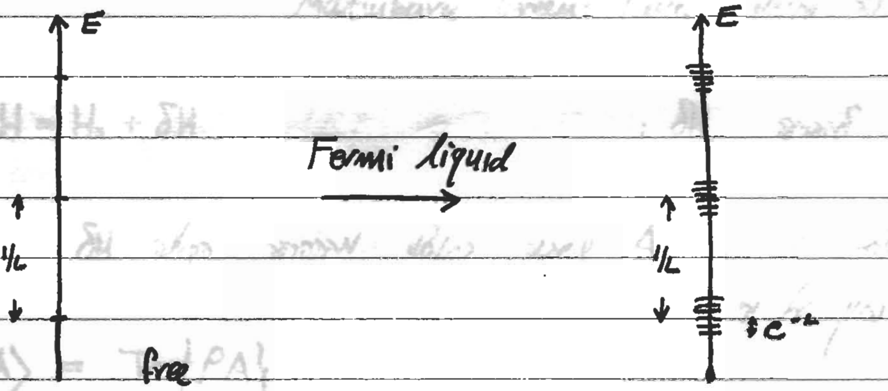
אנו רואים עכשיו כי בשלושה ממדים (וכל זה בתרומה מסדר שני שחישבנו אבל שאלה כוללת ל Σ) מערכת האלקטרונים מקיימת את התנאי $\frac{1}{\tau_k(\omega)} < \omega$ ולכן יש משמעות לדבר על q.p בקבוע עבור ס-ש׳ כלומר ל q.p יש משמעות ברור. אם הדלתא הערך לאינסופי זה q.p נוגעים למצבים מעוררים שמוצאים של המערכת. ניתן להראות כי ב T סופי $\frac{1}{\tau} \sim \max(\omega^2, T^2)$
מה משמעות התוצאה שקיבלנו?

במערכת הנמצאת במצבים הרבה חלקיקים מעל מצב היסוד מורכבים מאילו מעל רק מעל E_F בתוספת עירוי חלקיק-חור.
מצבים אלה מתאימים בגבול התרמודינמי עם הגדלת אנרגיה המצב מעל ל E_F



המצב שמעל E_F $\epsilon_k \sim k_F(k_F+k)$ במרחק קטן מאוד מצבים מתאימים לרמות המערכה $\sim\frac{1}{L}$ כאשר L גודל המערכת

אינטראקציות מסוג נוספות אלה אך ב Fermi liquid המצבים המעוררים אינם מתפזרים באופן רציף על ציר האנרגיה. במקום זאת המצבים המעוררים מתקבצים בקבוצות כשהמרחק בין המצבים בקבוצה קטן אקספוננציאלית בגודל המערכת והמרחק בין קבוצות $\sim \frac{1}{L}$.
קבוצות מצבים מעוררים אלה מיוצגות כל אחת "מצב" q.p.

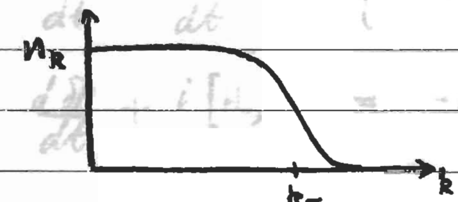


<u>תרגיל</u>: הראו כי בשני מימדים $\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\omega) \approx -C_k\,\omega^2 \ln\left(\frac{\omega}{E_F}\right)$

כך שבדו-מימד התוצאות ל נוזל Fermi liquid ממשיכות להתקיים.

<u>תרגיל</u>: הראו כי במימד אחד $\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega) \sim \omega \ln\left(\frac{\omega}{E_F}\right)$

$$\Leftarrow \quad Z_{k_F} = \left[1 - \frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Sigma(k_F,\omega)\Big|_{\omega=0}\right]^{-1} \sim \ln^{-1}\left(\frac{\omega}{E_F}\right) \xrightarrow{\omega\to 0} 0$$



<u>אין</u> משקל סופי למצב q.p ליד k_F במימד אחד

אין חסר רציפות ב n_k ב k_F (יש סינגולריות בנגזרת)

לכן מערכת של אלקטרונים עם אינטראקציה במימד אחד <u>איננה</u> נוזל פרמי. מתברר שהיא נקראת נוזל טומונגה-Luttinger והיא בעלת תכונות השונות באופן מהותי מאלה של נוזל פרמי. העירורים האלמנטריים בה אינם q.p אלא גלי צפיפות של מטען וספין. אלקטרון שמוכנס למערכת מתפרק לשניים. תכונה חשובה נוספת שלו נקראת הפרדת מטען וספין: המטען והספין מתרחקים בזמנים באופן קלאסי זה מזה.

הן תגלו ימים של הפרדת מטען במימד אחד ומצאו אותה עובדת ב ניסוי [illegible]

בשלב זה אני מעוניין להציג בקצרה את הקשר בין מקדמי תגובת המערכת במסגרת הפורמליזם שפיתחנו עד כה. הנושא זה יהווה בסיס לחישוב במסגרת כללית יותר הנקראת Linear Response Theory ובמסגרתה מחושבת תגובת המערכת להפרעות חיצוניות קטנות. אנו נראה כי תגובת המערכת נתונה ע"י retarded Green's function מתאימה ומכאן שניתן לקשרה לחישוב ה Matsubara Green's func.

נכתוב את המילטוניאן המערכת בהפרעה δH : $H = H_0 + \delta H$

כעת נחשב כיצד ערך התצפית של אופרטור A משתנה כתוצאה מההפרעה הקטנה δH.
ערך התצפית של A נתון ע"י

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\{\rho A\}$$

כאשר ρ היא מטריצת הצפיפות המתפתחת בזמן בהתאם ל

$$\frac{d\rho}{dt} = i[\rho, H]$$

נניח כי δH קטנה ולכן נוכל להשתמש בקירוב במערכת הלא מופרעת ρ_0 ובתיקון קטן.

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

(למשל בגז אלקטרונים חופשיים $\rho_0 = \frac{\sum_k e^{-\beta\epsilon_k}|k\rangle\langle k|}{\sum_k e^{-\beta\epsilon_k}}$, $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$)

$$\Leftarrow \quad \frac{d\rho_0}{dt} + \frac{d\delta\rho}{dt} = i\left\{[\rho_0, H_0] + [\rho_0, \delta H] + [\delta\rho, H_0] + [\delta\rho, \delta H]\right\}$$

בסדר ראשון בגודל הקטן נקבל לכן כשהשתמשנו ב $\frac{d\rho_0}{dt} = i[\rho_0, H_0]$

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + i[H_0, \delta\rho] = -i[\delta H, \rho_0]$$

נרשום את אגף שמאל כנגזרת

$$e^{-iH_0t}\frac{d}{dt}\left(e^{iH_0t}\delta\rho\, e^{-iH_0t}\right)e^{iH_0t} = -i[\delta H, \rho_0]$$

$$\Leftarrow \quad e^{iH_0t}\delta\rho(t)e^{-iH_0t}\Big|_{t=-\infty}^{t} = -i\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{iH_0t'}[\delta H, \rho_0]e^{-iH_0t'}$$

נניח כי $\delta\rho(t\to-\infty)=0$ כי אנו מניחים $\delta H \xrightarrow{t\to-\infty} 0$ ולכן

$$\delta\rho(t) = -i\, e^{-iH_0 t}\int_{-\infty}^{t} dt'\,[\delta H(t'),\rho_0]\,e^{iH_0 t}$$

כאשר $\delta H(t') = e^{iH_0 t'}\,\delta H\, e^{-iH_0 t'}$ בתמונת האינטראקציה

$$\Rightarrow \langle A\rangle_{H_0+\delta H} = Tr\{\rho_0 A\} + Tr\{\delta\rho A\}$$

$$= \langle A\rangle_{H_0} - i\,Tr\left\{e^{-iH_0 t}\int_{-\infty}^{t} dt'\,[\delta H(t'),\rho_0]\,e^{iH_0 t} A\right\}$$

$$= \langle A\rangle_{H_0} - i\,Tr\left\{\int_{-\infty}^{t} dt'\,[\delta H(t'),\rho_0]\,A(t)\right\}$$

השתמשנו בציקליות ה-Tr ואז התקבלה ... ל-$A(t)$ בתמונת האינטראקציה.

$$Tr\{[\delta H(t'),\rho_0]A(t)\} = Tr\{\delta H(t')\rho_0 A(t) - \rho_0\,\delta H(t')A(t)\}$$

$$= Tr\{A(t)\,\delta H(t')\rho_0 - \delta H(t')A(t)\rho_0\} = \langle[A(t),\delta H(t')]\rangle_{H_0}$$

$$\Rightarrow \langle A\rangle_{H_0+\delta H} = \langle A\rangle_{H_0} - i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\,\theta(t-t')\,\langle[A(t),\delta H(t')]\rangle_{H_0}$$

זוהי נוסחת Kubo הידועה

אם נניח ש $\delta H = \int dx\, h(x,t)B(x)$ כאשר $h(x,t)$ הוא השדה החיצוני המצומד לאופרטור B

$$\langle A(x,t)\rangle_{H_0+\delta H} = \langle A(x,t)\rangle_{H_0} + \int dx'dt'\,\chi_{AB}(x,t;x',t')\,h(x',t')$$ אזי

כאשר הסוסצפטיביליות χ נתונה ע"י

$$\chi_{AB}(x,t;x't') = -i\,\theta(t-t')\langle[A(x,t),B(x',t')]\rangle_{H_0}$$
$$= G^{R}_{AB}(x,t;x't')$$

כשהנחנו A ו-B אופרטורים כלליים.

אנו רואים שוב כי פונקצית התגובה של המערכת להפרעות חלשות נתונה ע"י retarded G.f של הגודל הנמדד והאופרטור הצמוד להפרעה

במקרה של מערכת אינווריאנטית תחת הזזות בזמן ובמרחב $\chi = \chi(x-x', t-t')$ ונקבל

$$\langle A(k,\omega)\rangle_{H_0+\delta H} = \langle A(k,\omega)\rangle_{H_0} + \chi(k,\omega)\, h(k,\omega)$$

כאשר

$$f(k,\omega) = \int dx \int dt\, e^{-i(kx-\omega t)} f(x,t)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{V}\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(kx-\omega t)} f(k,\omega)$$

נפעיל כעת את התוצאה שקבלנו למקרה שמעניין אותנו: סיכון. כדי לטפל בנושא נצטרך להבחין שני פוטנציאלים חשמליים:

א. ϕ^{ext} הפוטנציאל החשמלי הנוצר מהתפלגות המטען החשמלי החיצוני ρ^{ext} (לא לבלבל עם ה-density matrix) אשר אנו מוסיפים כהפרעה. השניים מקושרים ע"י משוואת פואסון הבאה:

$$-\nabla^2 \phi^{ext}(\vec{r},t) = 4\pi \rho^{ext}(\vec{r},t)$$

ב. הפוטנציאל החשמלי הכולל ϕ הנוצר מהמטען החיצוני, צפיפות המטען האלקטרונית $\rho^e(\vec{r},t)$ וצפיפות המטען החיובית הקבועה הדרושה לנטרלות חשמלית ρ^b. ϕ מקיים:

$$-\nabla^2 \phi(\vec{r},t) = 4\pi \left[\rho^{ext}(\vec{r},t) + \underbrace{\rho^e(\vec{r},t) + \rho^b}_{\rho^{ind}(\vec{r},t)}\right]$$

נגדיר את $\rho^{ind}(\vec{r},t)$ צפיפות המטען המושרה. ללא ρ^{ext}
$\rho^e = -\rho^b$ ולכן $\rho^{ind} = 0$.

בהנחה ש ρ^{ext} ולכן ϕ^{ext} קטנים נוכל להגיע במסגרת תאוריית ה linear response כי קיים קשר לינארי בין ϕ^{ext} ו ϕ:

$$\phi^{ext}(\vec{r},t) = \int d^3r'dt' \, \epsilon(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \, \phi(\vec{r}',t')$$

כשמדובר בגז אלקטרונים הומוגני ו H_0 שאינו תלוי בזמן $\Leftarrow$

$$\phi^{ext}(\vec{k},\omega) = \epsilon(\vec{k},\omega)\,\phi(\vec{k},\omega)$$

ϵ היא הקבוע הדיאלקטרי של גז האלקטרונים. הוא גם מקשר בין השדה $\vec{D}$ הנוצר מהמטענים החיצוניים והשדה $\vec{E}$ הנוצר מכלל המטענים:

$$\vec{D}(r,t) = \int d^3r'dt' \, \epsilon(\vec{r}-\vec{r}', t-t') \, \phi(\vec{r}',t')$$

לצורך חישוב $\epsilon(\vec{k},\omega)$ קל יותר לחשב את התגובה $\chi(\vec{k},\omega)$ המקשרת בין צפיפות המטען המושרה והפוטנציאל החיצוני:

$$\rho^{ind}(\vec{k},\omega) = e^2\chi(\vec{k},\omega)\,\phi^{ext}(\vec{k},\omega)$$

מתוך משוואת פואסון של ϕ^{ind}:

$$k^2\phi^{ind}(k,\omega) = 4\pi\rho^{ind}(k,\omega)$$

נקבל

$$\phi^{ind}(k,\omega) = \frac{4\pi e^2}{k^2}\chi(\vec{k},\omega)\,\phi^{ext}(\vec{k},\omega)$$

$$= V(\vec{k})\,\chi(\vec{k},\omega)\,\phi^{ext}(\vec{k},\omega)$$

$$\Leftarrow \quad \epsilon(\vec{k},\omega) = \frac{\phi^{ext}(\vec{k},\omega)}{\phi^{ext}(\vec{k},\omega)+\phi^{ind}(\vec{k},\omega)} = \frac{1}{1+V(\vec{k})\,\chi(\vec{k},\omega)}$$

במקרה שלנו

$$\delta H = \int d^3r \, \rho^{ind}(r,t)\,\phi^{ext}(r,t)$$

כאשר H_0 כולל את האינטראקציות בין האלקטרונים (ובינם לבין הרקע היוני)

רק שכעת את הממוצעים לפי H_0 נצטרך לחשב בהתחשב באינטראקציות אלה.

$$\langle\rho^{ind}(r,t)\rangle_{[illegible]} = \overbrace{\langle\rho^{ind}(r,t)\rangle_{H_0}}^{0} - i\int_{-\infty}^{\infty} d^3r'\,dt' \, \theta(t-t')\,\langle[\rho^{ind}(r,t),\rho^{ind}(r',t')]\rangle_{H_0}\,\phi^{ext}(r',t')$$

$$= e^2\int d^3r'dt' \, \chi(r-r', t-t')\,\phi^{ext}(r',t')$$

X הוא לכן ה density-density correlation func. והצגת Matsubara נתונה ע"י

$$X(k,i\omega) = -\int d^3r \int_0^\beta d\tau\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\tau)} \langle T_\tau (n_e(r,\tau)+n_b)(n_e(0,0)+n_b)\rangle_{H_0}$$

מכיון ש $\langle n_e(r,\tau)\rangle_{H_0} = \bar{n} = -n_b$

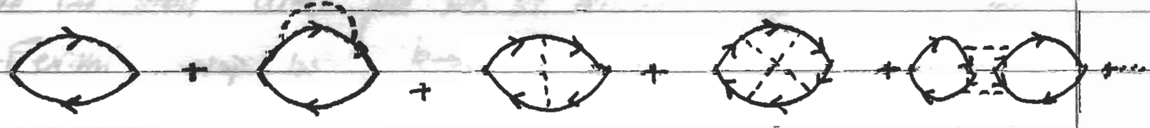
$$= V\beta\bar{n}^2\delta_{k,0}\delta_{\omega,0} - \int d^3r\, d\tau\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega\tau)} \langle T_\tau n_e(r,\tau) n_e(0,0)\rangle_{H_0}$$

2-particle Green's function

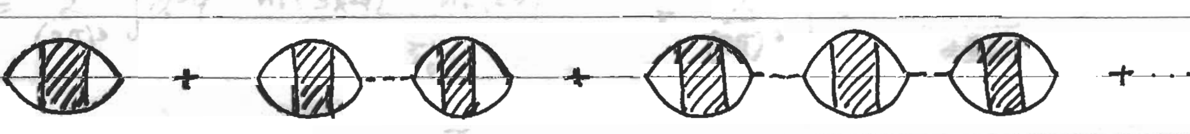
נתבונן ב $\langle T_\tau n_e(r,\tau)n_e(0,0)\rangle_{H_0} = \langle T_\tau \psi^\dagger(r,\tau)\psi(r,\tau)\psi^\dagger(0,0)\psi(0,0)\rangle_{H_0}$ ונזכור כי H_0 מכיל באופן מלא והכרחי גם את האינטראקציה. כשנפתח את הממוצע נקבל דיאגרמות בהן כל אחת מה n_e משוכלות בנפרד. שני החלקים המכילים את האופרטורים ב (r,τ) וב $(0,0)$ אינם קשורים זה לזה. דיאגרמות אלה מתאימות ל $\langle\psi^\dagger(r,\tau)\psi(r,\tau)\rangle\langle\psi^\dagger(0,0)\psi(0,0)\rangle$ ואנו לכן $\bar{n}^2$ רק מאפשר טרנספורם פורייה מבטא זו מבטלת את התרומה הקבועה ל $\delta_{\omega_0}\delta_{k_0}$ ב X.

התכונה השניה של דיאגרמות היא זו שבה כל האופרטורים המופיעים ב X קשורים זה לזה.

נגדיר את ה irreducible polarization propagator כסכום הדיאגרמות הללו הקשורות ללא לחתוך קו אינטראקציה יחיד ב X

$P(k,i\omega) =$ 

נוכל לרשום אז את X כטור הגאומטרי



$$X(k,i\omega) = \frac{P(k,i\omega)}{1 - V(k)P(k,i\omega)} \Leftarrow$$

דיאגרמה עם n קווי אינטראקציה כוללת (-1) מהגדרת X, $(-1)^n$ מבאות תורת ההפרעות וגם נקח $(-1)^{n+1}$ כתוצאה מ n+1 לולאות פרמיונים $\Leftarrow$ כל הדיאגרמות באות עם סימן +. $P = \bigcirc$

כשהלולאה מאוזנת ללא

שימו לב סימון הבועה $\chi_0 = -\langle n_e n_e \rangle_0 = \bigcirc$ המסומל ע"י

$P(k,i\omega) = \chi_0(k,i\omega) = \bigcirc$ מקבלים random phase approximation בקירוב ה

כך χc נשווה ע"י הגרף הפשוט של non-interacting bubbles

$$\chi(k,i\omega) = \frac{\chi_0(k,i\omega)}{1 - V(k)\chi_0(k,i\omega)}$$

כך שבקירוב זה

$$\epsilon(k,i\omega) = \frac{1}{1 + V(k)\cdot\frac{\chi_0(k,i\omega)}{1 - V(k)\chi_0(k,i\omega)}} = 1 - V(k)\chi_0(k,i\omega)$$

את χ_0 חישבנו כבר בעבר ולפי המשוואה אותה נקבל

$$\chi_0(k,\omega) = \frac{1}{V}\cdot \underset{\text{במקרה של ספין}}{2} \sum_q \frac{n_F(\xi^0_q) - n_F(\xi^0_{k+q})}{\omega + \xi^0_q - \xi^0_{k+q} + i\delta}$$

שימו לב כי הרבעות הזוגיות באינטגרל זה באות מהצלבים רבים $\omega = \epsilon_{k+q} - \epsilon_q$ כאשר ב $T=0$ $k+q>k_F$ ו $q<k_F$ אז לעבר כלומר כאשר ω מתאימה לאנרגיה הנדרשת לעבור אלקטרון ממצב מאוכלס מתחת לרמת פרמי למצב לא מאוכלס מעל רמת פרמי: יצירת זוג אלקטרון-חור.

נתבונן כעת במקרה בו הפוטנציאל אינו תלוי בזמן $\omega=0$ משמעו לגבי מצב במרחב: אם כן סקלות ארוכות בהרבה מ λ_F: $k \to 0$ זהו קירוב Thomas-Fermi במצב כזה נקבל

$$\chi_0 = \frac{2}{(2\pi)^3}\int d^3q \, \frac{n_F(\xi^0_{k+q}) - n_F(\xi^0_q)}{\xi^0_{k+q} - \xi^0_q} \xrightarrow{k\to 0} \frac{2}{(2\pi)^3}\int d^3q \, \frac{\partial n_F(\xi^0_q)}{\partial \xi_q} =$$

$$= \int d\epsilon \, g(\epsilon)\frac{\partial n_F(\epsilon)}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial}{\partial \mu}\int d\epsilon \, g(\epsilon) n_F(\epsilon)$$

$$= -\frac{\partial n}{\partial \mu}$$

צפיפות המצבים באנרגיה הוא ספק

$g(\epsilon)d\epsilon$ = מספר המצבים בין $[\epsilon, \epsilon+d\epsilon]$

$$\epsilon(k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2}\frac{\partial n}{\partial \mu}$$ הפונקציה הדיאלקטרית מקבלת צורה

$$= 1 + \left(\frac{k_0}{k}\right)^2$$

כאשר k_0: Thomas Fermi wavevector נתון ע"י

$$k_0 = \left[4\pi e^2 \frac{\partial n}{\partial \mu}\right]^{1/2} \xrightarrow{T \ll T_F} \left[4\pi e^2 g(\epsilon_F)\right]^{1/2} = \left(\frac{4}{\pi}\frac{me^2}{\hbar^2}k_F\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\left(3\pi^2\right)^{1/6}\left(\frac{n}{a_0^3}\right)^{1/6}$$

כאשר $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ רדיוס בוהר. בסדר גודל $k_0 \sim 1\,Å^{-1}$

לאורך k_0^{-1} משמעות פיסיקלית ברורה. נניח כי ϕ^{ext} הינו מטען נקודתי Q בראשית

$$-\nabla^2\phi^{ext}(\vec r) = 4\pi Q\,\delta(\vec r) \Rightarrow \phi^{ext}(k) = \frac{4\pi Q}{k^2}$$

$$\phi(\vec k) = \frac{1}{\epsilon(\vec k)}\phi^{ext}(\vec k) = \frac{4\pi Q}{k^2 + k_0^2}$$

ולכן

$$\phi(\vec r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec k\cdot\vec r}\frac{4\pi Q}{k^2+k_0^2} = \frac{Q}{r}e^{-k_0 r}$$

מכאן לכן כי הגבלת טווח הפוטנציאל הופך אותו לפוטנציאל Yukawa דועך אקספוננציאלית עבור $r > k_0^{-1}$. k_0^{-1} נקרא לכן ה screening length.

חישוב $\chi(\vec k)$ עבור $\vec k$ כללי (לאו דווקא קטן) כאשר $\omega = 0$ וב $T=0$ אינו קשה גם כן
נשוב אל ההגדרה

$$\chi_0(k) = 2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{n_F(\xi_q^0) - n_F(\xi_{k+q}^0)}{\epsilon_q^0 - \epsilon_{k+q}^0}$$: Lidhard function

$$= 2\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3} n_F(\xi_q^0)\left[\frac{1}{\epsilon_q^0 - \epsilon_{k+q}^0} + \frac{1}{\epsilon_q^0 - \epsilon_{q-k}^0}\right]$$

$$\xrightarrow{T\to 0} \frac{1}{4\pi^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{k_F} dq\, q^2 \left[\frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m}(2kq\cos\theta + k^2)} - \frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m}(2kq\cos\theta - k^2)}\right]$$