לפועל נקבל

$$\mathcal{G}(k,i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau\, \mathcal{G}(k,\tau)\, e^{i\omega_n\tau}$$

$$= \frac{-1}{Z}\int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega_n\tau} \sum_{n,m} \langle n|e^{-\beta K} e^{\tau K} a_k e^{-\tau K}|m\rangle \langle m|a_k^+|n\rangle$$

כשמשתמשים בהגדרה של $\mathcal{G}$ עבור $\tau>0$

$$= -\frac{1}{Z}\sum_{n,m} |\langle n|a_k|m\rangle|^2 e^{-\beta\xi_n} \int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega_n\tau} e^{\tau(\xi_n-\xi_m)}$$

נשתמש בכך ש $e^{i\omega_n\beta}=\pm 1$ ונקבל

$$= \frac{1}{Z}\sum_{n,m} |\langle n|a_k|m\rangle|^2 \left(e^{-\beta\xi_n} \mp e^{-\beta\xi_m}\right) \frac{1}{i\omega_n+\xi_n-\xi_m}$$

אנו רואים לכן, כי $G^R(k,\omega)$ מתקבלת מ $\mathcal{G}(k,i\omega_n)$ על ידי המשכה אנליטית
$i\omega_n \to \omega+i\delta$

$$G^R(k,\omega) = \mathcal{G}(k, i\omega_n\to\omega+i\delta)$$

עד כה דיברנו בתכונות הכלליות הנובעות מהגדרת פונקציות גרין השונות. לא דנו עדין באופן בו אנו עושים לחשב במערכת שונה ממערכת חלקיקים חופשיים. נבוא לעסוק בנושא זה כעת. מערכתנו לצורך תורת ההפרעות מתאימה ולצורך כך נוח לעבוד בתמונת האינטראקציה
אנו מניחים כי

$$H = H_0 + V$$

כאשר המצבים והאופרטורים נתונים בהתאם ל!

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{iH_0t}|\Psi_S(t)\rangle$$

$$O_I(t) = e^{iH_0t} O_S e^{-iH_0t} \underset{\text{זמן מדומה}}{\Longrightarrow} O_I(\tau) = e^{K_0\tau} O_S e^{-K_0\tau}$$

$$O_H(\tau) = e^{K\tau} O_S \, e^{-K\tau}$$ מכיון שאופרטורים בתמונת הייזנברג מתפתחים בזמן !

נקבל $$O_H(\tau) = e^{K\tau} e^{-K_0\tau} O_I(\tau) e^{K_0\tau} e^{-K\tau} = S(0,\tau)\, O_I(\tau)\, S(\tau,0)$$

כאשר $$S(\tau_1,\tau_2) = e^{K_0\tau_1} e^{-K(\tau_1-\tau_2)} e^{-K_0\tau_2}$$

ויש לה התכונות הבאות
$$S(\tau_1,\tau_2)\, S(\tau_2,\tau_3) = S(\tau_1,\tau_3)$$
$$S(\tau,\tau_1) = 1$$

נמצא את משוואת התנועה ל S

$$\partial_\tau S(\tau,\tau') = e^{K_0\tau}(K_0 - K)\, e^{-K(\tau-\tau')} e^{-K_0\tau'}$$
$$= -e^{K_0\tau}\, V\, e^{-K_0\tau} S(\tau,\tau')$$
$$= -V_I(\tau)\, S(\tau,\tau')$$

נפתור פורמלית ע"י אינטגרציה מ τ_0 ל τ באיטרציות:

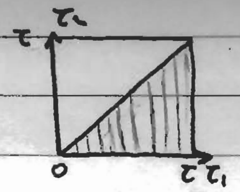
$$S(\tau,\tau_0) = \overset{S(\tau_0,\tau_0)}{1} - \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1\, V_I(\tau_1)\, S(\tau_1,\tau_0)$$
$$= 1 - \int_0^{\tau} d\tau_1\, V_I(\tau_1) + (-1)^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau_2\, V_I(\tau_1) V_I(\tau_2)\, S(\tau_2,\tau_0)$$
$$\vdots$$

ניתן לרשום ביטוי זה בצורה

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\tau} d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau} d\tau_n\, T\left[V_I(\tau_1)\cdots V_I(\tau)\right]$$
$$= T \exp\left[-\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau_1\, V_I(\tau_1)\right]$$

מגדיר? נחזור באופן מסדר שני

$$(-1)^2\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_1\int_{\tau_0}^{\tau_1}d\tau_2\; V_I(\tau_1)\,V_I(\tau_2)$$



$$=(-1)^2\cdot\frac{1}{2}\Bigg[\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_1\int_{\tau_0}^{\tau_1}d\tau_2\; V_I(\tau_1)V_I(\tau_2)\;+\;\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_2\overbrace{\int_{\tau_2}^{\tau}d\tau_1}^{}\; V_I(\tau_1)V_I(\tau_2)\Bigg]$$

אינטגרציה על אותו תחום

$$=(-1)^2\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_1\Bigg[\int_{\tau_0}^{\tau_1}d\tau_2\; V_I(\tau_1)V_I(\tau_2)\;+\;\int_{\tau_1}^{\tau}d\tau_2\; V_I(\tau_2)V_I(\tau_1)\Bigg]$$

נחליף $\tau_1\leftrightarrow\tau_2$ באבר השני:

$$=(-1)^2\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_1\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_2\Big[V_I(\tau_1)V_I(\tau_2)\,\theta(\tau_1-\tau_2)\;+\;V_I(\tau_2)V_I(\tau_1)\,\theta(\tau_2-\tau_1)\Big]$$

$$=(-1)^2\frac{1}{2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_1\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau_2\; T\big[V_I(\tau_1)\,V_I(\tau_2)\big]$$

המעבר האחרון נכון תחת ההנחה כי V הינו אופרטור בוזוני (מכיל מספר זוגי של אופרטורים פרמיונים)
הנחה זו מתקיימת תמיד.
נחזור כעת לפתח את $\mathcal{G}$ בעזרת S:

$$\mathcal{G}(r,\tau,r',\tau')=-\frac{1}{Z}\,Tr\Big[e^{-\beta K}\,T_\tau\,\Psi_H(r,\tau)\,\Psi_H^{+}(r',\tau')\Big]$$

$$=-\frac{1}{Z}\,Tr\Big[e^{-\beta K_0}S(\beta,0)\;T_\tau\; S(0,\tau)\,\Psi_I(r,\tau)\,S(\tau,0)\;\;S(0,\tau')\,\Psi_I^{+}(r',\tau')\,S(\tau',0)\Big]$$

$$=-\frac{1}{Z}\,Tr\Big[e^{-\beta K_0}\;T_\tau\; S(\beta,\tau)\,\Psi_I(r,\tau)\;S(\tau,\tau')\;\Psi_I^{+}(r',\tau')\;S(\tau',0)\Big]$$

בגלל המופיע של T_τ אנו יכולים להחליף סדר של האופרטורים השונים ולקבל את כל ה-S עם מחובר
(שימו לב שבהחלפה אנו לא צוברים $(-)$ כתוצאה מהגדרת T_τ מכיוון ש-S מורכבת
מאופרטורים בוזונים כך שהחלפה בין ψ או S, לא אנו צוברת הכפלה ב-(-1))

$$=-\frac{1}{Z}\,Tr\Big[e^{-\beta K_0}\;T_\tau\; S(\beta,0)\,\Psi_I(r,\tau)\,\Psi_I^{+}(r',\tau')\Big]$$

$$=-\frac{Tr\Big\{e^{-\beta K_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\beta}d\tau_1\cdots\int_0^{\beta}d\tau_n\; T_\tau\; V_I(\tau_1)\cdots V_I(\tau_n)\;\psi(r,\tau)\,\psi^{+}(r',\tau')\Big\}}{Tr\Big\{e^{-\beta K_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\beta}d\tau_1\cdots\int_0^{\beta}d\tau_n\; T_\tau\; V_I(\tau_1)\cdots V_I(\tau_n)\Big\}}$$

הביטוי אליו הגענו נראה מסובך ביותר, אך שימו לב כי ערכי התצפית של המכפלות $V_I \cdots V_I \psi\psi^+$ נלקחים ביחס לאנסמבל הלא מופרע $Tr[e^{-\beta K_0}\cdots]$. אם נוכל להפוך את ממוצע המכפלה למכפלת ממוצעים של זוגות אופרטורים נוכל להשתמש בעובדה שממוצעים אלה הינם פונקציות גרין שאותן כבר חישבנו עבור המקרה הלא מופרע! זהו תוכנו של

משפט Wick

נגדיר contraction של שני אופרטורים

$$\underbracket{AB} = \frac{1}{Z_0} Tr\left[e^{-\beta K_0} T_\tau AB\right] \equiv \langle AB\rangle_0$$

אזי המשפט הינו

$$\langle T_\tau AB\cdots F\rangle_0 = \text{סכום על כל המכפלות האפשריות של contractions של זוגות ב } AB\cdots F$$

שימו לב כי במקרה הפרמיוני קיימים סימנים המתווספים עבור סידור מחדש המחליף מקום של אופרטורים לדוגמא:

$$\langle T_\tau ABCD\rangle_0 = \underbracket{AB}\,\underbracket{CD} + \underbracket{A\,B\,C\,D}_{AC,\,BD} + \underbracket{A\,B\,C\,D}_{AD,\,BC}$$

$$= \underbracket{AB}\,\underbracket{CD} - \underbracket{AC}\,\underbracket{BD} + \underbracket{AD}\,\underbracket{BC}$$

<u>הוכחה:</u> נניח $\tau_a > \tau_b > \cdots \tau_f$ אני מנסה להבין כי הגדרת ה contraction מבטיחה כי המשפט נכון גם עבור סידורים אחרים.

נבטא את האופרטורים בעזרת אופרטורי יצירה והרס של המצבים העצמיים של K_0:

$$A = \sum_i \phi(r,\tau)\,\alpha_i = \begin{cases} \sum_i \varphi_i(r)\, e^{-\xi_i\tau} a_i & \text{אם } A=\psi \\ \sum_i \varphi_i(r)\, e^{\xi_i\tau} a_i^+ & \text{אם } A=\psi^+ \end{cases}$$

בהשתמש בעובדה שהאופרטורים המופיעים בממוצע הינם כתובים באינדקס כך שתלויות הזמן שלהם ידועות.

$$\langle AB\cdots F\rangle_0 = \sum_{ab\cdots f} \phi_a \cdots \phi_f \frac{1}{Z_0} Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_a\cdots\alpha_f\right\}$$

נעביר את α_a ימינה:

$$\frac{1}{Z_0}Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_a\cdots\alpha_f\right\} = \frac{1}{Z_0}Tr\left\{e^{-\beta K_0}[\alpha_a,\alpha_b]_\mp\alpha_c\cdots\alpha_f\right\}$$

$$\pm\frac{1}{Z_0}Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_b[\alpha_a,\alpha_c]_\mp\alpha_d\cdots\alpha_f\right\} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{Z_0}Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_b\cdots[\alpha_a,\alpha_f]_\mp\right\} \pm\frac{1}{Z_0}Tr\left\{\alpha_b\cdots\alpha_f\,\alpha_a\right\}$$

נשתמש ב:

$$e^{\beta K_0}\alpha_a e^{-\beta K_0} = \alpha_a e^{\lambda_\alpha\beta\xi_a} \qquad \lambda_\alpha = \begin{cases}-1 & \alpha=a\\ 1 & \alpha=a^+\end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_a e^{-\beta K_0} = e^{-\beta K_0}\alpha_a e^{\lambda_\alpha\beta\xi_a}$$

כך שאחרי המעבר האחרון קבלנו

$$\pm Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_b\cdots\alpha_f\,\alpha_a\right\} = \pm Tr\left\{\alpha_a e^{-\beta K_0}\alpha_b\cdots\alpha_f\right\}$$

$$= \pm e^{\lambda\beta\xi_a} Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_a\cdots\alpha_f\right\}$$

$$\Leftarrow$$

$$\frac{1}{Z_0}Tr\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_a\cdots\alpha_f\right\} = \frac{[\alpha_a,\alpha_b]_\mp}{1\mp e^{\lambda_a\beta\xi_a}}\frac{Tr}{Z_0}\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_c\cdots\alpha_f\right\}$$

$$\pm\frac{[\alpha_a,\alpha_c]_\mp}{1\mp e^{\lambda_a\beta\xi_a}}\frac{Tr}{Z_0}\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_b\alpha_d\cdots\alpha_f\right\}$$

$$+\cdots \pm\frac{[\alpha_a,\alpha_f]_\mp}{1\mp e^{\lambda_a\beta\xi_a}}\frac{Tr}{Z_0}\left\{e^{-\beta K_0}\alpha_b\cdots\alpha_e\right\}$$

לכן

$$\frac{[a_i^+,a_i]_\mp}{1\mp e^{\beta\xi_i}} = \frac{\mp 1}{1\mp e^{\beta\xi_i}} = \begin{matrix}n_b(\xi_i)\\ n_f(\xi_i)\end{matrix} = \langle a_i^+a_i\rangle_0 = \underbrace{a_i^+a_i}$$

$$\frac{[a_i,a_i^+]_\mp}{1\mp e^{-\beta\xi_i}} = \frac{1}{1\mp e^{-\beta\xi_i}} = \begin{matrix}1+n_b(\xi_i)\\ 1-n_f(\xi_i)\end{matrix} = \langle a_ia_i^+\rangle_0 = \underbrace{a_ia_i^+}$$

ה traces הנותרים ניתנים לפיתוח באותו אופן. אם נסדר את ה contractions מחדש בסדר המקורי
הסימנים נקבעים לפי מספר החלפות (המשנה).

נשוב כעת לבעיה ב V_I שמצאנו ל $\mathcal{G}$ ונשתמש במשפט Wick. נתבונן באינטראקציה

$$V_I(\tau_1) = e^{\tau_1 K_0}\left[\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, \psi^+(\vec{r})\psi^+(\vec{r}\,')\, V(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \psi(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r})\right] e^{-\tau_1 K_0}$$

נגדיר $x = (\vec{r}, \tau)$;

$$v(x-x') = V(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(\tau-\tau')$$

$$\psi(x) = e^{\tau K_0}\,\psi(\vec{r})\,e^{-\tau K_0}$$

כך

$$\int_0^\beta d\tau_1 V_I(\tau_1) = \frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_1'\; \psi^+(x_1)\psi^+(x_1')\, v(x_1-x_1')\, \psi(x_1')\,\psi(x_1)$$

כאשר ψ פרמיוני.

נתבונן במונה בביטוי ל $\mathcal{G}$. האיבר מסדר אפס הוא פשוט Z_0. האיבר מסדר ראשון הינו:

$$-\,\mathrm{Tr}\left\{e^{-\beta K_0}\,\frac{1}{2}\,T_\tau \int dx_1 dx_1'\; v(x_1-x_1')\, \psi^+(x_1)\,\psi^+(x_1')\,\psi(x_1')\,\psi(x_1)\,\psi(x)\,\psi^+(x')\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}Z_0\int dx_1 dx_1'\; v(x_1-x_1')\,\left\langle T_\tau\, \psi^+(x_1)\,\psi^+(x_1')\,\psi(x_1')\,\psi(x_1)\,\psi(x)\,\psi^+(x')\right\rangle_0$$

$$\overset{\text{Wick}}{=} -\frac{1}{2}Z_0\int dx_1 dx_1'\; v(x_1-x_1')$$

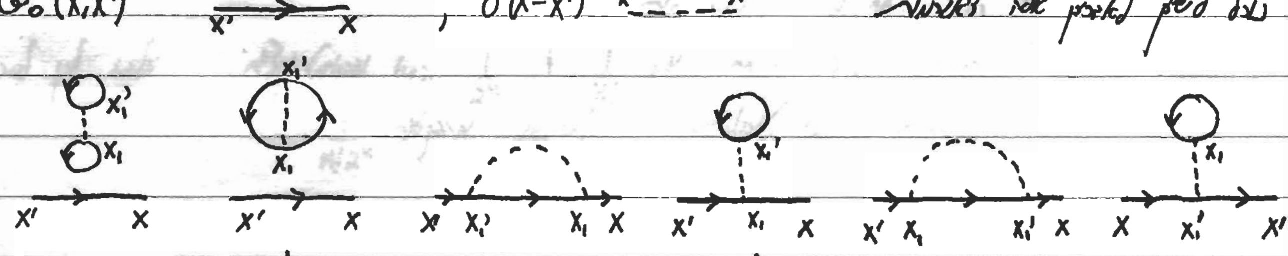
$$\Big\{\mathcal{G}_0(x,x')\Big[\overset{a}{\mathcal{G}_0(x_1,x_1)\,\mathcal{G}_0(x_1',x_1')} - \overset{b}{\mathcal{G}_0(x_1,x_1')\,\mathcal{G}_0(x_1',x_1)}\Big]$$

$$+\,\mathcal{G}_0(x,x_1)\Big[\overset{c}{\mathcal{G}_0(x_1',x')\,\mathcal{G}_0(x_1,x_1')} - \overset{d}{\mathcal{G}_0(x_1',x_1')\,\mathcal{G}_0(x_1,x')}\Big]$$

$$+\,\mathcal{G}_0(x,x_1')\Big[\overset{e}{\mathcal{G}_0(x_1',x_1)\,\mathcal{G}_0(x_1,x')} - \overset{f}{\mathcal{G}_0(x_1',x')\,\mathcal{G}_0(x_1,x_1)}\Big]\Big\}$$

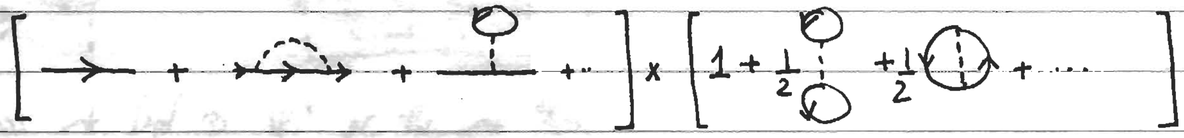
נוכל לשים לאיברים אלו ציורים

$\mathcal{G}_0(x,x')$ $\quad x' \longrightarrow x$, $\quad v(x-x')\quad$ x - - - - x'



a b c d e f

* נשים לב כי אנו מקבלים שני סוגי דיאגרמות: disconnected diagrams מורכבות ממספר חלקים בלתי קשורים ! connected diagrams. (קשורות ללא קשורים)
אם נאסוף הדיאגרמות שמסדרים בחלקים יחד נגלה כי נוכל לכתוב את המונה כ:



הגורם השני הוא בדיוק המכנה בביטוי שמצאנו ל $\mathcal{G}$ דהיינו פונקצית החלוקה Z!
לדוגמא בסדר הראשון התרומה ל Z היא (סדר האפס נותן 1)

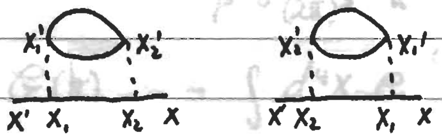
$$-\frac{1}{2} Z_0 \int dx_1 dx_1' \, v(x_1-x_1') \langle T_\tau \psi^+(x_1)\psi^+(x_1')\psi(x_1')\psi(x_1)\rangle_0$$

$$= -\frac{1}{2} Z_0 \int dx_1 dx_1' \, v(x_1-x_1') \left\{ \mathcal{G}_0(x_1,x_1)\mathcal{G}_0(x_1',x_1') - \mathcal{G}_0(x_1,x_1')\mathcal{G}_0(x_1',x_1) \right\}$$

$\Leftarrow$ ה disconnected diagrams מתבטלים בין המונה והמכנה : Linked Cluster Expansion

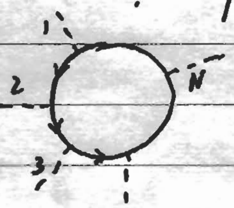
$\mathcal{G}$ היא סכום של ה connected diagrams בלבד!

* בסדר הראשון אנו רואים כי כל connected diagram מופיע פעמיים. הפקטור 2 נובע מכך שאותה דיאגרמה מתקבלת עבור contractions בין מחליפים האינדקסים של ה vertex $x_1 \leftrightarrow x_1'$. עבור דיאגרמה עם n vertices נקבל פקטור של 2^n. בנוסף לכך דיאגרמות המתקבלות זו מזו ע"י החלפה של vertices נותנות אותה תרומה. דיאגרמה עם n vertices תופיע לכן מספר פעמים של $n!$. לדוגמא:



שימו לב כי הפקטור הזה $2^n n!$ מבטל את
הפקטור $\frac{1}{2^n n!}$ המתקבל בסדר ה-n מה $\frac{1}{n!}$ ו $\frac{1}{2^n}$ הבאו מהאינטראקציה. עלינו לכן לסכם על כל הדיאגרמות השונות זו מזו טופולוגית ולשכוח מהפקטור $\frac{1}{n!2^n}$.

* שימו לב כי דיאגרמות הכוללות מספר אי זוגי של לולאות פרמיונות כגון b ו a באות עם סימן −1. זאת מכיוון שלולאה כזאת היא מהצורה



$$\psi_1^+\psi_1\,\psi_2^+\psi_2\,\psi_3^+\psi_3\cdots\psi_M^+\psi_M$$

וזה תמיד מעביר סימן −1 כתוצאה מהצורך להחליף את ψ_M עם ψ_1^+ כדי לקבל את הפקטור $\mathcal{G}_0(M,1)$.

הכלל מכן לאור הדלפק הבא לחישוב דיאגרמתי של $\mathcal{G}$:

1. ציירו את כל הדיאגרמות הקשירות עם n קוי אינטראקציה ו $2n+1$ קוי חלקיק השונות זו מזו טופולוגית.
2. לכל קו חלקיק $\overset{2\quad\longrightarrow\quad 1}{}$ הצמידו פקטור $\mathcal{G}_0(1,2)$
3. לכל קו אינטראקציה $1\,\text{-----}\,2$ הצמידו פקטור $v(1,2)$
4. בצעו אינטגרציה על כל המשתנים הפנימיים $\int_0^\beta dx_n^4$
5. הכפילו כל דיאגרמה ב $(-1)^n(-1)^F$ כאשר F מספר הלולאות הפרמיוניות.
6. פרשו קו חלקיק סגור $\mathcal{G}_0(x,x)$ כ: $\mathcal{G}_0(r,\tau,r,\tau+\delta)$ זאת מכיוון שקיים כלל תמיד באותו V_I בה ה ψ באים בסדר $\psi^+\psi$.

במעבר אינטגרלים תחת הגדות נוח יותר לעבוד עם $\mathcal{G}(\vec{p})$ במרחב התנע.

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_n e^{ikx}\mathcal{G}(k)$$

$$\mathcal{G}(k) = \int d^4x\, e^{-ikx}\mathcal{G}(x) \qquad k=(\vec{k},\omega_n)$$

$$kx = \vec{k}\vec{r}-\omega_n\tau$$

$$v(x) = \frac{1}{\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sum_n e^{ikx}v(k)$$

אינו תלוי ω_n

עבור פוטנציאל: pure retarded בהם $v(\tau)\propto\delta(\tau)$ $\quad$ $v(\vec{k},i\omega_n) = v(\vec{k})$

כי v [illegible]

נתמקד בדיאגרמה c

$$-\frac{1}{2} Z_0 \int dx_1\, dx_1'\, v(x_1-x_1')\, \mathcal{G}_0(x x_1)\, \mathcal{G}_0(x_1' x')\, \mathcal{G}_0(x_1 x_1')$$

$$= -\frac{1}{2} Z_0 \int dx_1 dx_1' \int dk\, dk'\, dq\, dq' \frac{1}{\beta^4} \frac{1}{(2\pi)^{12}} e^{i[q'(x_1-x_1') + k(x-x_1) + k'(x_1'-x') + q(x_1-x_1')]}$$

$$\times\, v(q')\, \mathcal{G}_0(k)\, \mathcal{G}_0(k')\, \mathcal{G}(q)$$

$, \int d^4k = \int d^3k \sum_{i\omega_n}$

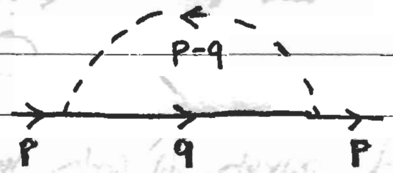
האינטגרציה על x_1 ו x_1' נותנת $\beta^2 (2\pi)^6\, \delta(k-q-q')\, \delta(k'-q-q')$

$$= -\frac{1}{2} Z_0 \int \frac{dq\, dq'}{\beta^2 (2\pi)^6} e^{i(q+q')(x-x')}\, v(q')\, \mathcal{G}_0(q)\, \mathcal{G}_0^2(q+q')$$

אם נגדיר ב $\mathcal{G}(p) = \int d^4(x-x')\, e^{-ip(x-x')}\, \mathcal{G}(x-x')$

נקבל

$$= -\frac{1}{2} Z_0 \int \frac{dq}{(2\pi)^3 \beta}\, v(p-q)\, \mathcal{G}_0^2(p)\, \mathcal{G}_0(q)$$

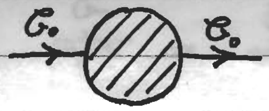


אנו רואים כי אנו יכולים לחשוב על קו האינטראקציה כנושא תנע p-q וכי התנע נשמר בכל אחד מקודקודי הדיאגרמה.

כללי התרומה הדיאגרמית ל $\mathcal{G}(p)$:

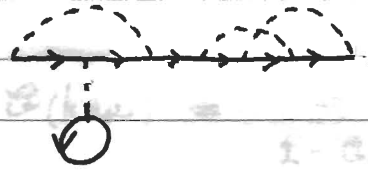
1. צייר כל הדיאגרמות המחוברות השונות טופולוגית.
2. לכל קו חלקיק הצמד הביטוי: $\mathcal{G}_0(k) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_k}$ הקווים החיצוניים נושאים תנע p.
3. קווי האינטראקציה מוכפלים ומוצמדים לביטוי $v(k)$
4. התנע נשמר בכל קודקוד.
5. בצע אינטגרציה על התנעים הפנימיים. - סכימה על תדירויות Matsubara
6. הכפל כל דיאגרמה ב $(-1)^n(-1)^F$
7. כאשר קו חלקיק נסגר על עצמו הכנס הביטוי $e^{i\omega_n 0^+}$ (סכום) - מתאים לכלל 6 בהרצאה הקודמת.
סכום על ω_n של אותו קו נותן n_k

דייסון (Dyson) נתן דרך קומפקטית לתאר הטור ההפרעתי אליו הגענו:

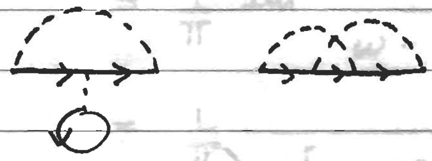


נתבונן בדיאגרמה כללית ל G היא מתחילה ומסתיימת ב G_0

כאשר בינהן אוסף של חלקי הביטוי המתאימים לדיאגרמה.



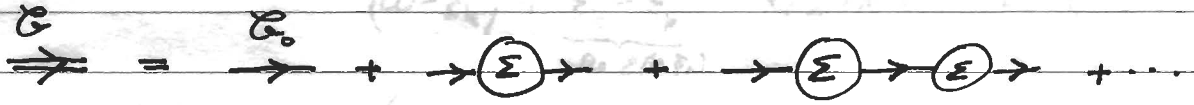
נבחין כי אנו עלולים לסווג דיאגרמות אלה בהתאם לתכונה הבאה:
נגדיר דיאגרמה פריקה reducible diagram - כדיאגרמה הניתנת לחיתוך לשני חלקים בעזרת חיתוך קו G_0 אחד.
ודיאגרמה בלתי פריקה irreducible diagram - כזו שאינה ניתנת לחיתוך לשני חלקים בעזרת חיתוך קו G_0 אחד.
הדיאגרמה שציירתי היא לכן reducible ומורכבת משתי דיאגרמות שאינן פריקות:



המחוברות בינהן על ידי קו G_0.

נגדיר את ה self-energy (proper) irreducible כסכום של כל הדיאגרמות הלא פריקות מסוג זה ונסמנו ב Σ (לא להתבלבל עם סימן הסכום).

Dyson שם לב כי כל דיאגרמה ב G נתונה כסכום



$$G(1,1') = G_0(1,1') + \int d2d2'\, G_0(1,2)\,\Sigma(2,2')\,G_0(2',1') + \cdots \quad \Leftarrow$$

$$G(k,i\omega_n) = G_0(k,i\omega_n) + G_0(k,i\omega_n)\,\Sigma(k,i\omega_n)\,G_0(k,i\omega_n) + \cdots$$ // במערכת אינווריאנטית להזזה

משוואה זו נותנת רק להגדיר בצורה מרומזת (implicit) הזאת נקראת משוואת Dyson

$$\overset{\mathcal{G}}{\Rightarrow} = \overset{\mathcal{G}_0}{\rightarrow} + \overset{\mathcal{G}_0}{\rightarrow} \Sigma \overset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}$$

הפתרון הינו שלמעשה סכם הסדרה

$$\mathcal{G}(k,i\omega_n) = \frac{\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)}{1-\mathcal{G}_0(k,i\omega_n)\Sigma(k,i\omega_n)} = \frac{1}{\mathcal{G}_0^{-1}(k,i\omega_n)-\Sigma(k,i\omega_n)} = \frac{1}{i\omega_n-\xi_k^0-\Sigma(k,i\omega_n)}$$

מה המשמעות הפיזיקלית של Σ ?

נמשיך את $\mathcal{G}$ אנליטית ל G^R מעבר לתדר $i\omega_n\to\omega$ ונקח את הפונקציה הספקטרלית

$$A(k,\omega) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\, G^R(k,\omega)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\omega-\xi_k^0-\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)-\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\omega)+i\delta}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\omega)}{\left[\omega-\xi_k^0-\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)\right]^2+\mathrm{Im}^2\Sigma(k,\omega)}$$

עם $\mathrm{Im}\,\Sigma\neq 0$:

נסמן ב ξ_k את פתרון המשוואה הבאה ב ω

$$\omega = \xi_k^0+\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)$$

ונערוך את הביטוי הראשון במכנה סביבו:

$$\omega-\xi_0^0-\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega) \simeq$$

$$(\omega-\xi_k) + \underbrace{\xi_k-\xi_k^0}_{\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\xi_k)} - \mathrm{Re}\,\Sigma(k,\xi_k) - (\omega-\xi_k)\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)\Big|_{\omega=\xi_k}$$

$$= (\omega-\xi_k)\underbrace{\left[1-\frac{\partial}{\partial\omega}\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)\Big|_{\omega=\xi_k}\right]}_{Z_k}$$

$$= \frac{1}{Z_k}(\omega-\xi_k)$$

כשהנחנו כי Σ איטית ליד ξ_k.

אם $\mathrm{Im}\,\Sigma$ משתנה ליד $\omega=\xi_k$ מהר יותר מ $(\omega-\xi_k)^2$ כלומר

$$\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\omega) \simeq \mathrm{Im}\,\Sigma(k,\xi_k) + a\cdot(\omega-\xi_k)^{\text{גבוה}}$$

(אחרת מיקום השיא יהיה תלוי גם ב $\mathrm{Im}\,\Sigma$)

נוכל להזניח את התלות ב ω מעבר למלא הקיימת באיבר הראשון במכנה ולקבל

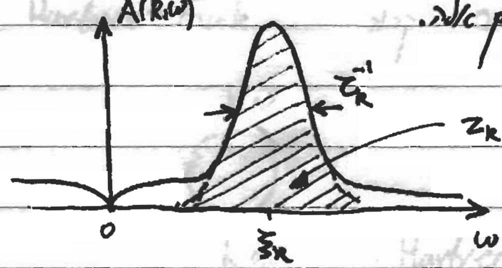
$$A(k,\omega) \simeq \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\xi_k)}{\left[\frac{1}{Z_k}(\omega-\xi_k)\right]^2+\mathrm{Im}^2\Sigma(k,\xi_k)}$$

$$=\frac{1}{\pi}Z_k\frac{1/\tau_k}{(\omega-\xi_k)^2+\frac{1}{\tau_k^2}}$$

כך שאם נגדיר $\frac{1}{\tau_k}=Z_k\,\mathrm{Im}\,\Sigma(k,\xi_k)$ נקבל

לורנציאן סביב $\omega=\xi_k\simeq\xi_k^0+\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\xi_k^0)$ עם רוחב של $\frac{1}{\tau_k}$ ומשקל (אינטגרל על ω) של Z_k

אם נוכל לכן כי התנועה כמו חלקיק קיימת של q.p בעלות עם דיספרסיה $\omega=\xi_k$ וזמן חיים τ_k. אנו רואים כי $\mathrm{Re}\,\Sigma$ קובעת את ההסטה של הדיספרסיה יחסית לדיספרסיה הלא מופרעת ו $\mathrm{Im}\,\Sigma$ קובע את זמן החיים של עירורים אלה.



אם הדיספרסיה נגדיר מסה אפקטיבית ל q.p

$$\xi_k \simeq \frac{k^2}{2m^*}-\mu$$

מקבלים לכן כרגיל:

$$\frac{m}{m^*}=Z_k\left(1+\frac{1}{v_F}\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\Sigma}{\partial k}\Big|_{k=k_F}\right)$$

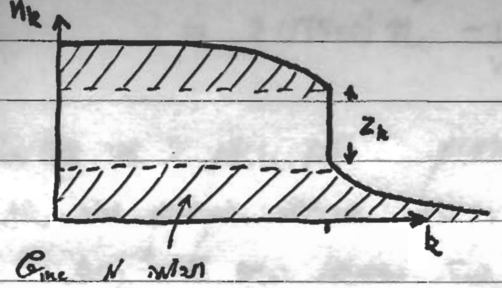
נציין ש $n_k=\frac{1}{\beta}\sum_n \mathcal{G}(k,i\omega_n)$ ונבין שנראה כי בגלל גרמי השלט מתאדק . $\frac{1}{\tau_k}\propto\xi_k^2$

הכי שהחלק הקוהרנטי ב $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}(k,i\omega_n)=\frac{Z_k}{i\omega_n-\xi_k+\frac{i}{\tau_k}}+G_{inc}(k,\omega)$$

ליד k_F ניתן לקרב את ידי $\frac{Z_{k_F}}{i\omega_n-\xi_k}$ התרומה ממנו ל n_k היא $Z_{k_F}\,n_F(\xi_k)$

לכן ל-n_k עדיין אי רציפות ב $T=0$ אם כי בגודל מופחת $Z_k < 1$.

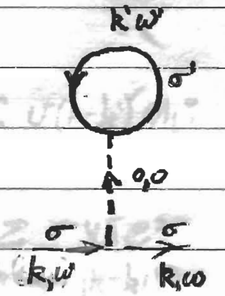


מיקום האי-רציפות ב n_k מגדיר משטח-פרמי גם במערכות אינטראקטיביות.

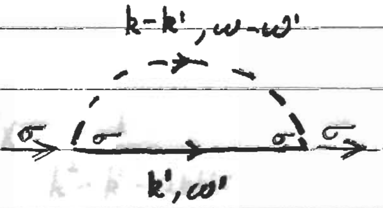
<u>משפט Luttinger</u>: הנפח הכלוא (המוכל) בתוך משטח פרמי אינו משתנה עם הדלקת האינטראקציה למרות שהמשטח יכול לשנות צורה.

בדרך כלל איננו יודעים לחשב את Σ ולכן את G באופן מדויק, ומחשבים אותן באופן מקורב. הכלל הוא לקחת רק חלק מהדיאגרמות העצמיות. שימו לב כי מהפיתוח של Dyson נובע כי גם אם הביטוי המקורב ל Σ כולל רק מספר סופי קטן של דיאגרמות הרי הביטוי ל G המתקבל משימוש בביטוי המקורב ל Σ כולל דיאגרמות עד לסדר אינסופי - אלו המתקבלות מחזרות האינסופית של הדיאגרמות ב Σ.

נפנה כעת לחישוב מקורב של Σ. הקירוב הפשוט ביותר: קירוב Hartree-Fock כולל רק את הדיאגרמות מסדר ראשון



: Hartree



Fock

סגירת לולאה פרמיונית
סכום על ספין
חישוב הלולאה על אלקטרונים עם ספין

$$\Sigma^1(k,i\omega_n) = (-1)(-1)\cdot 2\cdot U(q=0)\frac{1}{\beta V}\sum_{k',\omega'} G_0(k',i\omega') + (-1)\frac{1}{\beta V}\sum_{k',\omega'} U(k-k')\, G_0(k',\omega')$$

עברנו מ $\int \frac{dk}{(2\pi)^3}$ ל $\frac{1}{V}\sum_k$. השתמשנו ב $n_k^0 = \frac{1}{\beta}\sum_\omega G_0(k,i\omega_n)$

והשתמשנו בכך ש U אינו תלוי ב ω.

$$= 2U(q=0)\frac{1}{V}\sum_{k'} n_{k'}^0 - \frac{1}{V}\sum_{k'} U(k-k')\, n_{k'}^0$$

בגלל האלקטרון הנוסף

$$= 2v(q=0)\,n \;-\; \frac{1}{V}\sum_{k'} v(k-k')\,n_{k'}^{0}$$

עבור אינטראקציה קולומבית $v(k)=\frac{4\pi e^2}{k^2}$ באופן מיידי. אנו רואים כי איבר ה-Hartree מתבדר במקרה זה. התיקון v אינו מקרוסקופי ונובע מהעובדה שהכנסנו המשלים ארוך טווח. איבר Hartree אינו תלוי ב-k או ב-ω ומבטא את השדה הפוטנציאל הממוצע של הגרעינים כתוצאה מהאינטראקציה. הגרעינים אחראים לכך שקיים רקע חיובי אחיד השומר על נייטרליות חשמלית. התרומה מהאינטראקציה של האלקטרונים עם הרקע מבטלת בדיוק את התרומה האינסופית מאיבר ה-Hartree שחישבנו.

איבר Fock מסובך יותר ונותן את הדינמיקה של החלקיק בתוך הבינוני אך גם הוא אינו תלוי ב-ω וממשי (הוא תלוי ב-k). לכן במקרה זה Σ משנה את הצורה התלויה ב-k של אנרגיית ה-q.p אך אינה משנה זמן חיים שלה. במובן זה ה-q.p הינו עדיין מצב עצמי מדויק. ניתן לחשוב על התוצאות באופן פשוט: כל תוצאה של המשוב ה"מולקולרי" או ה-mean field אשר חש החלקיק כתוצאה מהאינטראקציות הממוצעות עם כל יתר האלקטרונים.

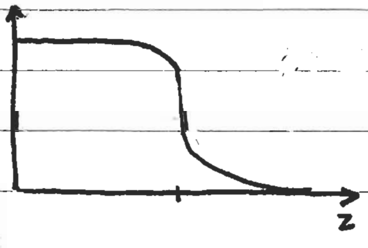
תרגיל: הראו כי בטמפרטורה אפס איבר Fock הינו:

$$\frac{1}{V}\sum_{k'} v(k-k')\,n_{k'}^{0}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k'<k_F} \frac{4\pi e^2}{|k-k'|^2} = 4\pi e^2 \int_0^{k_F} \frac{k'^2}{(2\pi)^2}\,dk' \int_{-1}^{1} dx\, \frac{1}{k^2-k'^2-2kk'x} \qquad x=\cos\theta$$

$$= \frac{e^2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{k_F} dk'\, k' \ln\left|\frac{k+k'}{k-k'}\right|$$

$$= \frac{2e^2}{\pi}k_F\left(\frac{1-z^2}{4z}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{1}{2}\right) \qquad z=\frac{k}{k_F}$$



לפונקציה זו נגזרת המתבדרת לוגריתמית ב-$k=k_F$ $\Leftarrow$

מהירות החבורה של ה-qp: $\left.\frac{\partial E_k}{\partial k}\right|_{k_F}$ המתבדרת באופן דומה

תוצאה זו נובעת מהטווח הארוך של האינטראקציה. אך אנו יודעים כי קיים סינון screening של האלקטרונים המבטל תוצאה זו ולכן גם מסיר את ההתבדרות הזו. נבצע מאוחר יותר כיצד נעשה הסינון.