קוונטיזציה שניה : Second Quantization

נתבונן במערכת של N חלקיקים זהים. פונקצית הגל שלה היא $\Psi(x_1, x_2 \cdots x_N)$.
צפיפות ההסתברות $|\Psi(x_1 \cdots x_N)|^2$ חייבת להיות אינווריאנטית תחת החלפה של שתי
תוויות המשמשות לשני החלקיקים מכיוון שאין לנו דרך להבדיל בין חלקיק אחד למשנהו.

$$\Rightarrow \quad \Psi(x_1 \cdots x_j \cdots x_k \cdots x_N) = e^{i\phi} \Psi(x_1 \cdots x_k \cdots x_j \cdots x_N)$$

מסתבר שבטבע ברמה האלמנטרית קיימות שתי אפשרויות:

$\phi=0$ בוזונים: פונקצית הגל אינווריאנטית תחת פרמוטציה של שני חלקיקים: סימטרית.

$\phi=\pi$ פרמיונים: פונקצית הגל נכפלת ב- 1- תחת פרמוטציה של שני חלקיקים: אנטיסימטרית.

מסתבר כי קיימים חלקיקים בשני מימדים בהם המקרה עבור ϕ כללי מתממש. (אפקט הול השבור הקוונטי) לחלקיקים המקיימים את תכונות הסימטריה עם $\phi \neq q\pi$ קוראים anyons.

אנו נעסוק במקרה הבוזוני והפרמיוני בלבד.

מרחב המצבים ה N חלקיקים נפרש על ידי המצבים $|u_{\alpha_1}\rangle \times |u_{\alpha_2}\rangle \cdots \times |u_{\alpha_N}\rangle$
כאשר $\{|u_\alpha\rangle\}$ היא בסיס שלם של מצבים חד חלקיקיים אורתונורמליים.

בסיס זה של מצבים אינו בעל תכונות סימטריה הנדרשות מפונקציית הגל הרב חלקיקית. נגדיר לכן
בסיס העונה לתכונות סימטריה אלה.

$$|u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2} \cdots u_{\alpha_N}\rangle = A \sum_{P=\text{פרמוטציות}} \xi^{\sigma(P)} |u_{P(\alpha_1)}\rangle \times |u_{P(\alpha_2)}\rangle \cdots \times |u_{P(\alpha_N)}\rangle$$

A היא קבוע נרמליזציה אותו נמצא אח"כ.
$\sigma(P)$ הוא מספר החילופים בפרמוטציה

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{בוזונים} \\ -1 & \text{פרמיונים} \end{cases}$$

[illegible]

למצבים אלה תכונות הסימטריה הנדרשות:

$$|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_k}\cdots u_{\alpha_j}\cdots u_{\alpha_N}\rangle = A\sum_P \xi^{\sigma(P)}|u_{P(\alpha_1)}\rangle\times\cdots|u_{P(\alpha_k)}\rangle\times\cdots|u_{P(\alpha_j)}\rangle\cdots|u_{P(\alpha_N)}\rangle$$

לכל פרמוטציה P נגדיר פרמוטציה Q כך ש $Q(\alpha_j)=P(\alpha_k)$
$Q(\alpha_k)=P(\alpha_j)$

ועבור כל יתר האינדקסים $Q(\alpha_i)=P(\alpha_i)$

כלומר P ו Q נבדלות בפרמוטציה אחת של האינדקסים α_j ו α_k. $\Rightarrow \sigma(Q)=\sigma(P)+1$

ברור כי הסכום על כל הפרמוטציות P הוא גם הסכום על כל הפרמוטציות Q שהוגדרו בצורה זו ולכן

$$= A\sum_Q \xi^{\sigma(Q)-1}|u_{Q(\alpha_1)}\rangle\times\cdots|u_{Q(\alpha_j)}\rangle\times\cdots|u_{Q(\alpha_k)}\rangle\times\cdots|u_{Q(\alpha_N)}\rangle$$

$$= \xi^{-1}|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_j}\cdots u_{\alpha_k}\cdots u_{\alpha_N}\rangle$$

מכאן נראה כי האינדקסים α_i מסודרים באופן שרירותי (בגלל תכונות הסימטריה מלבד שינוי מוחלטים עוד ניתן להביא לצורה זו ע"י הפעלת פרמוטציות נוספות כפולה של $\pm$)

לכן עבור בוזונים $\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_N$

עבור פרמיונים $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_N$

מכאן קל לראות שאם $\alpha_i=\alpha_j$ $|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_i}\cdots u_{\alpha_j}\cdots u_{\alpha_N}\rangle = -|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_j}\cdots u_{\alpha_i}\cdots u_{\alpha_N}\rangle$
$= -|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_i}\cdots u_{\alpha_j}\cdots u_{\alpha_N}\rangle = 0$

נמצא את מקדם הנרמול A $1=\langle u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_N}|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_N}\rangle$

$$= A^2\sum_{P,Q}\xi^{\sigma(P)+\sigma(Q)}\left(\langle u_{P(\alpha_N)}|\cdots\langle u_{P(\alpha_1)}|\right)\left(|u_{Q(\alpha_1)}\rangle\cdots|u_{Q(\alpha_N)}\rangle\right)$$

המכפלה הפנימית אינה מתאפסת רק אם Q מסדרת את האינדקסים באותה צורה של P.

במקרה הפרמיוני בו לא האינדקסים בהכרח שונים רק $Q=P$ מקיימת תנאי זה. מכיון שיש $N!$ פרמוטציות P אפשריות נקבל

$$(\xi^{\sigma(P)+\sigma(Q)} = \xi^{2\sigma(P)} = 1)$$

$$1 = A^2 \cdot N! \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{N!}}$$

במקרה הבוזוני נוכל לקבל מצב בו יש יותר מחלקיק אחד במצב מסוים $|u_\alpha\rangle$. נסמן ב n_α את מספר החלקיקים במצב זה. כעת $n_\alpha!$ הפרמוטציות Q הנוגעות ל P מחוץ לקבוצת האינדקסים של החלקיקים הנמצאים במצב $|u_\alpha\rangle$ תתנה תרומה חיובית לסכום. במקרה בו יש יותר מקבוצת מצבים כזו אחת נקבל

(מכיון ש $\xi=1$ סימן הפרמוטציה אינו רלוונטי)

$$1 = A^2 N! \cdot n_1! \, n_2! \cdots$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{N! \, n_1! \, n_2! \cdots}}$$

שים לב כי נוסחה זו מכילה גם את המקרה הפרמיוני שראינו, מכיון ש $n_i = 0,1$, $n_i! = 1$.

נשים לב כי <u>מספרי האכלוס</u> n_i מאפשרים לנו להגדיר באופן חד ערכי את המצב ולכן מתאים להשתמש בהצגה זו של המצבים

$$|n_1 \, n_2 \cdots \rangle$$

מספר החלקיקים המאכלסים את המצב u_1

מצבים אלה עבור $N=0,1,2\ldots\infty$ פורשים את ה <u>Fock space</u>

עד כה עסקנו במצבים. הפונקציות הגל הרב חלקיקיות הינן מקדמי הפיתוח של מצבים אלה בבסיס $|x_1\rangle \cdots |x_N\rangle$

$$\Psi(x_1 \cdots x_N) = (\langle x_N| \cdots \langle x_1|)\,|n_1 \, n_2 \cdots \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \, n_1! \, n_2! \cdots}} \sum_P \xi^{\sigma(P)} (\langle x_N| \cdots \langle x_1|)(|u_{P(\alpha_1)}\rangle \cdots |u_{P(\alpha_N)}\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N! \, n_1! \, n_2! \cdots}} \sum_P \xi^{\sigma(P)} u_{P(\alpha_1)}(x_1) \cdots u_{P(\alpha_N)}(x_N)$$

זוהי האמפליטודה למצוא את חלקיק 1 ב x_1 וכו'. עבור חלקיקים זהים אמפליטודה זו זהה עד כדי ± 1

לאנטיסימטר למצבים כל חלקיק אחר ב X_1, כנדרש.

$$\Psi(X_1\cdots X_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} u_{\alpha_1}(X_1) & \cdots & u_{\alpha_N}(X_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{\alpha_1}(X_N) & \cdots & u_{\alpha_N}(X_N) \end{vmatrix}$$

עבור פרמיונים : Slater determinant

לחלופין $\Psi(X_1\cdots X_N)$ הינו מקדמי הפיתוח של $|n_1 n_2\cdots\rangle$ במצבים

$$|X_1\cdots X_N\rangle = \frac{1}{N!}\sum_P \xi^{\sigma(P)}|X_{P(1)}\rangle\times\cdots|X_{P(N)}\rangle$$

שימו לב למקדם נורמול של $\frac{1}{\sqrt{N!}}$ קודם
לעומת שהמצבים קודם לכן

ואז מכאן ש

$$|n_1 n_2\cdots\rangle = \int dx_1\cdots dx_N\ \Psi(X_1\cdots X_N)\ |X_1\rangle\times\cdots|X_N\rangle$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P\int dx_1\cdots dx_N\ \Psi(X_{P(1)}\cdots X_{P(N)})\ |X_{P(1)}\rangle\cdots|X_{P(N)}\rangle$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P \xi^{\sigma(P)}\int dx_1\cdots dx_N\ \Psi(X_1\cdots X_N)\ |X_{P(1)}\rangle\cdots|X_{P(N)}\rangle$$

$$= \int dx_1\cdots dx_N\ \Psi(X_1\cdots X_N)\ |X_1\cdots X_N\rangle$$

אני משאיר לכם כתרגיל להראות ש $\langle X_1'\cdots X_N'|X_1\cdots X_N\rangle = \frac{1}{N!}\sum_P \xi^{\sigma(P)}\delta(x_1-x'_{P(1)})\cdots\delta(x_N-x'_{P(N)})$

קונספטואלית שוב הינה בדרך אלטרנטיבית להציג מצבים בפוק. המצב $|n_1 n_2\cdots\rangle$ מיוצג ?

$$|n_1 n_2\cdots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\,n_2!\cdots}}(a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}\cdots|0\rangle$$

מצב הוואקום

אופרטורי יצירה וחיסול

כאשר ה a^+ וה a - הצמודים ההרמיטים שלהם מקיימים את יחסי הקומוטציה או האנטיקומוטציה הבאים:

$$[a_i, a_j]_\xi = [a_i^+, a_j^+]_\xi = 0 \qquad a_i|0\rangle = 0$$

$$[a_i, a_j^+]_{-\xi} = \delta_{ij}$$

כאשר

$$[A,B]_- = AB - BA$$

$$[A,B]_+ = \{A,B\} = AB + BA \quad \xrightarrow{\text{עבור פרמיון}} \quad a^{+2} = a^2 = 0$$

המצבים $|x_1 \cdots x_N\rangle$ הם

$$|x_1 \cdots x_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \Psi^+(x_1) \cdots \Psi^+(x_N)|0\rangle$$

כאשר אופרטור השדה נתון ע"י

$$(*) \quad \Psi(x) = \sum_k u_k(x)\, a_k$$

$$\Leftarrow \quad \int dx\, \Psi(x) u_\ell^*(x) = \sum_k \int dx\, u_\ell^*(x) u_k(x)\, a_k = \sum_k \delta_{\ell k} a_k = a_\ell$$

ומכאן (*) וכן גם לבדוק ש

$$[\Psi(x), \Psi(x')]_\pm = [\Psi^+(x), \Psi^+(x')]_\pm = 0$$

$$[\Psi(x), \Psi^+(x')]_\pm = \sum_{k,\ell} u_k(x) u_\ell^*(x') [a_k, a_\ell^+]_\pm = \sum_k u_k(x) u_k^*(x') = \delta(x-x')$$

מתוך (*) גם נגזר שקל הנסח קוונטיזציה שניה. בקוונטיזציה ראשונה פונקצית הגל של חלקיק בודד נתונה לעבודה כ, $\Psi(x) = \sum_k a_k u_k(x)$ כאשר $u_k(x)$ הינו בסיס שלם של פונקציות עצמיות של אופרטור כלשהו ו a_k הינם מקדמי הבאה. בקוונטיזציה שניה a_k הופכים מ c-numbers לאופרטורים ו $\Psi(x)$ הופך בהתאם לאופרטור גם כן. ($u_k(x)$ ה נשארים c-functions) התלות הזמנית של האופרטורים בזמן של האופרטור $\Psi(x)$ נכנסת דרך האופרטורים הנמצאים ב a_k:

$$\Psi(x,t) = \sum_k u_k(x)\, a_k(t)$$

נבדוק שהגדרה זו משחזרת את התוצאות שקיבלנו קודם לכן.
בהמשך לדוגמא ב

$$\langle x_1' x_2' | x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2!} \sum_P \xi^{\sigma(P)} \delta(x_1 - x'_{P(1)})\, \delta(x_2 - x'_{P(2)})$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2') \pm \delta(x_1-x_2')\,\delta(x_2-x_1') \right]$$

$$\langle x_1' x_2' | x_1 x_2 \rangle = \frac{1}{2!} \langle 0 | \psi(x_2')\, \psi(x_1')\, \psi^{+}(x_1)\, \psi^{+}(x_2) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2!} \langle 0 | \psi(x_2') \left[\delta(x_1-x_1') \pm \psi^{+}(x_1)\, \psi(x_1') \right] \psi^{+}(x_2) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2!} \left\{ \delta(x_1-x_1') \langle 0 | \psi(x_2') \psi^{+}(x_2) | 0 \rangle \pm \langle 0 | \psi(x_2')\, \psi^{+}(x_1)\, \psi(x_1')\, \psi^{+}(x_2) | 0 \rangle \right\}$$

$$= \frac{1}{2!} \Big\{ \delta(x_1-x_1') \Big[\delta(x_2-x_2') \pm \langle 0 | \psi(x_2)\, \underbrace{\psi(x_2') | 0 \rangle}_{0} \Big]$$

$$\pm \langle 0 | \psi(x_2')\, \psi^{+}(x_1) \left[\delta(x_2-x_1') \pm \psi^{+}(x_2)\, \underbrace{\psi(x_1') \Big] | 0 \rangle}_{0} \Big\}$$

$$= \frac{1}{2!} \left\{ \delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2') \pm \delta(x_2-x_1') \langle 0 | \left[\delta(x_1-x_2') \pm \psi^{+}(x_1)\, \underbrace{\psi(x_2') \right] | 0 \rangle}_{0} \right\}$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\delta(x_1-x_1')\,\delta(x_2-x_2') \pm \delta(x_1-x_2')\,\delta(x_2-x_1') \right]$$

נבדוק כעת את הקשר של $|n_1 n_2 \cdots\rangle$ במונחי $|x_1 \cdots x_N\rangle$

$$|n_1 n_2 \cdots \rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots}}\, a^{+}_{\alpha_1} \cdots a^{+}_{\alpha_N} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots}}\, \frac{1}{N!} \sum_P \xi^{\sigma(P)}\, a^{+}_{P(\alpha_1)} \cdots a^{+}_{P(\alpha_N)} | 0 \rangle$$ כיוון ש $[a_i, a_j]_{\xi} = 0$:

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1!\, n_2! \cdots}}\, \frac{1}{N!} \int dx_1 \cdots dx_N \sum_P \xi^{\sigma(P)}\, u_{P(\alpha_1)}(x_1) \cdots u_{P(\alpha_N)}(x_N)\, \psi^{+}(x_1) \cdots \psi^{+}(x_N) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!\, n_1!\, n_2! \cdots}} \sum_P \xi^{\sigma(P)}\, u_{P(\alpha_1)}(x_1) \cdots u_{P(\alpha_N)}(x_N)\, | x_1 \cdots x_N \rangle$$

כדי שהאיזון יקיים בבעיה הקודמת.

משאיר לכם כתרגיל להראות ש:

$$a_i^+ a_i |\cdots n_i \cdots\rangle = n_i |\cdots n_i \cdots\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} a_i^+ |\cdots n_i \cdots\rangle &= \sqrt{n_i+1}\, |\cdots n_i+1 \cdots\rangle \\ a_i |\cdots n_i \cdots\rangle &= \sqrt{n_i}\, |\cdots n_i-1 \cdots\rangle \end{aligned}\right\}$$ עבור בוזונים

$$\left.\begin{aligned} a_i^+ |\cdots n_i \cdots\rangle &= \begin{cases} (-1)^{n_1+n_2+\cdots n_{i-1}} |\cdots n_i+1 \cdots\rangle & n_i=0 \\ 0 & n_i=1 \end{cases} \\ a_i |\cdots n_i \cdots\rangle &= \begin{cases} 0 & n_i=0 \\ (-1)^{n_1+n_2+\cdots n_{i-1}} |\cdots n_i-1 \cdots\rangle & n_i=1 \end{cases} \end{aligned}\right\}$$ עבור פרמיונים

כיצד להציג אופרטורים ב Fock space בעזרת אופרטורי יצירה ומיסול?

נתחיל באופרטור חד-חלקיקי: אופרטור המשפיע ומערב מצב של חלקיק אחד בלבד. לדוגמא: אופרטור התנע.
בבסיס המרחב של חלקיק יחיד אופרטור שכזה ניתן לרישום כאילו

$$\sum_{k,l} \langle u_k|A|u_l\rangle\, |u_k\rangle\langle u_l|$$

במקרה של N חלקיקים נפעיל אופרטור זה על כל אחד מהחלקיקים בנפרד.
נבחן את הפעולה $|u_k\rangle\langle u_l|$ על מצב רב חלקיקי

$$|u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!\, n_1!\, n_2! \cdots}} \sum_P \xi^{(P)} |u_{P(\alpha_1)}\rangle \cdots |u_{P(\alpha_N)}\rangle$$

קל לראות שאם $|u_l\rangle$ אינו מופיע בין המצבים $|u_{\alpha_1}\rangle \cdots |u_{\alpha_N}\rangle$ תוצאת הפעלת האופרטור תתן 0.
אם $|u_l\rangle$ מופיע פעם אחת הרי כל איבר בסכום של הפרמוטציות הנו יוחלף על ידי המצב $|u_k\rangle$
אם $|u_l\rangle$ מופיע n_l פעמים הרי כשנפעיל את $|u_k\rangle\langle u_l|$ נקבל לכל פרמוטציה P, n_l איברים בהם מוחלף אחד מה $|u_l\rangle$ ב $|u_k\rangle$.

קל להראות כי בקוונטיזציה שנייה האופרטור $|u_k\rangle\langle u_l|$ מיוצג על ידי $a_k^+ a_l$

נבדוק את הפעולה $a_k^+ a_l \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots |0\rangle$

אם a_l^+ לא מופיע במצב המקורי נצטרך לקדם את a_l עד לסוף כדי להרוס את המצב.

אם a_l^+ מופיע n_l פעמים אז (נניח $k<l$)

$$a_k^+ a_l \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots (a_k^+)^{n_k} \cdots (a_l^+)^{n_l} \cdots |0\rangle$$

$$= a_k^+ \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots}} (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots (a_k^+)^{n_k} \cdots \xi^{n_1+n_2+\cdots n_{l-1}} a_l (a_l^+)^{n_l} \cdots |0\rangle$$

עבור בוזונים קל לבדוק $a_l (a_l^+)^{n_l} = n_l (a_l^+)^{n_l-1} + (a_l^+)^{n_l} a_l$

נוכל לקדם לסוף ולהרוס מצב

עבור פרמיונים אם $n_l \neq 0$ אז בהכרח $n_l=1$! $a_l a_l^+ = 1 - a_l^+ a_l$

$$= \xi^{n_{k-1}+\cdots+n_{l-1}} n_l (a_1^+)^{n_1} (a_2^+)^{n_2} \cdots (a_k^+)^{n_k+1} \cdots (a_l^+)^{n_l-1} \cdots |0\rangle$$

וזהו המצב שקיבלנו בין שתי פעולות האופרטור בקוונטיזציה ראשונה. אני משאיר לכם לוודא כי הפקטור $\xi^{n_{k+1}+\cdots+n_{l-1}}$ מתקבל גם שם.

לכן אופרטור חד חלקיקי בכלל בקוונטיזציה שנייה הינו: $\sum_{\alpha,\beta} \langle\alpha|A|\beta\rangle a_\alpha^+ a_\beta$

לדוגמא אופרטור התנע. אם נבחר לעבוד בבסיס מצבי התנע $\langle p|\hat{P}|p'\rangle = p\,\delta_{p-p'}$

$$\hat{P} = \sum_p p\, a_p^+ a_p$$

אם נבחר לעבוד בבסיס המקום $\langle x|\hat{P}|x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$

$$\hat{P} = \int dx\,dx' \; -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\; \psi^+(x)\psi(x') = \int dx\, \psi^+(x)(-i\hbar)\partial_x \psi(x)$$

<u>תרגיל:</u> הראו כי צפיפות האלקטרונים נתונה על ידי $\psi^+(x)\psi(x)$

המילטוניאן חד חלקיקי $\quad H = \frac{P^2}{2m} + V(x)$

יראה לכן בהצגת המקום $\langle x|V(x)|x'\rangle = V(x)\delta(x-x')$ $\quad H = \int dx\, \Psi^+(x)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\Psi(x)$

ומכאן ש $\quad \langle P|V(x)|P'\rangle = \int dx\,dx'\, \langle P|x\rangle\langle x|V(x)|x'\rangle\langle x'|P'\rangle$

טרנספורם פורייה של $V(x)$: $\quad = \int dx\, V(x)\frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i(P'-P)x}{\hbar}} \equiv V(P'-P)$

בהצגת התנע $\quad H = \sum_{PP'} a_P^+\left[\frac{P^2}{2m} + V(P'-P)\right]a_{P'}$

ניתן לרשום באופן דומה כי אופרטור דו-גופי מוגדר $\quad \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\beta\\ \gamma\delta}} \langle\alpha\beta|U|\gamma\delta\rangle\, |\alpha\beta\rangle\langle\gamma\delta|$

משתמש בקוונטיזציה שנייה על ידי $\quad \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha\beta\\ \gamma\delta}} \langle\alpha\beta|U|\gamma\delta\rangle\, a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\gamma a_\delta$

כך שלמשל עבור אינטראקציה קולון $\quad \langle x'x|U|y'y\rangle = \frac{e^2}{|x-x'|}\delta(x'-y')\,\delta(x-y)$

ההצגה בקוונטיזציה שנייה היא $\quad \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3x'\, \Psi^+(x)\,\Psi^+(x')\,\frac{e^2}{|x-x'|}\,\Psi(x')\,\Psi(x)$

ואז משתמש לרוב בהצגת התנע כי

בהצגת התנע $\quad \frac{1}{2V_{vol}}\sum_{kk'q} a_k^+ a_{k'+q}^+\, U(q)\, a_{k'}\, a_{k+q}$

כאשר $\quad U(q) = \int d^3x\, \underbrace{U(x)}_{\frac{e^2}{|x|}} e^{-iqx} = \frac{4\pi e^2}{q^2}$