על מוליכות מאינטגרל מסלול

נתבונן בהמילטוניאן BCS לאלקטרונים עם אינטראקציה משיכה קצרת טווח

$$H=\int d^dr\left\{\sum_\sigma \psi_\sigma^+(r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu\right)\psi_\sigma(r)-g\psi_\uparrow^+(r)\psi_\downarrow^+(r)\psi_\downarrow(r)\psi_\uparrow(r)\right\}$$

בניסוח אינטגרל המסלול פונקצית החלוקה של הבעיה נתונה על ידי

$$Z=\int D\bar{\psi}D\psi\, e^{-S}$$

דהיינו האינטגרל על מצבים קוהרנטים פרמיונים עם הפעולה

$$S=\int_0^\beta d\tau\int d^dr\left\{\sum_\sigma \bar{\psi}_\sigma\left(\partial_\tau-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu\right)\psi_\sigma-g\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow\right\}$$

האינטראקציה המוצגת על ידי האבר מסדר רביעי ב ψ מונעת חישוב של האינטגרל. בניגוד למקרה הבוזוני גם אין באפשרותנו לבצע כאן קירוב saddle point בגלל האופי הגרסמני של האינטגרל. כדי לפתור בעיה זו נשתמש בHubbard-Stratonovich-transformation כדי לבצע decoupling של איבר האינטראקציה בעזרת הצגת אינטגרל מסלול על שדה מרוכב $\Delta(r,\tau)$ המקיים תנאי שפה $\Delta(\tau=0)=\Delta(\tau=\beta)$

$$1=\int D\Delta^* D\Delta\, e^{-\int d\tau\int d^dr\,\frac{1}{g}[\Delta^*-g\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow][\Delta-g\psi_\downarrow\psi_\uparrow]}$$

$$\Leftarrow\quad e^{g\int d\tau d^dr\,\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow}=\int D\Delta^*D\Delta\, e^{-\int d\tau d^dr\left[\frac{1}{g}|\Delta|^2-\Delta^*\psi_\downarrow\psi_\uparrow-\Delta\bar{\psi}_\uparrow\bar{\psi}_\downarrow\right]}$$

נגדיר את ה Nambu spinor

$$\bar{\Psi}=(\bar{\psi}_\uparrow,\psi_\downarrow)\ ,\quad \Psi=\begin{pmatrix}\psi_\uparrow\\ \bar{\psi}_\downarrow\end{pmatrix}$$

ונעבור לרכיבי פורייה

$$\bar{\Psi}(r)=\sum_k e^{-ikr}\bar{\Psi}(k)\ ,\quad \Psi(r)=\sum_k e^{ikr}\Psi(k)$$

$k=(\vec{k},\omega_n)$, $r=(\vec{r},\tau)$, $kr=\vec{k}\vec{r}-\omega_n\tau$ ו $\omega_n=(2n+1)\frac{\pi}{\beta}$ תדירויות Matsubara פרמיוניות הנדרשות כדי לקיים $\Psi(0)=-\Psi(\beta)$.

עבור השדה הבוזוני Δ נכתוב

$$\Delta(r) = \sum_{k} e^{ikr}\Delta(k)$$

כאשר $K=(\vec{k},\Omega_n)$ עם $\Omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ תדירויות Matsubara בוזוניות הנדרשות כדי לקיים $\Delta(0)=\Delta(\beta)$. במומנטום אלה נוכל לרשום

$$Z = \int D\bar{\Psi}\, D\Psi\, D\Delta^* D\Delta\; e^{-\beta V\left[\frac{1}{g}\sum_k |\Delta(k)|^2 - \sum_{kk'} \bar{\Psi}(k')\left(G_0^{-1}+V_\Delta\right)\Psi(k)\right]}$$

$$G_0^{-1} = \begin{pmatrix} -\partial_\tau + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu & 0 \\ 0 & -\partial_\tau - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \left(G_0^{-1}\right)_{k'k} = \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_k & 0 \\ 0 & i\omega_n + \xi_k \end{pmatrix}\delta_{kk'}$$

$$V_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(V_\Delta\right)_{k'k} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(k'-k) \\ \Delta^*(k-k') & 0 \end{pmatrix}$$

נוכל כעת לבצע את האינטגרל הגאוסי על Ψ כדי לקבל פעולה אפקטיבית עבור Δ. תוצאת האינטגרל הגאוסי היא

$$\det\left[-\beta V \cancel{\det}\left(G_0^{-1}+V_\Delta\right)\right]$$

$$\Leftarrow \quad Z = \int D\Delta^* D\Delta\; e^{-\left[\frac{\beta V}{g}\sum_k |\Delta(k)|^2 - \ln\det\left(-\beta V\left(G_0^{-1}+V_\Delta\right)\right)\right]}$$

נזכיר עובדה שימושית כללית עבור מטריצות:

$$\ln\det A = \mathrm{tr}\ln A$$

נבצע זאת במקרה בו A ניתן ללכסון

כאשר Λ אלכסונית עם ערכים עצמיים λ_j

$$A = U^{-1}\Lambda U$$

$$\ln\det A = \ln\det U^{-1}\Lambda U = \ln\det\Lambda = \ln\prod_j \lambda_j = \sum_j \ln\lambda_j$$

מצב שני

$$\mathrm{tr}\ln A = \mathrm{tr}\ln\left[1+(A-1)\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[A-1-\frac{1}{2}(A-1)^2+\frac{1}{3}(A-1)^3-\cdots\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[U^{-1}(\Lambda-1)U-\frac{1}{2}U^{-1}(\Lambda-1)^2U+\frac{1}{3}U^{-1}(\Lambda-1)^3U-\cdots\right]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\Lambda-1-\frac{1}{2}(\Lambda-1)^2+\frac{1}{3}(\Lambda-1)^3-\cdots\right]$$

$$= \sum_j\left[\lambda_j-1-\frac{1}{2}(\lambda_j-1)^2+\frac{1}{3}(\lambda_j-1)^3-\cdots\right] = \sum_j \ln\lambda_j$$

שים לב גם לתוצאה שראינו אתמול מיד:

$$\mathrm{tr}\ln A\cdot B = \ln\det A\cdot B$$

$$= \ln\det A + \ln\det B$$

$$= \mathrm{tr}\ln A + \mathrm{tr}\ln B$$

$$\Leftarrow \quad Z = \int D\Delta^* D\Delta\, e^{-\left[\frac{\beta V}{g}\sum_k|\Delta(k)|^2 - \mathrm{tr}\ln(-\beta V G_0^{-1}) - \mathrm{tr}\ln(1+G_0V_\Delta)\right]}$$

נחפש את הקונפיגורציה Δ המביאה למינימום את הפעולה האפקטיבית ל Δ. נצמצם את המרחב לקונפיגורציות קבועות $\Delta=\Delta_0=\Delta(k=0)$ בלבד

$$S = \frac{\beta V}{g}|\Delta_0|^2 - \ln\det\left(-\beta V(G_0^{-1}+V_\Delta)\right)$$

$$= \frac{\beta V}{g}|\Delta_0|^2 - \ln\prod_k\det\left[-\beta V\begin{pmatrix} i\omega_n-\xi_k & \Delta_0 \\ \Delta_0^* & i\omega_n+\xi_k\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\beta V}{g}|\Delta_0|^2 - \sum_k\ln\left[(-\beta V)^2(\omega_n^2+\xi_k^2+|\Delta_0|^2)\right]$$

$$\frac{\delta S'}{\delta \Delta_0^*} = \frac{\beta V}{g}\Delta_0 - \sum_k \frac{\Delta_0}{\omega_n^2+\xi_k^2+|\Delta_0|^2} = 0$$ תנאי האוכף:

$$\Rightarrow \frac{1}{g} = \frac{1}{\beta V}\sum_{\vec{k}}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^2+\xi_k^2+|\Delta_0|^2} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2E_k}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\left[\frac{1}{i\omega_n+E_k}-\frac{1}{i\omega_n-E_k}\right]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2E_k}\left[n_F(-E_k)-n_F(E_k)\right]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{2E_k}\tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)$$

זהו בדיוק ה BCS gap equation תחת הזיהוי $V_0 = \frac{g}{V}$ והדרישה כי במודל BCS
טווח האינטראקציה מוגבל על ידי ω_D.

ננסה כעת לטפל בסביבת T_c בה Δ קטן. נרצה לכתוב תורה אפקטיבית עבור Δ בתחום זה.
בפרט נתעלם מפלוקטואציות קוונטיות ב Δ, כלומר, נניח כי Δ אינו תלוי ב τ.
מדוע התלות בזמן של Δ קשורה לאופי הקוונטי של הבעיה? נזכר כי בפיתוח אינטגרל המסלול
נאלצנו לבצע את חלוקת הזמנים כתוצאה מהעובדה שאנו עוסקים באופרטורים לא קומוטטיבים.
במפורש - רצינו לחשב את $\langle\phi|e^{-\beta H(a^+a)}|\phi\rangle$. אם נפתח את האקספוננט נקבל

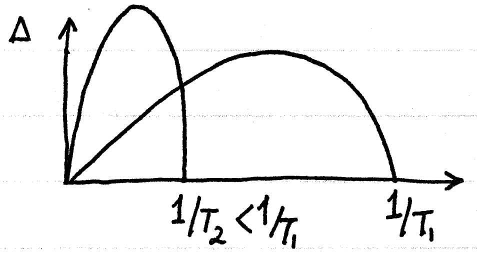
$$\langle\phi|1-\beta H(a^+a)+\frac{\beta^2}{2}H(a^+a)H(a^+a)-\cdots|\phi\rangle$$

$$\langle\phi|a^+aa^+a|\phi\rangle = \langle\phi|a^+a^+aa|\phi\rangle + \langle\phi|a^+a|\phi\rangle$$ כך שבעצם

$$= \phi^{*2}\phi^2 + \underbrace{\phi^*\phi}$$ נוסף מחובר a^+a

$$\langle\phi|e^{-\beta H(a^+a)}|\phi\rangle = e^{-\beta H(\phi^*\phi)}$$ אם נתעלם מהתיקון כתוצאה מאופי האופרטורי נקבל
שזו התוצאה המתקבלת מאינטגרל המסלול מקונפיגורציה שאינה משתנה בזמן.

אנו מצפים כי פלוקטואציות קוונטיות יהפכו פחות חשובות עם עליית הטמפרטורה. כיצד ראינו זאת?
איברים בפעולה האפקטיבית עבור Δ המערבים את התלות הזמנית יהיו קטנים בגלל נגזרות זמניות.
מכיון ש $\partial_\tau \Delta \sim \Omega_n \Delta \sim T\cdot\Delta$ איברים אלה יהפכו לא חשובים כאשר T גדלה
מהאנרגיה האיברים המופיעים בפעולה האפקטיבית.
דרך שקולה לראות זאת היא לשים לב שאורכו של הקטע הזמני בו משתנה Δ הוא $\beta=\frac{1}{T}$.
ככל ש T גדלה יותר הקטע קצר יותר ושינויים זמניים ב Δ צריכים להיות חדים יותר כדי
לקיים את תנאי המחזוריות $\Delta(0)=\Delta(\beta)$ ולכן עולים יותר הרבה.



נרצה לחשב הפעולה האפקטיבית עבור Δ קטן ונפתח את S' ב Δ (שנאמר נניח
אינו תלוי בזמן)

$$-\mathrm{tr}\ln(1+G_0V_\Delta) = -\mathrm{tr}\, G_0V_\Delta + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, G_0V_\Delta G_0V_\Delta - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(G_0V_\Delta G_0V_\Delta G_0V_\Delta) + \cdots$$

$$-\mathrm{tr}(G_0V_\Delta) = -\mathrm{tr}\sum_k \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n-\xi_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega_n+\xi_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Delta(k=0) \\ \Delta^*(k=0) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathrm{tr}(G_0V_\Delta G_0V_\Delta) = \mathrm{tr}\sum_{k\vec{q}} G_0(k)\,(V_\Delta)_{k,k+q}\, G_0(k+q)\,(V_\Delta)_{k+q,k}$$

$$= \mathrm{tr}\sum_{k\vec{q}} \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n-\xi_k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega_n+\xi_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Delta_q \\ \Delta_q^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_n-\xi_{k+q}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega_n+\xi_{k+q}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Delta_q \\ \Delta_{-q}^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2\sum_{k\vec{q}} \frac{|\Delta_q|^2}{(i\omega_n+\xi_k)(i\omega_n-\xi_{k+q})}$$

$$= 2\beta\sum_{\vec{q}} |\Delta_q|^2 \sum_{\vec{k}} \frac{n_F(-\xi_k)-n_F(\xi_{k+q})}{-\xi_{k+q}-\xi_k} = 2\beta\sum_{\vec{q}}|\Delta_q|^2\sum_{\vec{k}}\frac{n_F(\xi_{k-q/2})+n_F(\xi_{k+q/2})-1}{\xi_{k-q/2}+\xi_{k+q/2}}$$

אנו מעוניינים בהתנהגות עבור שינויים ארוכי טווח ב Δ : $\vec{q}$ קטן, ולכן נפתח

$$\xi_{k\pm q/2} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 \pm \vec{k}\cdot\vec{q} + \frac{q^2}{4}\right) - \mu = \xi_k \pm \frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}\cdot\vec{q} + \frac{\hbar^2}{8m}q^2$$

$$n_F(\xi_{k\pm q/2}) \simeq n_F(\xi_k) + \frac{\partial n_F}{\partial \xi_k}\left(\pm\frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}\cdot\vec{q} + \frac{\hbar^2 q^2}{8m}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi_k^2}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}\cdot\vec{q}\right)^2$$

$$\Rightarrow n_F(\xi_{k-q/2}) + n_F(\xi_{k+q/2}) \simeq 2n_F(\xi_k) + \frac{\partial n_F}{\partial \xi_k}\frac{\hbar^2 q^2}{4m} + \frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi_k^2}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}\cdot\vec{q}\right)^2$$

$$tr(G_0 V_\Delta G_0 V_\Delta) \simeq \beta V \sum_{\vec{q}} |\Delta_q|^2 \qquad \Leftarrow$$

$$\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2n_F(\xi_k) - 1 + \frac{\partial n_F}{\partial \xi_k}\frac{\hbar^2 q^2}{4m} + \frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi_k^2}\frac{\hbar^2}{2m}(\xi_k+\mu)q^2\cos^2\theta}{\xi_k + \frac{\hbar^2}{8m}q^2}$$

כאשר θ הזווית בין $\vec{k}$ ו $\vec{q}$. האינטגרל הזוויתי על האיבר האחרון הינו $\frac{4\pi}{3}$ לעומת 4π באיבר
האחרים ולכן

$$= \beta V \sum_{\vec{q}} |\Delta_q|^2 \int d\xi\, \nu(\xi) \frac{2n_F(\xi) - 1 + \frac{\partial n_F}{\partial \xi}\frac{\hbar^2 q^2}{4m} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi^2}\frac{\hbar^2}{2m}(\xi+\mu)q^2}{\xi + \frac{\hbar^2}{8m}q^2}$$

נזיז משתנה $\xi \to \xi - \frac{\hbar^2}{8m}q^2$ לקבל עד סדר שני ב q

$$= \beta V \sum_{\vec{q}} |\Delta_q|^2 \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\, \nu(\xi) \frac{1}{\xi}\left[2n_F(\xi) - 1 + \frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\hbar^2}{3}\frac{(\xi+\mu)}{2m}q^2\right]$$

אם נכפיל את החלק הפרופורציוני ל $1/g$ בפולה נקבל כי עד סדר שני ב Δ הפעולה האפקטיבית הינה

$$\beta V \sum_{\vec{q}} (\alpha + Cq^2)|\Delta_q|^2 = \int_0^\beta d\tau \int d^3r \left[\alpha|\Delta|^2 + C|\vec{\nabla}\Delta|^2\right]$$

$$\alpha(T) = \frac{1}{g} - \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\, \nu(\xi) \frac{1 - 2n_F(\xi)}{2\xi} \quad , \quad C(T) = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\, \nu(\xi) \frac{\hbar^2}{12m}\frac{\partial^2 n_F(\xi)}{\partial \xi^2}\frac{\xi+\mu}{\xi} \quad \text{כאשר}$$

נשים לב כי ב $T=T_c$ ה gap equation הינו

$$\frac{1}{g}-\int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\, \nu(\xi)\,\frac{1-2n_F(\xi,T_c)}{2\xi}=0$$

ולכן $\alpha(T_c)=0$

$$\Leftarrow \quad \alpha(T)=\alpha(T)-\alpha(T_c)=\nu_0\int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\,\frac{n_F(\xi,T)-n_F(\xi,T_c)}{\xi}$$

$$\simeq \nu_0\int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\,\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial n_F(\xi,T)}{\partial T}\bigg|_{T_c}(T-T_c)$$

$$=-\nu_0\int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\,\frac{1}{\xi}\,\frac{\xi}{T_c}\,\frac{\partial n_F(\xi,T)}{\partial \xi}\bigg|_{T_c}(T-T_c)$$

$$=\nu_0\,\frac{T-T_c}{T_c}$$

כלומר $\alpha(T)$ משנה סימן ב $T=T_c$.

מכיון ש $\frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi^2}$ גדולה עבור $|\xi|<T\ll\mu$:

$$C(T)\simeq \frac{\hbar^2}{2m}\nu_0\mu\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\,\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial^2 n_F}{\partial \xi^2}$$

$$=\frac{\hbar^2\nu_0\mu}{2m}\,\frac{7\beta^2}{2\pi^2}\,\zeta(3)$$

$\mu\simeq\frac{mv_F^2}{2}$:

$$=\frac{7\zeta(3)}{48\pi^2}\,\hbar^2\nu_0 v_F^2\cdot\frac{1}{T^2}$$

מכיון שמתחת ל T_c $\alpha<0$ אינטגרל המסלול אינו יציב במובן שקונפיגורציות עם $|\Delta|\to\infty$ תורמות משקלים אינסופיים. כדי לייצב הפעולה עלינו ללכת לסדר הבא ב Δ. קל לבדוק שהסדר השלישי מתאפס בדומה לסדר הראשון. תרומת הסדר הרביעי (עבור קונפיגורציה Δ_0 הקבועה במקום ובזמן) הינה

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\sum_k\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{i\omega_n-\xi_k} & 0\\ 0 & \frac{1}{i\omega_n+\xi_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \Delta_0\\ \Delta_0^* & 0\end{pmatrix}\right]^4$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{|\Delta_0|^2}{\omega_n^2+\xi_k^2}\right)^2 = \frac{V}{2}\sum_{\omega_n}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\xi\, \nu(\xi)\left(\frac{|\Delta_0|^2}{\omega_n^2+\xi^2}\right)^2 \simeq \beta V \frac{\nu_0}{4}\frac{\pi}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{1}{|\omega_n|^3}|\Delta_0|^4$$

$$= \beta V \frac{\nu_0}{4}\frac{\beta^2}{\pi^2}\frac{7}{4}\zeta(3)|\Delta_0|^4$$

קיבלנו לכן כי הפונקציונל האפקטיבי עבור Δ ליד T_c הינו

$$\beta\int d^3r \left\{ \nu_0 \frac{T-T_c}{T_c}|\Delta|^2 + \frac{7\zeta(3)}{48}\nu_0\left(\frac{\hbar v_F}{\pi T}\right)^2|\vec{\nabla}\Delta|^2 + \nu_0\frac{7\zeta(3)}{16}\frac{1}{(\pi T)^2}|\Delta|^4 \right\}$$

מכיון שפעולה זו מופיעה בסכום על קונפיגורציות שאינן תלויות בזמן ניתן להתייחס לביטוי הכולל את β כאל האנרגיה החופשית של הקונפיגורציה. זהו בדיוק האנרגיה החופשית שכתבו לנדאו וגינזבורג לבעיה (אבל לדעת את הערכים המדויקים של מקדמי הפיתוח- לשם כך נדרשת התורה המיקרוסקופית בה השתמשנו).

טיפול RG במודל XY

פונקצית החלוקה של המודל (בקירוב גרדיאנטים קטנים של הפאזה) $Z = \int D\theta\, e^{-S}$

עם הפעולה $S = \frac{K}{2}\int d^2r\,(\vec{\nabla}\theta)^2 \quad , K = \beta J$

משפט הלמהולץ מבטא לנו כי כל שדה וקטורי $\vec{V}$ הגזיר פעמיים ניתן לפרקו כסכום $\vec{V} = \vec{V}_\ell + \vec{V}_t$

כאשר הרכיב האורכי (irrotational) חסר curl $\vec{\nabla}\times\vec{V}_\ell = 0 \Rightarrow \vec{V}_\ell = \vec{\nabla}\phi$

הרכיב הרוחבי (solenoidal) חסר divergence $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_t = 0 \Rightarrow \vec{V}_t = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

אזי

$$\int_S d^2r\, \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\theta = \int_S d^2r\, \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \Rightarrow$$

$$\int_S d^2r\, \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\theta = \hat{z}\oint d\vec{\ell}\,\vec{\nabla}\theta = 2\pi n\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 2\pi\hat{z}\sum_i m_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

נשים $\vec{A} = -\psi(\vec{r})\hat{z}$ לקבל ש ψ מקיימת

$$\nabla^2\psi = 2\pi\sum_i m_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

קל לבדוק ש

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i m_i \ln\frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{a} \equiv \sum_i 2\pi m_i\, C(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

כאשר $C(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\vec{r}|}{a}$

היא פונקצית גרין של משוואת לפלס בדו מימד. בדיקה:

$$\int_S d^2r\,\nabla^2 C(r) = \int_S d^2r\,\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}C \overset{\text{גאוס}}{=} \oint R\,d\varphi\,(\vec{\nabla}C)_r = 2\pi\cdot R\,\frac{1}{2\pi R} = 1$$

S= עיגול
שטח העיגול
ברדיוס R

מכאן

$$S=\frac{K}{2}\int d^2r\left[\vec\nabla\phi-\vec\nabla\times(\hat z\psi)\right]^2$$

$$=\frac{K}{2}\int d^2r\left[(\vec\nabla\phi)^2-2\vec\nabla\phi\cdot\vec\nabla\times(\hat z\psi)+\left(\vec\nabla\times(\hat z\psi)\right)^2\right]$$

אינטגרציה בחלקים על האיבר השני ושימוש ב $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A)=0$ מראה כי הוא לא תורם
מכיון ש $\vec\nabla\times(\hat z\psi)=(\partial_y\psi,-\partial_x\psi,0)$

$$=\frac{K}{2}\int d^2r\left[(\vec\nabla\phi)^2+(\vec\nabla\psi)^2\right]$$

אינטגרציה בחלקים:

$$=\frac{K}{2}\int d^2r\left[(\vec\nabla\phi)^2-\psi\nabla^2\psi\right]+\underbrace{\frac{K}{2}\oint d\varphi R\cdot\psi\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R}}_{\substack{\text{עיגול ברדיוס}\\ R\to\infty}}$$

נשתמש ב:

$$\psi\big|_{r=R\to\infty}=\sum_i m_i\ln\frac{R}{a}\quad,\quad\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R\to\infty}=\sum_i m_i\frac{1}{R}$$

ובמשוואה שמקיימת ψ נקבל

$$S=\frac{K}{2}\int d^2r(\vec\nabla\phi)^2-2\pi^2K\sum_{i,j}m_im_jC(\vec r_i-\vec r_j)+\beta\sum_iE_c+\pi K\Big(\sum_i m_i\Big)^2\ln\frac{R}{a}$$

כשהוספנו את רכב אנרגית הליבה של ה vortices מכיון שבו באיזור קרוב הגרדיאנט הרציף נשבר. נוכל כעת לרשום את פונקצית החלוקה כמכפלה

$$Z=Z_eZ_t$$

כאשר החלק הרציף ברכב האורכי של $\nabla\theta$ הינו

$$Z_e=\int D\phi\, e^{-\frac{K}{2}\int d^2r(\vec\nabla\phi)^2}$$

ורכב הרוטורי תלוי בקואורדינטות מרכזי ה vortices $\vec r_i$ ובמטענים הטופולוגים m_i. איבר השפה שקיבלנו ב S מגביל בגבול התרמודינמי את סך המטענים להתאפס $\sum_i m_i=0$.
מכיון שהאנרגיה של vortex עם $m=2$ קרובה לאנרגיה של שני vortices (כיון שהגרדיאנט במרחקים גדולים דומה לשתי הקונפיגורציות) אך האנטרופיה שלו קטנה פי 2 נוכל להזניח vortices עם $m\neq\pm1$ בטמפרטורה נמוכה.

אם נגדיר את ה vortex fugacity

$$y_0 = e^{-\beta E_c}$$

שיקולים אלה מובילים אותנו ל

$$Z_t = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{y_0^{2N}}{(N!)^2} \int \prod_{i=1}^{2N} \frac{d^2 r_i}{a^2}\, e^{4\pi^2 K \sum_{i<j} m_i m_j C(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

הצגה לפונקציית החלוקה של פלסמה נטרלית עם N מטענים חיוביים $(m=1)$ ו N מטענים שליליים $(m=-1)$ ואינטראקציה קולומבית דו-ממדית בצבר הגרנד-קנוני. (הפקטור $\frac{1}{(N!)^2}$ נדרש כדי לספור על מספר הפרמוטציות בהן מקבלים אותה קונפיגורציה כאשר אנו מחליפים את מיקומי N המטענים החיוביים ו N המטענים השליליים במישור).

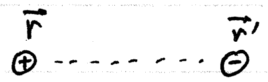
כפי שכבר ציינו אנו מצפים למצוא במודל זה מעבר מפאזה בטמפרטורות נמוכות בהן האינטראקציה בין המטענים (vortices) גורמת להם להופיע כזוגות קשורים דיפולים לפאזה בטמפרטורה גבוהה בה האינטראקציה ממוסכת, הדיפולים מתפרקים והמטענים יוצרים פלסמה של מטענים חופשיים. נוכל לצפות את התהליך על ידי בחינת האינטראקציה בין שני מטענים במרחק r. בטמפרטורות נמוכות המטענים חווים אינטראקציה דרך הפוטנציאל הקולומבי $C(r)$ (bare Coulomb potential). המצאות הדיפולים במערכת מיוצגת על ידי קבוע דיאלקטרי אפקטיבי ϵ המקטין את ה bare interaction: $C(r)/\epsilon$. הקבוע הדיאלקטרי גדל עם הטמפרטורה והופעת מספר גדול יותר של דיפולים עד שבטמפרטורה קריטית הוא מתבדר המערכת הופכת מתכתית והאינטראקציה ממוסכת.

נתבונן לכן באינטראקציה האפקטיבית בין שני מטענים חיצוניים עם סימן הפוך ב $\vec{r}$ ו $\vec{r}'$. נניח כי אנו בטמפרטורות נמוכות כך ש $\beta E_c \gg 1 \Rightarrow y_0 \ll 1$ ונפתח את האינטראקציה האפקטיבית בהרחבה של y_0 עד סדר שני:

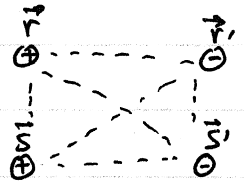
$$e^{-S_{eff}(\vec{r}-\vec{r}')} \equiv \left\langle e^{-4\pi^2 K C(\vec{r}-\vec{r}')} \right\rangle_t$$

$$= e^{-4\pi^2 K C(\vec{r}-\vec{r}')} \times \left[\frac{1 + \frac{y_0^2}{a^4} \int d^2 s\, d^2 s'\, e^{-4\pi^2 K C(\vec{s}-\vec{s}')}\, e^{4\pi^2 K D(\vec{r},\vec{r}',\vec{s},\vec{s}')} + O(y_0^4)}{1 + \frac{y_0^2}{a^4} \int d^2 s\, d^2 s'\, e^{-4\pi^2 K C(\vec{s}-\vec{s}')} + O(y_0^4)} \right]$$

$$D(\vec r, \vec r', \vec s, \vec s') = C(\vec r - \vec s) - C(\vec r - \vec s') - C(\vec r' - \vec s) + C(\vec r' - \vec s')$$ כאשר



האבר מסדר אפס ב-y_0 מקבלו את האינטראקציה הישירה



האבר מסדר שני ב-y_0 כולל האינטראקציה גם עם זוג המטענים הנוסף ב-$\vec s, \vec s'$

עד סדר שני ב-y_0 נקבל לכן

$$e^{-S_{eff}(\vec r - \vec r')} = e^{-4\pi^2 K C(\vec r - \vec r')}\left[1 + \frac{y_0^2}{a^4}\int d^2s\, d^2s'\, e^{-4\pi^2 K C(\vec s - \vec s')}\left(e^{4\pi^2 K D(\vec r \vec r' \vec s \vec s')} - 1\right)\right] + O(y_0^4)$$

המצאות של הגורם $e^{-4\pi^2 K C(\vec s - \vec s')} = \frac{1}{|\vec s - \vec s'|^{2\pi K}}$ גורמת לכך שהאינטגרל נשלט על ידי $|\vec s - \vec s'|$ קטנים. נעבור לכן ל

$$\vec R = \frac{\vec s + \vec s'}{2} \qquad \vec s = \vec R - \vec v/2$$
$$\vec v = \vec s' - \vec s \quad \Leftrightarrow \quad \vec s' = \vec R + \vec v/2$$

ונפתח ב-$\vec v$

$$D(\vec r, \vec r', \vec s, \vec s') \simeq -\vec v \vec\nabla_R C(\vec r - \vec R) + \vec v \cdot \vec\nabla_R C(\vec r' - \vec R) + O(v^3)$$

לסדר זה

$$e^{4\pi^2 K D(\vec r \vec r', \vec s, \vec s')} - 1 \simeq -4\pi^2 K\, \vec v \cdot \vec\nabla_R \left[C(\vec r - \vec R) - C(\vec r' - \vec R)\right]$$
$$+ 8\pi^4 K^2 \left[\vec v \cdot \vec\nabla_R \left[C(\vec r - \vec R) - C(\vec r' - \vec R)\right]\right]^2 + O(v^3)$$

הדבר קורה כי האינטגרל על $d^2\vec v$ מוביל להתאפסות האיברים הלינאריים ב-$\vec v$. האיברים הריבועיים הם מהצורה

$$\int d^2v\, v_\alpha v_\beta \nabla_\alpha [C-C] \nabla_\beta [C-C] = \int d^2v\, v_\alpha^2 \left(\nabla_\alpha [C-C]\right)^2 = \frac{1}{2}\int d^2v\, v^2 \left(\vec\nabla [C-C]\right)^2$$

$$\Rightarrow e^{-S_{eff}(\vec r - \vec r')} \simeq e^{-4\pi^2 K C(\vec r - \vec r')}$$
$$\times\left[1 + \frac{y_0^2}{a^4} 2\pi \int_a^\infty dv\, v\, e^{-4\pi^2 K C(v)} \cdot 8\pi^4 K^2 \frac{v^2}{2}\int d^2R \left(\vec\nabla_R \left[C(\vec r - \vec R) - C(\vec r' - \vec R)\right]\right)^2\right]$$

כשהגודל המרחק של האינטגרל על υ נותן מרחק ששני vortices (מנוגדים) לא יכולים לאכלס אותה נקודת סריג

אינטגרציה בחלקים על R תוך שימוש בעובדה $\nabla^2 C(R) = \delta(R)$ מובילה ל

$$\int d^2R \left(\nabla_R\left[C(\vec{r}-\vec{R}) - C(\vec{r}\,'-\vec{R})\right]\right)^2 = 2C(\vec{r}-\vec{r}\,') - 2C(0)$$

על הסריג זהו העצם $C(a)=0$

$$\Rightarrow e^{-S_{eff}(\vec{r}-\vec{r}\,')} = e^{-4\pi^2 K C(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left[1 + 16\pi^5 K^2 y_0^2\, C(\vec{r}-\vec{r}\,')\int_a^\infty \frac{d\upsilon}{a}\left(\frac{\upsilon}{a}\right)^{3-2\pi K} + O(y_0^4)\right]$$

עד לסדר זה אנו עובדים נוכל להעלות את הביטוי בסוגריים לאקספוננט ולרשום

$$S_{eff}(\vec{r}-\vec{r}\,') = 4\pi^2 K_{eff}\, C(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

עם

$$K_{eff} = K - 4\pi^3 K^2 y_0^2 \int_a^\infty \frac{d\upsilon}{a}\left(\frac{\upsilon}{a}\right)^{3-2\pi K}$$

אנו רואים כי האינטגרל מתבדר עבור $K < \frac{2}{\pi}$ ⇐ $T > \frac{\pi}{2}J$: בדיוק הנקודה בה האנרגיה החופשית של vortex בודד משנה סימן. הקושי הנלווה להתבדרות יכול להיות מטופל בעזרת <u>רנורמליזציה</u>.

נחלק את האינטגרל לשני חלקים כאשר da אינפיניטסימלי

$$\int_a^\infty = \int_a^{a+da} + \int_{a+da}^\infty$$

$$K_{eff} = K - 4\pi^3 K^2 y_0^2 \int_a^{a+da} \frac{d\upsilon}{a}\left(\frac{\upsilon}{a}\right)^{3-2\pi K} - 4\pi^3 K^2 y_0^2 \int_{a+da}^\infty \frac{d\upsilon}{a}\left(\frac{\upsilon}{a}\right)^{3-2\pi K}$$

$$= K - 4\pi^3 K^2 y_0^2 \frac{da}{a} - 4\pi^3 K^2 y_0^2 \left(\frac{a+da}{a}\right)^{4-2\pi K} \int_{a+da}^\infty \frac{d\upsilon}{a+da}\left(\frac{\upsilon}{a+da}\right)^{3-2\pi K}$$

עד סדר שני ב-y_0:

$$= K(a') - 4\pi^3 K^2(a')\, y_0^2(a') \int_{a'}^\infty \frac{d\upsilon}{a'}\left(\frac{\upsilon}{a'}\right)^{3-2\pi K(a')}$$

כאשר $a' = a + da$!

$$K(a') = K(a) - 4\pi^3 K^2(a)\, y_0^2(a) \frac{da}{a}$$

$$y_0(a') = y_0(a)\left(1+\frac{da}{a}\right)^{2-\pi K(a)}$$

הצלחנו להציג את K_{eff} באופן המשוער למערכת עם קטע סריג $a'=a+da$ על ידי כך שהכנסנו את קבועי הצימוד של המודל K ו-y_0 לפונקציות של הסקלה a. כך עוד אנו מתעניינים בפונקציות קורלציה במרחקים הגדולים מ-a' אנו יכולים לחשוב בעזרת מודל הנראה כמו המודל המקורי אך עם a' cutoff ו-renormalized parameters: $K(a')$ ו-$y_0(a')$. בדרך כלל בתהליך הרנורמליזציה מתווספים למודל איברים נוספים המקיימים את הסימטריות של המודל. במקרה שלנו עד סדר שני ב-y_0 זה לא קורה והמודל שומר על צורתו.

נשתמש בפרמטריזציה

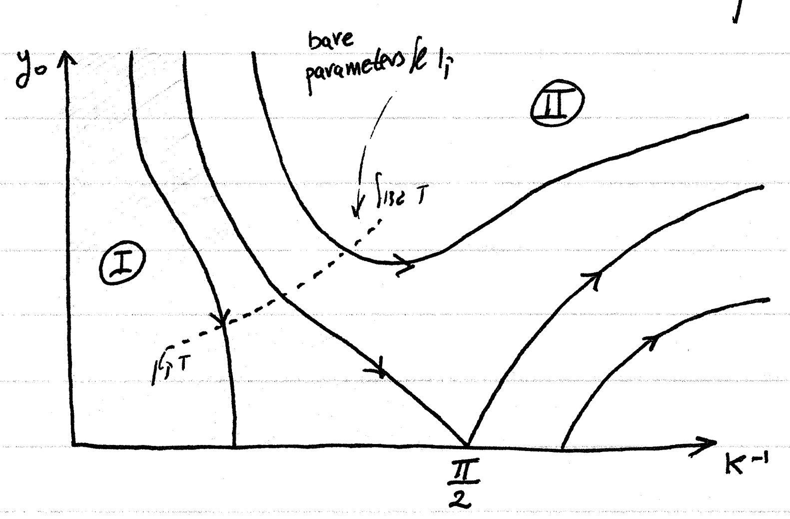
$$a' = a+da = a e^{dl} = a + a\,dl \Rightarrow dl = \frac{da}{a}$$

כדי לקבל את משוואות הזרימה flow equations

$$\frac{dK^{-1}(l)}{dl} = 4\pi^2 y_0^2(l) + O(y_0^4)$$

$$\frac{dy_0(l)}{dl} = \left[2-\pi K(l)\right] y_0(l) + O(y_0^4)$$

כשפותרים את משוואות הזרימה הסופיות עבור K^{-1} ההתחלתיים לקבוע הפיזיקליים דיאגרמת הזרימה במישור K^{-1}, y_0 הזרימה נראית כך:



אנו רואים כי מרחב הפרמטרים נחלק לשני אזורים:

אם ה bare parameters - אלו המתארים את המערכת בסקלה המיקרוסקופית a נמצאים באזור I המערכת זורמת תחת טרנספורמציית ה RG אל הקו $y_0=0\,,\ K'^{-1}=K^{-1*}<\frac{\pi}{2}$ זהו קו של נקודות שבת יציבות (stable fixed points) - מערכות הנמצאות עליו לא זורמות וסטיות קטנות ממנו נמחקות בזרימה המחזירה את המערכת אליו. בתחום זה המערכת מתוארת בסקלות ארוכות על ידי phase stiffness >0 $\Leftrightarrow$ קבוע דיאלקטרי סופי (הגדול מערכו ב bare level עקב המיסוך של דיפולים הקשורים המגדילים את הפולריזביליות של התווך האלקטרי) ! vortex fugacity $\to 0$ בתחום זה y הינו פרמטר לא רלוונטי (irrelevant coupling). במקרה זה מתוארת ה XY model עם קורלציה הדועכת אלגברית.

באזור II המערכת זורמת אל עבר $K^{-1}\to\infty$ ו $y_0=1$ המתאים לתאור הדואלי של פלסמה מטענים חופשיים או לתחום בו קורלציית הפאזה של ה XY model דועכת אקספוננציאלית. באזור II K^{-1} ו y_0 פרמטרים רלוונטיים - הם גדלים תחת טרנספורמציית ה RG.

כדי לתאר את אזור המעבר נתמקד בו ונגדיר $\quad x=K^{-1}-\frac{\pi}{2}$

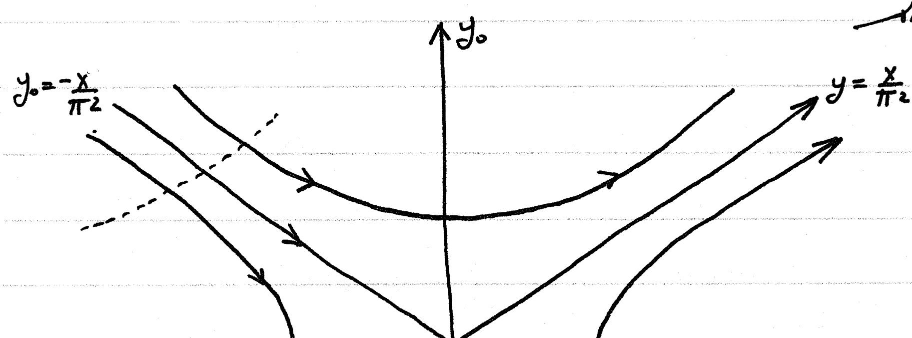
עד סדר ראשון ב x נקבל שמשוואות הזרימה נראות

$$\frac{dx}{dl}=4\pi^3y_0^2+O(xy_0^2,y_0^4)$$

$$\frac{dy_0}{dl}=\frac{4}{\pi}xy_0+O(x^2y_0,y_0^3)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dl}(x^2-\pi^4y_0^2)=0$$

$\Leftarrow$ הזרימה לאורך היפרבולות



⇐ המודל נמצא בנקודה הקריטית (T_{KT}) המפרידה בין ההתנהגויות השונות כאשר ה bare parameters מקיימים

$$y_0 = -\frac{x}{\pi^2} = -\frac{K^{-1}}{\pi^2}+\frac{1}{2\pi}$$

$$y_0 = e^{-\frac{E_c}{T_{KT}}}, \qquad -\frac{K^{-1}}{\pi^2}+\frac{1}{2\pi} = -\frac{T_{KT}}{\pi^2 J}+\frac{1}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad T_{KT} = \frac{\pi}{2}J\left(1-2\pi e^{-\frac{E_c}{T_{KT}}}\right)$$

זוהי משוואה סתומה ל T_{KT}. נשים לב שבגבול בו ה bare E_c גדול התוצאה מתקרבת ל $\frac{\pi}{2}J$ אותה קיבלנו משיקולי אנרגיה חופשית של vortex בודד. ההערכה ל T_{KT} קיים לתוצאה זו תיקון מהשפעתם של זוגות vortex-antivortex קשורים (דיפולים) כפי שציינו לעיל.

מערכת המשוואות על הקו הקריטי (ה seperatrix בין אזור ב ל II) נותנת ל $K(\ell\to\infty)=\frac{2}{\pi}$ ואילו מערכת המשוואות מיד מעל הקו הקריטי נותנת ל $K(\ell\to\infty)=0$. קיבלנו לכן ש $\rho_s(\ell\to\infty)$, renormalized phase stiffness עוברת קפיצה מ 0 מעל T_{KT} ל $\frac{2}{\pi}\cdot T_{KT}$ מיד מתחת למעבר. קפיצה זו היא אוניברסלית ואחת מהמאפיינים הבולטים של המעבר.

לסיום, נוכל להעריך את אורך הקורלציה ξ עבור $T>T_{KT}$ ליד המעבר. בתחום זה כפי שראינו $x^2-\pi^4 y_0^2 = C < 0$

C מתאפס על הקו הקריטי כך שאנו נוכל לרשום $C=-b^2(T-T_{KT})$ ולקבל ממשוואות ה RG

$$\frac{dx}{d\ell} = 4\pi^3 y_0^2 = \frac{4}{\pi}\left[x^2+b^2(T-T_{KT})\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x^2+b^2(T-T_{KT})} = \frac{4}{\pi}d\ell$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi}\ell = \frac{1}{b\sqrt{T-T_{KT}}}\left[\arctan\left(\frac{x(\ell)}{b\sqrt{T-T_{KT}}}\right) - \arctan\left(\frac{x(0)}{b\sqrt{T-T_{KT}}}\right)\right]$$

אנו רוצים לעצור את האינטגרציה כאשר $x(\ell^*)\sim y(\ell^*)\sim 1$ מכיוון שמעבר לכך החישוב ההפרעתי ב y_0 שאנו עורכים אינו תקף. מכיוון ש $|x(0)|\ll 1$ ו $\frac{T-T_{KT}}{T_{KT}}\ll 1$ האיברים הינם

$$\ell^* \approx \frac{\pi^2}{8b\sqrt{T-T_{KT}}}$$

בקירוב $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$ לכן

$$\xi \approx a e^{\ell^*} \approx a e^{\frac{\pi^2}{8b\sqrt{T-T_{KT}}}}$$

!