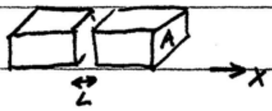


נתבונן במשוואת GL עבור $g=\frac{\Psi}{|\Psi_0|}$ בהעדר שדות חיצוניים:
ובגלל סימטריית הבעיה נניח $g=g(x)$

$$\xi^2 \frac{d^2 g}{dx^2} + g - |g|^2 g = 0$$

בתוך העל מוליכים $|\Psi|=|\Psi_0|$ כך ש $g=1$ אך הפאזה של פרמטר הסדר צריכה להיות שונה. העל מוליך השמאלי יכול לשבור את הסימטריה $U(1)$ באופן שונה מהעל מוליך הימני. נניח ללא הגבלת הכלליות שהפאזה בעל מוליך השמאלי היא 0 ובימני $\Delta\varphi$. עלינו למצוא לכן פתרון למשוואת GL תחת תנאי השפה $g=1$ ב $x=0$ ו $g=e^{i\Delta\varphi}$ ב $x=L$.
כל עוד $\xi \gg L$ האיבר הראשון במשוואה גדול מהאיברים האחרים בפקטור מסדר גודל $\left(\frac{\xi}{L}\right)^2$.
נוכל לכן להזניח את שני האיברים האחרונים ולהשאר עם משוואת Laplace $\partial_x^2 g=0$ שפתרונה תחת תנאי השפה שלנו. קל לוודא שהפתרון הינו מהצורה

עבור $0 \le x \le L$:

$$g(x) = 1-\frac{x}{L} + \frac{x}{L}e^{i\Delta\varphi}$$

אם נציב בביטוי ל $\vec{J}_s$ (עבור $\vec{A}=0$)

$$\vec{J}_s = \frac{e^*\hbar}{2m^* i}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)$$

נקבל עבור הזרם בכיוון x:

$$I = I_c \sin\Delta\varphi$$

כאשר

$$I_c = \frac{2e\hbar\Psi_0^2}{m^*}\cdot\frac{A}{L}$$

אם נציב את $g(x)$ שקיבלנו ב LG free energy נקבל כי זו תלויה בהפרש הפאזות בין שני העל-מוליכים באופן המתכונתי ל $1-\cos\Delta\varphi$. כלומר המערכת מעדיפה למינימום את האנרגיה החופשית שלה על ידי נעילת ערכי הפאזה העל מוליכה בשני חלקיה לאותו הערך. נכליל כעת את הדיון למערך דו-מימדי (על סריג ריבועי) של צמתי Josephson.
אם נניח כי ניתן להזניח פלקטואציות באמפליטודת פרמטר הסדר של כל אחד מהגרגרים העל-מוליכים (שהינם gapped עבור טמפרטורות מתחת לטמפרטורת המעבר שקיבלנו בקירוב ה mean-field) נמצא כי האנרגיה החופשית של המערכת נתונה על ידי

$$H = J\sum_{\langle ij\rangle}\left[1-\cos(\theta_i-\theta_j)\right]$$ מודל XY קלאסי

$J \equiv \rho_s$ היא ה phase stiffness

פונקצית החלוקה של המודל היא לכן

$$Z = \int \prod_i d\theta_i\, e^{-S} \equiv \int D\theta_i\, e^{-S}$$

$$S = \beta J \sum_{\langle ij\rangle}\left[1-\cos(\theta_i-\theta_j)\right]$$

נרצה לחשב את הקורלציה בין הפאזות בשתי נקודות בסריג

$$\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle = \frac{1}{Z}\int D\theta_i\, e^{i(\theta_I-\theta_J)}e^{-S}$$

נתבונן תחילה בטמפרטורות נמוכות בהן אנו מצפים כי הפאזות של אתרים שכנים קרובות זו לזו. תחת תנאי זה נוכל לקרב

$$S \approx \beta J \sum_{\langle ij\rangle}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}(\theta_i-\theta_j)^2\right)\right]$$

$$= \frac{\beta J a^2}{2}\sum_{\langle ij\rangle}\frac{(\theta_i-\theta_j)^2}{a^2} \longrightarrow \int d^2r\, \frac{\beta J}{2}(\vec\nabla\theta)^2$$

כאשר a הינו קבוע הסריג. נזכיר כי מודל זה מתקבל גם מתוך האנרגיה החופשית של LG אם נניח כי אמפליטודת פרמטר הסדר קבועה וכי הפלקטואציות הן רק בפאזה, כלומר $\psi(r) = \psi_0 e^{i\theta(r)}$.

במצב זה נקבל עד כדי קבוע

$$Z = \int D\theta(r)\, e^{-\beta\int d^2r\, \frac{\hbar^2|\psi_0|^2}{2m^*}(\vec\nabla\theta)^2}$$

במונחי משתני פוריה (A שטח המערכת)

$$\theta(\vec r) = \frac{1}{\sqrt A}\sum_{\vec k}\theta(\vec k)e^{i\vec k\cdot\vec r}$$

$(\theta(k) = \theta^*(-k))$

$$S = \frac{\beta J}{2}\sum_{\vec k}k^2\theta(k)\theta(-k)$$

$$\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle = \frac{1}{Z}\int D\theta(k)\, e^{\frac{i}{\sqrt A}\sum_k\left(e^{ikr_I}-e^{ikr_J}\right)\theta(k) - \frac{\beta J}{2}\sum_k k^2\theta(k)\theta(-k)}$$

!

$$= \frac{1}{Z}\int D\theta(k)\, e^{-\frac{\beta J}{2}\sum_k k^2\left[\theta(k)-\frac{i}{\beta J k^2}f(k)\right]\left[\theta(-k)-\frac{i}{\beta J k^2}f(-k)\right]}\, e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_k\frac{1}{k^2}f(k)f(-k)}$$

כאשר $f(k) = \frac{1}{\sqrt A}\left(e^{-ikr_I}-e^{-ikr_J}\right)$

$$= e^{-\sum_k \frac{1}{2\beta J A}\frac{\left(2-2\cos\vec{k}\cdot\vec{r}_{IJ}\right)}{k^2}}$$

: $\vec{r}_{IJ} = \vec{r}_I - \vec{r}_J$

$$= e^{-\frac{1}{\beta J}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1-\cos\vec{k}\cdot\vec{r}_{IJ}}{k^2}}$$

$$\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1-\cos\vec{k}\vec{r}}{k^2} = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{a}}\frac{dk}{2\pi}\frac{1-e^{ikr\cos\varphi}}{k} = \int_0^{\frac{2\pi}{a}}\frac{dk}{2\pi}\frac{1-J_0(kr)}{k}$$

$$\sim \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{a}\right) + const$$

עבור $r>>a$

[אותו מבוטא נוכל לקרב ע"י האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ak}\frac{1-J_0(kr)}{k} = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{2a}\right)$]

ולכן עבור $r_{IJ}>>a$ נקבל

$$\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle \simeq \left(\frac{a}{r_{IJ}}\right)^{\eta(T)}$$

כאשר המעריך נתון ע"י

$$\eta(T) = \frac{1}{2\pi\beta J} = \frac{k_B T}{2\pi J}$$

התשובה שקיבלנו מעידה על כך ש

א. עבור כל $T>0$ אין סדר ארוך טווח מכיון ש $\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle \xrightarrow{r_{IJ}\to\infty} 0$. הפלקטואציות בפאזה (ה Goldstone mode של התורה) הורסות סדר זה בהתאם לתוצאה הכללית הנובעת ממשפט Mermin-Wagner.

ב. נראה כי המערכת קריטית בכל טמפרטורה עם דעיכה אלגברית של קורלציות הפאזה בעלת מעריך התלוי בטמפרטורה.

ברור כי המסקנה השניה חייבת להיות שגויה. בטמפרטורות גבוהות $J<<T$ הקורלציות האלגבריות צריכות להיהרס ע"י הפלוקטואציות החזקות ונצפה לקבל דעיכה אקספוננציאלית של קורלציות הפאזה. שבהן אכן המצב נוכל לקבל מתוך בחינת פונקצית הקורלציה המחושבת במסגרת מודל XY המקורי בטמפרטורות גבוהות:

$$\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle = \frac{1}{Z}\int_0^{2\pi}\prod_i d\theta_i\, e^{i(\theta_I-\theta_J)}\, e^{-\beta J\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)}$$

$$= \frac{1}{Z}\int_0^{2\pi}\prod_i d\theta_i\, e^{i(\theta_I-\theta_J)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\left(\frac{\beta J}{2}\right)^n}{n!}\left[\sum_{\langle ij\rangle}\left(e^{i(\theta_i-\theta_j)}+e^{-i(\theta_i-\theta_j)}\right)\right]^n$$

כשהנחנו $\beta J\ll 1$ (טמפרטורה גבוהה) ופיתחנו את אקספוננט הבולצמן. אם נסמן את $e^{i(\theta_i-\theta_j)}$ כחץ מ $\vec{r}_i$ ל $\vec{r}_j$ נקבל תוך שימוש בכך ש $\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{in\theta} = 2\pi\delta_{n,0}$ שרק דיאגרמות המרכבות ממסלול סגור תורמות ל Z. באופן דומה נקבל שתרומה מאיבר $e^{i(\theta_I-\theta_J)}$ במונה תורמות לו רק דיאגרמות בהן מסלול סגור מ r_I ל r_J (בנוסף ללולאות סגורות). התרומה הדומיננטית למונה באה מהמסלול הקצר ביותר מ r_I ל r_J (מכיון שכל קטע תורם כגורם $\frac{\beta J}{2}$), המונה בסדר $\frac{|r_I-r_J|}{a}=n'$ בפיתוח הנ"ל. מכיון שבדיאגרמות הסגורים המרובעים בסדר זה מיוצגת [illegible] דיאגרמות מסוג זה נקבל כי

$$\langle e^{i\theta_I}e^{-i\theta_J}\rangle \sim \left(\frac{\beta J}{2}\right)^{\frac{r_{IJ}}{a}} = e^{-\frac{r_{IJ}}{\xi}}$$

כאשר אורך הקורלציה נתון ע"י

$$\xi(T) = \frac{a}{\ln\left(\frac{2}{\beta J}\right)} \qquad (T\gg J)$$

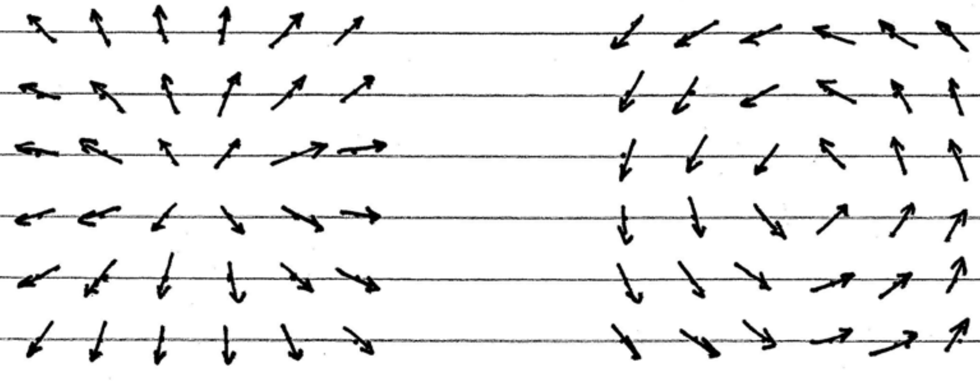
קטן לכן עם עליית הטמפרטורה.

מה מקור המעבר? מודל XY המקורי הוא בעל סימטריה שאינה קיימת בקירוב הגאוסי שערכנו לתאור המערכת בטמפרטורות נמוכות. בנוסף להיות אינווריאנטי תחת טרנספורמציות גלובליות רציפות $\theta_i\to\theta_i+\theta_0$ (גם המודל הגאוסי סימטרי תחת טרנספורמציה כזו) הוא אינווריאנטי גם תחת טרנספורמציות דיסקרטיות לוקליות $\theta_i\to\theta_i\pm 2\pi$

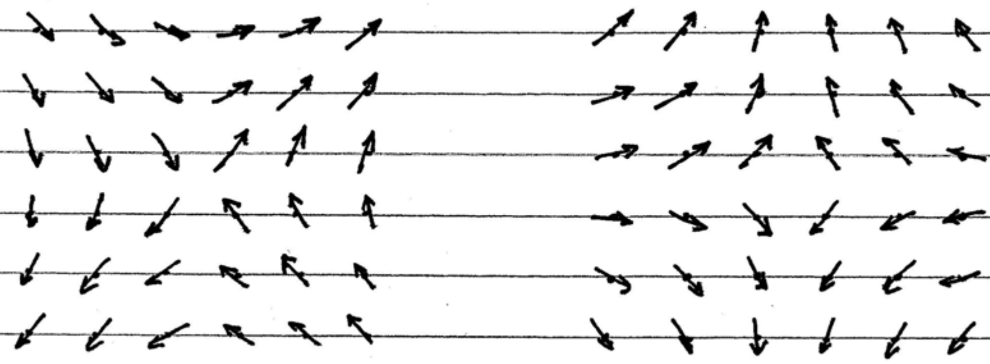
זו תכונה מרכזית מכיון שהיא מאפשרת קיומם של vortices. vortex הינו קונפיגורציה לא טריויאלית מהווה טופולוגית (topological defect) בה הפאזה משתנה ב $\pm 2\pi$ לאורך מסלול המקיף את מרכז ה defect:

$$\oint d\vec{l}\cdot\vec{\nabla}\theta = 2\pi m \qquad m=\pm 1$$

באופן עקרוני גם vortices עם winding number $|m|>1$ קיימים גם כן אך הם אנרגטיים יותר ולא נעסוק בהן.



$m=+1$



$m=-1$

בנוכחות vortex לסובב אי רציפות של 2π לאורך קו העוטף ממרכז ה vortex. בגלל המודל הגאוסי הנחנו רציפות של הפאזה. במודל פורמלי "יותר" - הכרחי להגדיר בנוסף ש θ הינו משתנה קומפקטי הרי על מעגל היחידה. המודל הגאוסי מניח בצורה מובלעת כי θ לא קומפקטי אלא על הישר הממשי.

מהי האנרגיה המתוספת בהוספת vortex לתוך המערכת? בגבול הרציף הקונפיגורציה של vortex עם $m=1$ שמרכזו בראשית נתונה ע"י

$$\theta(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \theta_0$$

כאשר $\varphi = \arctan\frac{y}{x}$ היא הזווית האזימוטלית ב $\vec{r}$ ו θ_0 קבוע. עבור קונפיגורציה זו

$$\vec{\nabla}\theta = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{r}$$

$$E = \int d^2r \, \frac{\rho_s}{2}(\vec{\nabla}\theta)^2 \simeq \int_a^L dr \cdot 2\pi r \, \frac{\rho_s}{2} \, \frac{1}{r^2} + E_c = \pi\rho_s \ln\left(\frac{L}{a}\right) + E_c$$ עם אנרגיה

הגודל המינימלי של האינטגרציה נקבע על ידי גודל ליבת ה vortex שהינו מסדר גודל a במודל על הסריג. E_c הוא אנרגית הליבה (core energy) הנובעת מצורת ה vortex ליד הליבה שם הקירוב הגאוסי להמילטוניאן XY נשבר. במודל XY בו פרמטר אחד לבדו: ρ_s E_c אינו פרמטר בלתי תלוי והוא מסדר גודל של ρ_s. לעומת זאת אם נתבונן בגזירת מודל XY מאנרגיה חופשית של GL גודל הליבה בקונפיגורצית ה vortex נקבע על ידי אורך הקוהרנטיות ξ ולא על ידי $\rho_s \sim \frac{1}{\lambda^2}$.

אנו רואים כי אנרגית ה vortex מתבדרת לוגריתמית עם גודל המערכת L. האם אין משמעות הדבר שבגבול התרמודינמי קיימת לכן הצדקה להגעת קונפיגורציות כאלה? התשובה לכך שלילית מאחר ויש חישוב האנטרופיה של המערכת. מספר הקונפיגורציות הבלתי תלויות המכילות vortex הינו מסדר $\left(\frac{L}{a}\right)^2$ - מספר הנקודות בהן ניתן למקם את מרכז ה vortex ולכן האנטרופיה הקשורה לקונפיגורציות כאלה הינה

$$S = k_B \ln\left(\frac{L}{a}\right)^2$$

האנרגיה החופשית המושרת בהוספת vortex בודד למערכת הינה לכן

$$F = \pi\rho_s \ln\left(\frac{L}{a}\right) + E_c - 2k_BT \ln\left(\frac{L}{a}\right)$$

בגבול התרמודינמי אנרגיה חופשית זו הופכת מחיובית לשלילית כאשר T חוצה את הטמפרטורה הקריטית למעבר Kosterlitz-Thouless:

$$T_{KT} = \frac{\pi}{2}\rho_s$$

בטמפרטורה זו vortices מתרבים וגורמים לקורלציות הפאזה לדעוך אקספוננציאלית: $e^{-\frac{r}{\xi(T)}}$ כפי שנראה ליד המעבר

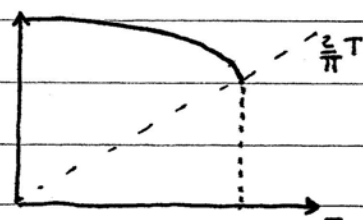
$$\xi(T) \sim e^{\frac{b}{\sqrt{T-T_{KT}}}}$$

מתחת ל T_{KT} vortices קיימים רק בזוגות קשורים של בני זוג עם vorticity הפוכה - כפי שנראה מיד הם קשורים בעזרת פוטנציאל לוגריתמי המגביל קיומם. המצאותם של זוגות אלה מתחת ל T_{KT} מובילה, כפי שנראה, לרנורמליזציה של ה bare phase stiffness

כאשר זו נמדדת על פני פלקטואציות באורך גל ארוכים. יחד עם זאת אם נבין את $\rho_s(T)$ כקבוע מנורמל זו אכן הקשר שמצאנו מתוך נתוני המצב של vortex בודד ממשיך להתקיים באופן ש

$$T_{KT} = \frac{\pi}{2}\rho_s(T_{KT})$$

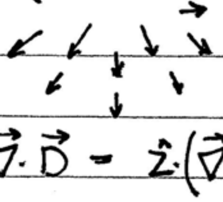
מעל T_{KT} קיימת צפיפות סופית של vortices שאינם קשורים בזוגות והללו גורמים ל ρ_s לקפוץ באופן לא רציף ל 0. זוהי אחת מהתכונות המיוחדות של מעבר זה שהינו מעבר פאזה רציף (באופן שהאנרגיה החופשית רציפה ולמעשה החלק רק essential singularity ב T_{KT}) למרות ש ρ_s משתנה באופן לא רציף, עם קפיצה של $\frac{2}{\pi}T_{KT}$ ב T_{KT}.



T_{KT} הוא לכן נקודה בה קורלציות הפאזה דועכות מדעיכה אקספוננציאלית עבור $T>T_{KT}$ לדעיכה אלגברית עם מעריך שנתון ב T_{KT} ע"י $\eta(T_{KT}) = \frac{T_{KT}}{2\pi\rho_s} = \frac{1}{4}$.

בהמשך נקבל את כל התוצאות הנ"ל מתוך טיפול בעזרת Renormalization Group קרוב. ניתן לקבל הבנה לאנלוגיה שהזכרנו תוך שימוש בהצגה אלקטרוסטטית שקולה של הבעיה. בהצגה זו ה vortex singularities בשדה הפאזה מוצגים ע"י מטענים נקודתיים המקיימים אלקטרוסטטיקה דו-מימדית. לצורך כך נגדיר את שדה ההעתקה

$$\vec{D} = \vec{\nabla}\theta \times \hat{z}$$



קל לראות שעבור קונפיגורציית vortex $m=1$ הוא מתנהג ודועך כמו $\frac{1}{r}$ ממרכז ה vortex: $\vec{D} = \frac{\hat{r}}{r}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \hat{z}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\theta) = 2\pi m\,\delta(r)$$

כך שאין לנו בעיה שימוש במשפט Stokes.

אם נגדיר את "הקבוע הדיאלקטרי"

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi\rho_s}$$

ונגדיר את השדה החשמלי

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

נקבל כי האנרגיה הקשורה ל vortex במודל XY נאות לרשום בצורת האנרגיה האלקטרוסטטית

$$U = \frac{1}{4\pi}\int d^2r\, \vec{E}\cdot\vec{D}$$

הפוטנציאל האלקטרוסטטי הנוצר על ידי מטען נקודתי m מתקבל מחוק אינטגרציה של השדה הנוצר על ידו $\vec{E} = \frac{m}{\epsilon r}\hat{r}$ ועד כדי קבוע הינו

$$V(r) = -\frac{m}{\epsilon}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

האנרגיה הסטטיסטית של אוסף של vortices היא לכן זו של פלסמה דו מימדית רק אנרגיה פוטנציאלית

$$U = -\frac{1}{\epsilon}\sum_{i<j} m_i m_j \ln\left|\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_j}{a}\right|$$

אנו רואים כי כל עוד $\epsilon<\infty$ (כלומר $\rho_s>0$) עם מטענים הפוכים הקשורים לזוגות ונדרשת אנרגיה אינסופית כדי לפרק זוג כזה למרכיביו. פאזה זו ב $T<T_{KT}$ של "דיפולים" היא הפאזה הבלתי-מוליכה. מעל T_{KT} $\rho_s=0 \Rightarrow \epsilon=\infty$ הזוגות הקשורים מתפרקים לאוסף מטענים (vortices) חופשיים. זוהי הפאזה הנורמלית.

נתבונן בפאזה הנורמלית בה vortices חופשיים ונבדוק כיצד הם משפיעים מבחינת קבוע הזרם דרך הדוגמה. ראינו כי צפיפות הזרם נתונה לביטוי דרך גרדיאנט הפאזה באופן הבא:

$$\vec{J}_s = \frac{2e}{\hbar}\rho_s\vec{\nabla}\theta$$

במונחי המטענים המרכיבים את הפלסמה הדו מימדית גרדיאנט פאזה שונה יוצר עבורם שדה חשמלי:

$$\vec{E} = \frac{\hbar}{2e}\frac{1}{\epsilon\rho_s}\vec{J}_s\times\hat{z} = \frac{h}{2e}\vec{J}_s\times\hat{z}$$

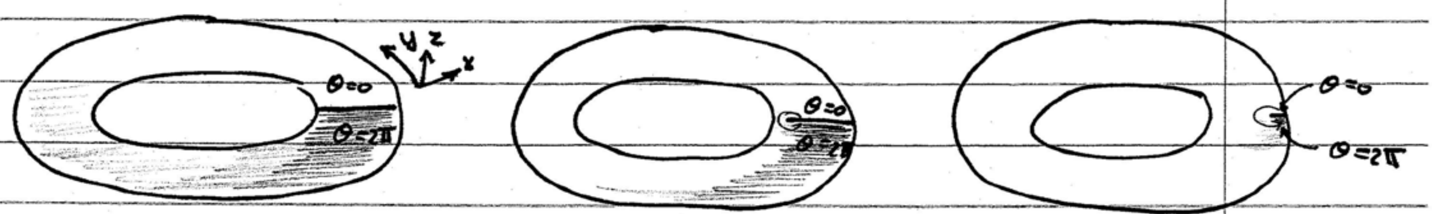
$$\vec{F} = m\frac{h}{2e}\vec{J}_s\times\hat{z}$$

המפעיל על מטען m כח

הכוח ניצב לכיוון הזרם ונקרא Magnus force

(במונחי האנלוג האלקטרוסטטי זהו ה Lorentz force)

ה vortices ינועו תחת פעולת כח זה. על ה vortices פועל כמות "חיכוך" הגורמת לכך שהם ישתפו במהירות קבועה $\vec{v} = \mu \vec{F}$
כאשר ה mobility: μ תלויה בפרטים מיקרוסקופיים ובהתנהגות המצב הנורמלי.
תנועה זו של vortices בניצב לכיוון הזרם בעצם היא הגורמת להתנגדות של הזרם כפי שנראה כעת. נתבונן בטבעת על-מוליכה הנושאת זרם. כתוצאה מכך הפאזה של פרמטר הסדר משתנה לאורך הטבעת. מכיון ש $\psi=|\psi|e^{i\theta}$ חייב להיות פונקציה חד-ערכית של המקום θ צריכה להשתנות בכפולות של 2π מסביב לטבעת. למצב נושא הזרם עם $\Delta\varphi = 2\pi n$ אנרגיה חופשית הפרופורציונית ל n^2 (מהאיבר הקינטי $|\vec{\nabla}\psi|^2$). כדי להגיע למצב היסוד באנרגיה (ללא הזרם) $n=0$ המערכת צריכה לעבור במצבי ביניים עם אנרגיה חופשית הגדולה ב ΔF מזו של המצב ההתחלתי. מכיון ש $\psi(\vec{r})$ היא פונקצית הגל של מספר מקרוסקופי של זוגות Cooper מחסום האנרגיה החופשית ΔF יכול להיות גדול מאד ביחס לאנרגיה התרמית k_BT וכתוצאה מכך הסתברות הדעיכה של המצב ההתחלתי תהיה אקספוננציאלית קטנה מאד. הדרך האפשרית ביותר לשינוי ה winding number n: לעבור ע"י המערכת את ΔF הקטן ביותר תלויה בגאומטריה. בשני ממדים היא עוברת דרך יצירת vortices הנעים משפה אחת של הטבעת לשניה.



הטבעת המקורית עם זרם בכיוון y

יצירת vortex $m=1$ על השפה הפנימית

כח Magnus פועל על ה vortex בכיוון X ודוחף אותו לשפה החיצונית

אנו רואים כי העברת vortex $m=1$ מהשפה הפנימית לחיצונית (בכיוון X) או antivortex $m=-1$ מהשפה החיצונית לפנימית (בכיוון $-X$) מפחיתה ב 2π את גרדיאנט הפאזה לאורך ציר y. אם W הוא רוחב הטבעת נדרש ל vortex זמן $\frac{W}{v}$ כדי לחצות אותה. קצב שינוי הפאזה כתוצאה ממעבר של vortex בודד הוא לכן $2\pi \frac{v}{W}$. אם צפיפות ה vortices בטבעת היא n_v נקבל ש

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\pi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{אורך הטבעת}}}{L} W n_v \cdot \frac{v}{W} = 2\pi L n_v \mu \frac{h}{2e} J_s$$

מיחס Josephson $\hbar \frac{d\theta}{dt} = 2eV$

נקבל כי מפל המתח לאורך הדגם הינו $V = L\left(\frac{h}{2e}\right)^2 n_v \mu \cdot J_s$

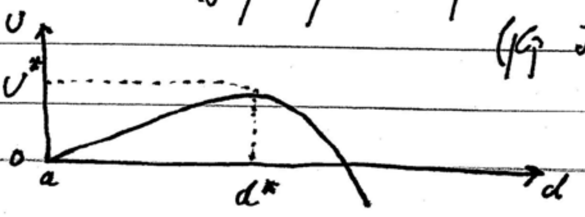
כך שההתנגדות הסגולית resistivity של המערכת הינה $\rho = \left(\frac{h}{2e}\right)^2 n_v \mu$

מכאן לכך כי ההתנגדות החשמלית של המערכת בכיוון מסוים נקבעת על ידי "המוליכות" - האופן בו נעים ה vortices בכיוון הניצב ומתכונתית לצפיפות ה vortices.
כפי שראינו מעל T_{KT} קורלציית הפאזה דועכת אקספוננציאלית כ $e^{-r/\xi}$ כתוצאה מהמצאותם של vortices חופשיים. ξ הינו לכן גם סקלת האורך האופיינית למרחק בין vortices כלומר נצפה ל $n_v \sim \frac{1}{\xi^2}$. אם נשתמש בהתנהגות ξ ליד T_{KT} נקבל כי בתחום זה התנגדות המערכת מתנהגת כפונקציה של הטמפרטורה באופן
$R \sim e^{-\frac{2b}{\sqrt{T-T_{KT}}}}$

מתחת ל T_{KT} vortices מופיעים כזוגות קשורים של vortex-antivortex. כוח Magnus הפועל על כל אחד מבני הזוג בנוכחות זרם פועל בכיוון הפוך ונוטה "למתוח" את הזוג - לגרום לו פולריזציה. פולריזציה זו אחראית לרנורמליזציה של ρ_s אך במובן האנלוגי האלקטרוסטטי הזרם פועל כשדה חשמלי היוצר פולריזציה של הדיפולים וגורם לרנורמליזציה של הקבוע הדיאלקטרי של החומר: ϵ. כמו כן, עקב העובדה שהפוטנציאל המשיכה בין בני הזוג גדל רק לוגריתמית זרם גדול יגרום ליוניזציה של הזוג. כדי לראות זאת נתבונן באנרגיה של זוג קשור עם מרחק d בין בני הזוג בנוכחות צפיפות זרם J_s:

$$U = 2\pi\rho_s \ln\left(\frac{d}{a}\right) - \frac{h}{2e} J_s d$$

האיבר השני מבטא את השדה "החשמלי" הקבוע הפועל על הדיפול בנוכחות הזרם (זכרו כי $E^* = \frac{h}{2e} J_s^y$
כך ש $-\frac{h}{2e} m J_s^y x$ הינו הפוטנציאל המתאר שדה זה במקרה של זרם בכיוון y)
כפונקציה של d אנרגיה זו הינה מתוארת: (עבור J_s קטן)



אם $J_s < J_0$ כאשר $J_0 = \frac{2e\rho_s}{\hbar a}$

U גדל תחילה ליניארית, מגיע למקסימום ב-U^* עבור $d=d^*$, ואז קטן אל עבר $U=-\infty$. אנו רואים לכן כי בנוכחות זרם הזוגות חי בתוך בור פוטנציאל סופי. אם הוא מצליח לעבור מעל למחסום הפוטנציאל U^* הוא מתפרק לשני vortices בלתי קשורים $(d\to\infty)$. נמצא את d^* מתוך תנאי האקסטרמום

$$\left.\frac{dU}{d(d)}\right|_{d=d^*}=0 \Rightarrow \frac{2\pi\rho_s}{d^*}-\frac{h}{2e}J_s=0 \Rightarrow d^*=\frac{J_0}{J_s}a$$

$$\Leftarrow \quad U^*=2\pi\rho_s \ln\left(\frac{J_0}{J_s}\right)-\frac{h}{2e}J_0 a = 2\pi\rho_s\left[\ln\left(\frac{J_0}{J_s}\right)-1\right] \overset{\text{עבור } J_s\ll J_0}{\simeq} 2\pi\rho_s \ln\left(\frac{J_0}{J_s}\right)$$

קצב היוניזציה של הזוגות פרופורציוני להסתברות הבולצמנית לעבור מעל למחסום:

$$R_{ionization}\sim e^{-\beta U^*}$$

vortices חופשיים יכולים לחזור ולהתאחד לזוגות בקצב

$$Recombination \sim n_+ n_- \propto n_v^2$$

במצב שיווי משקל שני קצבים אלה משתווים ונקבל כי צפיפות ה-vortices החופשיים נתונה על ידי

$$n_v \propto \sqrt{R_{ionization}} \propto e^{-\beta\frac{U^*}{2}} \propto \left(\frac{J_s}{J_0}\right)^{\frac{1}{2\eta(T)}}$$

כאשר, כזכור, $\eta(T)=\frac{1}{2\pi\beta\rho_s}=\frac{k_BT}{2\pi\rho_s}$. כפי שראינו $V\propto n_v J_s$ ולכן נקבל מיד את התלות הלא-ליניארית הבאה לאופיין המתח-זרם: $V\sim J_s^{\,a}$ (שימו לב כי במודל זה הזרם הקריטי בגבול-מאקרו דו-מימדי הינו 0)

כאשר המעריך נתון על ידי

$$a=1+\frac{\pi\rho_s}{T}=1+2\frac{T_{KT}}{T}$$

עבור $T>T_{KT}$ המערכת נמצאת במצב נורמלי כך אנו מצפים להתנהגות אוהמית $J\sim V$. לכן נצפה לקפיצה אוניברסלית של המעריך באופיין המתח-זרם ב-$T=T_{KT}$ מ-$a=3$ עבור $T<T_{KT}$ ל-$a=1$ עבור $T>T_{KT}$.

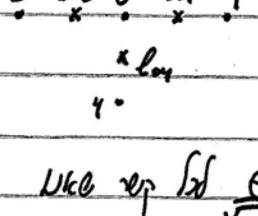
נרצה להראות כעת כיצד נובעות תוצאות אלה מתוך טיפול בעזרת חבורת הרנורמליזציה.
לצורך מטרה זו נראה קודם שנוכל את השקילות בין מודל XY קלאסי דו-מימדי
בטמפרטורה T למודל Sine-Gordon קוונטי בממד אחד ו $T=0$.

בפונקציית החלוקה של מודל XY דו מימדי
$$Z=\int_0^{2\pi}\prod_i d\theta_i\, e^{\beta J\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)}$$
התרומה מצלע $\langle ij\rangle$ היא מחזורית 2π ב $\theta_i-\theta_j$
סביב $\theta_i-\theta_j=2\pi m+\varepsilon$ $(\varepsilon\ll\pi)$ הצורה להיות גאוסית $e^{\beta J}e^{-\frac{\beta J}{2}\varepsilon^2}$
מכוון לכך במודל הזה (ה Villain Model) בו נחליף את המשקל הבולצמני
המקורי במודל XY ב

$$e^{\beta J\cos(\theta_i-\theta_j)}\rightarrow\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\beta J}e^{-\frac{\beta J}{2}(\theta_i-\theta_j-2\pi m)^2}$$

לו אותן תכונות כמו למשקל המקורי. המודל החדש קל יותר לטיפול מהמקורי ושקול
לו כך שהגבולות שונות, מראים התנהגות הקריטית מאותו הסוג. הסיבה לכך
היא שיש לו מינימום ב-$2\pi m$ — הנקודות שמסביבן המערכת נמצאת רב הזמן (גם כאשר
נוצרים vortices) התנהגות שני המודלים שווה.

נוכל להשתמש בנוסחת Poisson
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}d\phi\, h(\phi)e^{2\pi i l\phi}$$
לרשום
$$e^{\beta J\cos(\theta_i-\theta_j)}\rightarrow\sum_{l_{ij}}\int_{-\infty}^{\infty}d\phi\, e^{\beta J}e^{-\frac{\beta J}{2}(\theta_i-\theta_j-2\pi\phi)^2+2\pi i l_{ij}\phi}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta J}}\sum_{l_{ij}=-\infty}^{\infty}e^{\beta J}e^{i l_{ij}(\theta_i-\theta_j)}e^{-\frac{l_{ij}^2}{2\beta J}}$$



כאשר l_{ij} מוגדר על הקשר $\langle ij\rangle$ כלומר על הסריג הדואלי:

פונקציית החלוקה של ה Villain model היא לכן עד כדי הקבוע $\frac{e^{\beta J}}{\sqrt{2\pi\beta J}}$ לכל קשר שאינו
משמעותי ל
$$Z=\int_0^{2\pi}\prod_i d\theta_i\sum_{\{l_{ij}\}}e^{-\sum_{\langle ij\rangle}\frac{l_{ij}^2}{2\beta J}-i l_{ij}(\theta_i-\theta_j)}$$

נפרש את ℓ כשדה וקטורי $\ell_\mu(r)$ $(\mu=x,y)$ המצוין מנקודת ההתחלה ב $\vec{r}$ לאורך כיוון הקשר בכיוון μ. המשקל בפונקצית החלוקה הינו אז

$$e^{-\sum_{r,\mu}\left\{\frac{\ell_\mu^2(r)}{2\beta J}-i\ell_\mu(r)\left[\theta(r)-\theta(r+\mu)\right]\right\}}=e^{-\sum_{r,\mu}\left\{\frac{\ell_\mu^2(r)}{2\beta J}-i\left[\ell_\mu(r)-\ell_\mu(r-\mu)\right]\theta(r)\right\}}$$

נוכל כעת לבצע את האינטגרציה על $\theta(r)$ ולקבל (תוך הצבת הגבול 2π לכל אינטגרציה)

$$Z=\sum_{\{\ell_\mu(r)\}}e^{-\sum_{r,\mu}\frac{\ell_\mu^2(r)}{2\beta J}}\prod_r\delta_{\sum_\mu\left[\ell_\mu(r)-\ell_\mu(r-\mu)\right],0}$$

האילוץ שקיבלנו על השדה $\ell_\mu(r)$ הינו הגרסה הבדידה לתנאי $\vec{\nabla}\cdot\vec{\ell}=0$. שימו לב כי (כפי שנראה מיד) אילוץ זה דומה לשמירה על מספר דרגות החופש: התחלנו עם N דרגות חופש θ. בגלל שכל הסריג הבדידי אליו מוגדר $\ell_\mu(r)$ $2N$ נקודות. N האילוצים (אחד לכל נקודת סריג מקודת r) על $\ell_\mu(r)$ מחזירים אותנו למספר דרגות החופש המקורי.

באנלוגיה למקרה הרציף בו אם $\vec{\nabla}\cdot\vec{\ell}=0$ אזי קיים שדה $\vec{n}(r)$ המקיים $\vec{\ell}(r)=\vec{\nabla}\times\vec{n}(r)$ נבטא את $\ell_\mu(r)$ בצורה דומה. מכיון שאנו בשני מימדים אנו זקוקים רק ל $n_z(r)\equiv n(r)$ ובאנלוגיה ל $\ell_x(r)=\partial_y n(r)$; $\ell_y(r)=-\partial_x n(r)$ נגדיר את $\ell_\mu(r)$ בעזרת

$$\ell_x(r)=n(r)-n(r-y)\quad,\quad \ell_y(r)=-n(r)+n(r-x)$$

קל לבדוק שהגדרה זו מקיימת את האילוץ $\ell_x(r)-\ell_x(r-x)+\ell_y(r)-\ell_y(r-y)=0$

קיבלנו לכן ש

$$Z=\sum_{\{n(r)\}}e^{-\sum_{r,\mu}\frac{1}{2\beta J}\left[n(r)-n(r-\mu)\right]^2}$$

אם נפרש את השדה הבדיד $n(r)$ כגובהו של משטח בנקודה r באיחידות של גודל אטום, מודל זה מתאר מצב שבו האנרגיה של המשטח עולה ככל שהפרש הגבהים בין נקודות שכנות גדל. המודל מתאר roughening trans (מעבר חספוס) של המשטח. שימו לב כי β מופיע במכנה כך שגבול הטמפ' הגבוהות של ה XY מודל מתאים לגבול הטמפרטורות הנמוכות של

מודל זה לעצמו (duality).

נוכל להשתמש בנוסחת Poisson כדי לכתוב את פונקצית החלוקה הזו בצורה הבאה:

$$Z=\prod_r\int_{-\infty}^{\infty}d\phi(r)\sum_{m(r)=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu\phi(r)\right)^2+2\pi i\sum_r m(r)\phi(r)}$$

כאשר $\nabla_\mu\phi(r)=\phi(r)-\phi(r-\mu)$.

האינטגרל על $\phi(r)$ הינו גאוסי וניתן לכן לחישוב מדויק עם התוצאה

$$Z=Z'_{SW}\sum_{m(r)=-\infty}^{\infty}e^{-2\pi^2\beta J\sum_{r,r'}m(r)G(r-r')m(r')}$$

כאשר $Z'_{SW}=\prod_r\int d\phi(r)\,e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{\mu,r}\left[\nabla_\mu\phi(r)\right]^2}$ הינה פונקצית החלוקה של המודל הגאוסי הדואלי למודל המקורי: $\beta J\to\frac{1}{\beta J}$!

$$G(r-r')=\frac{1}{N}\sum_{\substack{k\neq0\\ 1^{st}\,BZ}}\frac{e^{ik(r-r')}}{4-2\cos k_xa-2\cos k_ya}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{a}}^{-\frac{2\pi}{L}}+\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\frac{\pi}{a}}\frac{dk_x}{2\pi/a}\,\frac{dk_y}{2\pi/a}\,\frac{e^{ik(r-r')}}{4-2\cos k_xa-2\cos k_ya}$$

$$=\int_{-\pi}^{-\frac{2\pi a}{L}}+\int_{\frac{2\pi a}{L}}^{\pi}\frac{dk_x}{2\pi}\,\frac{dk_y}{2\pi}\,\frac{e^{ik\frac{(r-r')}{a}}}{4-2\cos k_x-2\cos k_y}$$

כש $k=0$ לא נכלל בסכום מכיון שעבורו $\nabla_\mu\phi=0$ והאינטגרל על ϕ נותן אז $\sum_r m(r)=0$ - תנאי שאותו נקבל בגבול התרמודינמי, כי שנית, גם מתוך הסכום המופיע באקספוננט ב Z.

נוכל לחשב את התוצאה ל $G(r)$ (לא עבור $r\ll L$) באופן הבא עבור $|r-r'|\geq a$

$$\simeq G(0)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{|r-r'|}{a}\right)-\frac{1}{4}$$

כאשר $G(0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{L}{a}\right)-0.22$ מתבדר לוגריתמית בגבול התרמודינמי $L\to\infty$.

$$Z = Z'_{sw} \sum_{m(r)=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi^2 \beta J G(0) \left[\sum_r m(r)\right]^2} e^{-2\pi^2 \beta J \sum_{r \neq r'} m(r) \left[-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|r-r'|}{a} - \frac{1}{4}\right] m(r')}$$

אנו רואים כי בגבול התרמודינמי, כתוצאה מהתבדרות $G(0)$, אנו מקבלים את התנאי $\sum_r m(r)=0$
קיבלנו ביטוי לפונקצית החלוקה במונחי המשתנה $m(r)$ הממלאים את תפקיד ה winding numbers
של ה vortices במודל המקורי. התנאי $\sum m=0$ היא הדרישה לנטרליות גלובלית של הפלסמה
באנלוגיה האלקטרוסטטית. נוכל לרשום לכן לבסוף

$$Z = Z'_{sw} \sum_{\substack{m(r)=-\infty \\ \sum m=0}}^{\infty} e^{\frac{\pi^2}{2}\beta J \sum_r m(r)\left[\sum_{r'} m(r') - m(r)\right] + \pi \beta J \sum_{r \neq r'} m(r) \ln \frac{|r-r'|}{a} m(r')}$$

$$= Z'_{sw} \sum_{\substack{m(r)=-\infty \\ \sum m=0}}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{2}\beta J \sum_r m^2(r) + \pi \beta J \sum_{r \neq r'} m(r) \ln \frac{|r-r'|}{a} m(r')}$$

כשהשתמשנו בתנאי $\sum_r m(r)=0$
אנו רואים כי $\frac{\pi^2}{2}J$ ממלא במודל הנ"ל את תפקיד אנרגית הליבה E_c (core energy)
של ה vortex. נניח כעת כי $E_c \beta \gg 1$ כך שנוכל להגביל את הערכים של $m(r)$ ל
$m(r)=0, \pm 1$. במצב כזה קונפיגורציה השומרת על תנאי הנטרליות והמורכבת מ $M \geq 0$ (זוגי)
vortices מכילה $\frac{M}{2}$ מיקום בנקודות r_i $i=1\cdots\frac{M}{2}$ עם $m_i=1$ ו $\frac{M}{2}$ מיקום בנקודות
r_i $i=\frac{M}{2}+1\cdots M$ עם $m_i=-1$ כאשר $r_i \neq r_j$ עבור $i \neq j = 1\cdots M$. נקבל לכן

$$Z = Z'_{sw} \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\{r_{i=1\cdots M}\}}' \left(\frac{1}{M/2!}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2}{2}\beta J M + \pi \beta J \sum_{i \neq j=1}^{M} m(r_i) \ln \frac{|r_i - r_j|}{a} m(r_j)}$$

הפרמוטציות של vortices עם אותו w.n
נותנות אותה קונפיגורציה

$$Z = \prod_r \int_{-\infty}^{\infty} d\phi(r)\, e^{-S}$$

$$S = \frac{1}{2\beta J} \sum_{r,\mu} \left(\nabla_\mu \phi(r)\right)^2 - 2e^{-\pi^2 \beta J} \sum_r \cos 2\pi\phi(r)$$

__טענה:__ פונקצית חלוקה זו זהה (בתנאי מסוים) לפונקצית החלוקה
של המודל שבו הפעולה נתונה ע"י

__הוכחה:__

$$Z = \prod_r \int d\phi(r)\, e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu \phi(r)\right)^2 + 2e^{-\pi^2\beta J}\sum_r \cos 2\pi\phi(r)}$$

$$= \prod_r \int d\phi(r) \sum_{M=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2\beta J M}}{M!}\left[\sum_r\left(e^{2\pi i\phi(r)} + e^{-2\pi i\phi(r)}\right)\right]^M e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu\phi(r)\right)^2}$$

$$= \prod_r \int d\phi(r) \sum_{M=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2\beta J M}}{M!} \sum_{m=0}^{M}\binom{M}{m} \sum_{\{r_i=1\cdots M\}}' e^{2\pi i\left[\sum_{i=1}^{m}\phi(r_i) - \sum_{i=m+1}^{M}\phi(r_i)\right]} e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu\phi(r)\right)^2}$$

כאן הוספנו את התנאי על הסכום (שלא קיים בהכרח בשלב של הביטוי המקורי) הדורש $r_i \neq r_j$ עבור $i \neq j = 1 \cdots M$

נלך כעת לבצע את האינטגרלים הגאוסיים על $\phi(r)$ תוך שימוש בכך שלכל פונקציה ליניארית $f(\phi)$

מתקיים $\langle e^f \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle f^2\rangle}$ כאשר

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z_{sw}'}\int \prod_r d\phi(r)\, f(\phi(r))\, e^{-\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu(\phi(r)\right)^2}$$

$$= Z_{sw}' \sum_{M=0}^{\infty}\frac{e^{-\pi^2\beta J M}}{M!}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{M}{m}\sum_{\{r_i=1\cdots M\}}' e^{-2\pi^2\left[\sum_{i,j=1}^{m}\langle\phi(r_i)\phi(r_j)\rangle + \sum_{i,j=m+1}^{M}\langle\phi(r_i)\phi(r_j)\rangle - 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{M}\langle\phi(r_i)\phi(r_j)\rangle\right]}$$

כאשר נבחר ש

$$\langle \phi^2(r_i) \rangle = \beta J G(0)$$

ועבור $r_i \neq r_j$

$$\langle \phi(r_i)\phi(r_j)\rangle = \beta J\left[G(0) - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|r_i - r_j|}{a} - \frac{1}{4}\right]$$

מקדם האקספוננט ב- Z מכיל את האיבר

$$-2\pi^2\beta J G(0)\left[m^2 + (M-m)^2 - 2m(M-m)\right]$$

$$= -2\pi^2\beta J G(0)\left(M - 2m\right)^2$$

ובגבול התרמודינמי בו $G(0)\to\infty$ נקבל לכן את התנאי $m = \frac{M}{2}$

$$= Z_{sw}' \sum_{M=0}^{\infty}\sum_{\{r_i=1\cdots M\}}' \left(\frac{1}{\frac{M}{2}!}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2}{2}\beta J M - \pi\beta J\left[\sum_{i\neq j=1}^{M/2}\ln\frac{|r_i-r_j|}{a} + \sum_{i\neq j=\frac{M}{2}+1}^{M}\ln\frac{|r_i-r_j|}{a} - 2\sum_{i=1}^{M/2}\sum_{j=\frac{M}{2}+1}^{M}\ln\frac{|r_i-r_j|}{a}\right]}$$

אם נגדיר $m(r_i)=1$ עבור $i=1\cdots\frac{M}{2}$ ו- $m(r_i)=-1$ עבור $i=\frac{M}{2}+1\cdots M$ נקבל את

התוצאה שקיבלנו עבור ה Villain model.

המודל השקול שקיבלנו נקרא ה Sine-Gordon model. ניתן להתייחס אליו כמודל קוונטי למערכת חד מימדית כשהמימד השני היה זמן מדומה. מכיוון שהמודל המקורי חי על המישור האינסופי כך גם ה Sine-Gordon ולכן ציר הזמן המדומה הוא אינסופי - כלומר המודל חי ב $T=0$. אם היינו מגדירים את ה XY-model על רצועה ברוחב סופי W רוחב הרצועה היה מגדיר את הטמפרטורה ההפוכה $\beta=W$ של ה sine-Gordon model.

שימו לב כי השדה ϕ שבאמצעותו מוגדר ה sine-Gordon model אינו השדה θ המגדיר את ה XY-model. השניים קשורים זה לזה בעזרת טרנספורמציה לא לינארית מורכבת. למרות שני המודלים דואליים זה לזה. מתוך המיפוי ומתוך ההתנהגות של ה XY-model אנו מצפים כי גם ה sine-Gordon model יראה מעבר פאזה. מכיוון שמקדם הלפלסיאן במודל זה היינו $\frac{1}{\beta\rho_s}$ במודל XY המקורי ומכיוון שמקדם איבר הקוסינוס פרופורציוני ל vortex fugacity $e^{-\beta E_c}$ נצפה שהפאזה בטמפרטורות נמוכות עם הקורלציות האלגבריות במודל XY תתקבל במודל S-G עבור המקרה בו מקדם הלפלסיאן סופי ואיבר הקוסינוס מתאפס (אין vortices חופשיים). הפאזה בטמפרטורות גבוהות של מודל XY תתאים באופן דומה למקרה בו מקדם הלפלסיאן גדל לאינסוף ($\rho_s \to 0$) ומקדם הקוסינוס סופי. נראה כיצד מתקבלת תמונה זו מתוך טיפול RG.

לבו של רעיון חבורת הרנורמליזציה הינו דילול דרגות חופש. נניח כי קיימת תורה לשדה ϕ המוגדר על ידי רכיבי הפורייה שלו $\phi(k)$ ו high-k cutoff Λ (מסדר גודל של $1/a$ במקרה של תורה המוגדרת (או תורה רציפה הנובעת מתורה המוגדרת) על סריג עם קבוע a). נניח כי אנו מעוניינים באינפורמציה על התנהגות תורה זו בערכי תנע הקטנים מאוד ביחס ל Λ (סקלות אורך ארוכות בהרבה מ a). במצב כזה נחפש תורה המערבת רק את דרגות החופש בהן אנו מעוניינים ושנותנת עבורן אותן תוצאות כמו התורה המקורית. נעשה זאת על ידי אינטגרציה בשלבים של דרגות החופש ליד ה cutoff: בין $\Lambda-d\Lambda$ ל Λ. אם נסמן ב $\phi_>$ את דרגות החופש בתחום זה וב $\phi_<$ את דרגות החופש $k<\Lambda-d\Lambda$ נקבל

$$\langle O(\phi_<)\rangle = \frac{\int D\phi_< D\phi_> \, O(\phi_<)\, e^{-S(\phi_<,\phi_>)}}{\int D\phi_< D\phi_> \, e^{-S(\phi_<,\phi_>)}} \equiv \frac{\int D\phi_< \, O(\phi_<)\, e^{-S_{eff}(\phi_<)}}{\int D\phi_< \, e^{-S_{eff}(\phi_<)}}$$

בתהליך בו אנו מבצעים "integration out" של דרגות החופש ליד cut-off הולך וקטן S_{eff} משתנה ובאופן כללי יופיעו בה כל האופרטורים האפשריים תחת האילוצים הנקבעים מסימטריית הבעיה (ראה דוגמא לכך). מקדמי הצימוד של חלק מאופרטורים אלה גדלים תחת תהליך ה-RG - אלו הם האופרטורים הרלוונטים. חלקם קטנים - אלה הם האופרטורים הלא רלוונטים, וחלקם ישארו קבועים - האופרטורים הגבוליים (marginal). רק ה relevant ו marginal operators מאפשר לקבל מושג לגבי אופי התנהגות המערכת בגבול של סקלות אורך גדולות. בסוף תהליך ה RG ניתן לקבל תשובה אם התורה האפקטיבית המתקבלת שונה מהתורה המקורית וניתנת לפתרון מדויק או לטיפול מקורב.

אנו משתמשים לרשום את המודל כך:
$$S=\frac{1}{2\beta J}\sum_{r,\mu}\left(\nabla_\mu\phi(r)\right)^2-2e^{-\pi^2\beta J}\sum_r\cos 2\pi\phi(r)$$

שבגבול הרציף הינו
$$\rightarrow\int d^2r\left[\frac{1}{2\beta J}(\vec\nabla\phi)^2-\frac{2e^{-\pi^2\beta J}}{a^2}\cos 2\pi\phi\right]$$
$$=\int d^2r\left[\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi^2\beta J}(\vec\nabla\phi)^2-\frac{2e^{-\pi^2\beta J}}{a^2}\cos\phi\right]$$

כאשר cutoff $\Lambda\sim\frac{1}{a}$.

נרשום לכן את
$$S_{SG}=\int d^2r\left[\frac{K}{2}(\vec\nabla\phi)^2-\frac{g}{a^2}\cos\phi\right]$$

כאשר ה "bare" couplings של המודל קשורים לאלה של ה XY model באופן הבא: $g=2e^{-\pi^2\beta J}$, $K=\frac{1}{4\pi^2\beta J}$.

נסמן:
$$\phi_<(\vec r)=\sum_{k<\frac{\Lambda}{s}}e^{i\vec k\cdot\vec r}\phi(\vec k)$$
$$\phi_>(\vec r)=\sum_{\frac{\Lambda}{s}<k<\Lambda}e^{i\vec k\cdot\vec r}\phi(\vec k)$$
$(s>1)$

מכיון שהחלק הריבועי בפעולה אלכסוני במומנטים k נקבל ש

$$S(\phi_<,\phi_>) = \int d^2r\left[\frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi_<)^2 + \frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi_>)^2 - g\Lambda^2\cos(\phi_< + \phi_>)\right]$$

$$\equiv S_0(\phi_<) + S_0(\phi_>) + S_I(\phi_<,\phi_>)$$

נבצע את האינטגרציה על $\phi_>$ פרטורבטיבית ב-g:

$$\int D\phi_> e^{-S} = e^{-S_0(\phi_<)}\int D\phi_> e^{-[S_0(\phi_>) + S_I(\phi_<,\phi_>)]}$$

$$= e^{-S_0(\phi_<)}\langle e^{-S_I(\phi_<,\phi_>)}\rangle_> Z_{0>}$$

כאשר

$$Z_{0>} = \int D\phi_> e^{-S_0(\phi_>)} \quad , \quad \langle O\rangle_> = \frac{1}{Z_{0>}}\int D\phi_> O e^{-S_0(\phi_>)}$$

$$\int D\phi_> e^{-S} = e^{-S_0(\phi_<)}\langle 1 - S_I + \frac{1}{2}S_I^2 - \cdots\rangle_> Z_{0>}$$

כה אקספוננציאלה תוך שימוש ב cumulant expansion נמצא

$$= e^{\ln Z_{0>}} e^{-\underbrace{[S_0(\phi_<) + \langle S_I\rangle_> - \frac{1}{2}(\langle S_I^2\rangle_> - \langle S_I\rangle_>^2) + \cdots]}_{S_{eff}(\phi_<)}}$$

לאב בקוקים δ

$$\langle\phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}')\rangle_> = \frac{1}{Z_{0>}}\int D\phi_>\, \phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}')\, e^{-S_0(\phi_>)}$$

$$= \frac{1}{Z_{0>}}\int D\phi(\tfrac{\Lambda}{s}<k<\Lambda)\sum_{\frac{\Lambda}{s}<k,k'<\Lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\vec{k}'\cdot\vec{r}')}\phi(\vec{k})\phi(\vec{k}')\, e^{-\frac{AK}{2}\sum_{\frac{\Lambda}{s}<k<\Lambda}k^2\phi(\vec{k})\phi(-\vec{k})}$$

$$= \sum_{\frac{\Lambda}{s}<k<\Lambda}\frac{1}{AK}\frac{1}{k^2}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$= \frac{1}{K}\int_{\frac{\Lambda}{s}}^{\Lambda}\frac{dk}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\, k\cdot\frac{1}{k^2}e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\pi K} \int_{\Lambda/s}^{\Lambda} dk \, \frac{1}{k} J_0(k|\vec{r}-\vec{r}\,'|)$$

$$\xrightarrow{|d\Lambda| \to 0} \frac{1}{2\pi K} \frac{d\Lambda}{\Lambda} J_0(\Lambda|\vec{r}-\vec{r}\,'|) \qquad : \frac{\Lambda}{s} = \Lambda - d\Lambda \quad (d\Lambda > 0)$$

$$\langle S_I \rangle_> = -g\Lambda^2 \int d^2r \left[\cos\phi_<(\vec{r}) \langle \cos\phi_>(\vec{r}) \rangle_> - \sin\phi_<(\vec{r}) \langle \sin\phi_>(\vec{r}) \rangle_> \right]$$

$$= -\frac{g}{2}\Lambda^2 \int d^2r \left[\cos\phi_<(\vec{r}) \langle e^{i\phi_>(\vec{r})} + e^{-i\phi_>(\vec{r})} \rangle_> + i \sin\phi_<(\vec{r}) \langle e^{i\phi_>(\vec{r})} - e^{-i\phi_>(\vec{r})} \rangle_> \right]$$

$$= -g\Lambda^2 \int d^2r \, e^{-\frac{1}{2}\langle \phi_>^2(\vec{r}) \rangle_>} \cos\phi_<(\vec{r})$$

$$= -g\Lambda^2 \left(1 - \frac{1}{4\pi K} \frac{d\Lambda}{\Lambda} \right) \int d^2r \cos\phi_<(\vec{r})$$

אנו רואים כי איבר זה ב Seff הוא בעל צורה זהה לאיבר הקוסינוס המקורי אך עם מקדם שונה.
נפנה כעת לחישוב

$$\langle S_I^2 \rangle = \frac{g^2\Lambda^4}{4} \int d^2r \, d^2r' \Big[e^{i[\phi_<(\vec{r}) + \phi_<(\vec{r}\,')]} \langle e^{i[\phi_>(\vec{r}) + \phi_>(\vec{r}\,')]} \rangle_> + e^{i[\phi_<(\vec{r}) - \phi_<(\vec{r}\,')]} \langle e^{i[\phi_>(\vec{r}) - \phi_>(\vec{r}\,')]} \rangle_>$$

$$+ e^{-i[\phi_<(\vec{r}) - \phi_<(\vec{r}\,')]} \langle e^{-i[\phi_>(\vec{r}) - \phi_>(\vec{r}\,')]} \rangle_> + e^{-i[\phi_<(\vec{r}) + \phi_<(\vec{r}\,')]} \langle e^{-i[\phi_>(\vec{r}) + \phi_>(\vec{r}\,')]} \rangle_> \Big]$$

$$= \frac{g^2\Lambda^4}{2} \int d^2r \, d^2r' \Big\{ e^{-\frac{1}{2}\langle \phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}\,') + \phi_>^2(\vec{r}) \rangle_>} \cos[\phi_<(\vec{r}) + \phi_<(\vec{r}\,')] + e^{\frac{1}{2}\langle \phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}\,') - \phi_>^2(\vec{r}) \rangle_>} \cos[\phi_<(\vec{r}) - \phi_<(\vec{r}\,')]$$

$$\Leftarrow \langle S_I^2 \rangle - \langle S_I \rangle^2 = \frac{g^2\Lambda^4}{2} \int d^2r \, d^2r' \Big\{ \left[e^{-\frac{1}{2}\langle \phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}\,') \rangle_>} - 1 \right] e^{-\frac{1}{2}\langle \phi_>^2(\vec{r}) \rangle_>} \cos[\phi_<(\vec{r}) + \phi_<(\vec{r}\,')]$$

$$+ \left[e^{\frac{1}{2}\langle \phi_>(\vec{r})\phi_>(\vec{r}\,') \rangle_>} - 1 \right] e^{-\frac{1}{2}\langle \phi_>^2(\vec{r}) \rangle_>} \cos[\phi_<(\vec{r}) - \phi_<(\vec{r}\,')] \Big\}$$

הפקטורים $$e^{\pm\frac{1}{2}\langle\phi_>(\vec r)\phi_>(\vec r')\rangle_>}-1 \simeq \pm\frac{1}{2}\langle\phi_>(\vec r)\phi_>(\vec r')\rangle_>$$

דועכים כ $\left[\Lambda|\vec r-\vec r'|\right]^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\Lambda|\vec r-\vec r'|\right)$ עבור $\Lambda|\vec r-\vec r'|\gg 1$. התרומה העיקרית לאינטגרל באה מהתחום $|\vec r-\vec r'|<\Lambda^{-1}$ (הדעיכה החלשה יחד עם התנודות שקיבלנו נובעות משימוש ב cutoff חד ב $k=\Lambda$. ניתן להגדיר סכמת cutoff רכה בה הפקטורים דועכים אקספוננציאלית עבור $|\vec r-\vec r'|>\Lambda^{-1}$)

נרחיב לכן את האינטגרנד בחזקות של $|\vec r-\vec r'|$. לצורך כך נעבור למשתנים

$$\vec u=\frac{\vec r+\vec r'}{2}\ ,\quad \vec v=\vec r-\vec r' \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial(\vec r,\vec r')}{\partial(\vec u,\vec v)}=1$$

נקבל

$$\cos\left[\phi_<(\vec r)+\phi_<(\vec r')\right]\simeq\cos\left[2\phi_<(\vec r)\right]$$

$$\cos\left[\phi_<(\vec r)-\phi_<(\vec r')\right]\simeq\cos\left[\vec v\cdot\vec\nabla_u\phi_<(\vec u)\right]\simeq 1-\frac{1}{2}\left(\vec v\cdot\vec\nabla\phi_<(\vec r)\right)^2$$

נגדיר

$$I_1=e^{-\frac{1}{2}\langle\phi_>^2(0)\rangle_>}\int d^2v\left[e^{-\frac{1}{2}\langle\phi_>(\vec v)\phi_>(0)\rangle_>}-1\right]$$

$$\simeq-\frac{1}{2}\int d^2v\,\langle\phi_>(\vec v)\phi_>(0)\rangle_>=\frac{-1}{4\pi K}\frac{d\Lambda}{\Lambda}\int d^2v\,J_0(v\Lambda)=\frac{-1}{2K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^3}\int_0^\infty dx\cdot xJ_0(x)$$

$$\equiv-\frac{\alpha_1}{K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^3}$$

(יש צורך לבצע רגולריזציה של האינטגרל בגבול x גדול)

$$I_2=e^{-\frac{1}{2}\langle\phi_>^2(0)\rangle}\int d^2v\left[e^{\frac{1}{2}\langle\phi_>(\vec v)\phi_>(0)\rangle_>}-1\right]\cdot v_x^2$$

$$\simeq\frac{1}{2}\int d^2v\,v_x^2\langle\phi_>(\vec v)\phi_>(0)\rangle_>=\frac{1}{4\pi K}\frac{d\Lambda}{\Lambda}\int d^2v\,v_x^2J_0(v\Lambda)=\frac{1}{4K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^5}\int_0^\infty dx\,x^3J_0(x)$$

$$\equiv\frac{\alpha_2}{K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^5}$$

אם נאסוף את התרומות השונות ונתעלם מאיברים קבועים נקבל עד סדר שני ב g

$$S_{eff}(\phi_<) = \int d^2r \left\{ \frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi_<)^2 - g\Lambda^2\left(1 - \frac{1}{4\pi K}\frac{d\Lambda}{\Lambda}\right)\cos\phi_< + \frac{g^2\Lambda^4}{4}\frac{\alpha_2}{K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^5}\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_<)^2 + \frac{g^2\Lambda^4}{4}\frac{\alpha_1}{K}\frac{d\Lambda}{\Lambda^3}\cos 2\phi_< \right\}$$

$$= \int d^2r \left\{ \frac{K'}{2}(\vec{\nabla}\phi_<)^2 - g'(\Lambda - d\Lambda)^2\cos\phi_< + \tilde{g}\cos 2\phi_< \right\}$$

כאשר

$$K' = K + \frac{g^2\alpha_2}{4K}\frac{d\Lambda}{\Lambda} \qquad (*)$$

$$g' = g + \left(2 - \frac{1}{4\pi K}\right)g\frac{d\Lambda}{\Lambda}$$

$$\tilde{g} = \frac{g^2\alpha_1}{4K}\frac{d\Lambda}{\Lambda}$$

אנו רואים כי בסדר זה הפעולה האפקטיבית עבור $\phi_<$ עם cutoff $\Lambda - d\Lambda$ נראית כמו הפעולה המקורית עם cutoff Λ תחת השינויים $g \to g'$, $K \to K'$. אנו רואים, כמו כן, שתהליך האינטגרציה על דרגות החופש $\phi_>$ יוצר בפעולה איבר חדש הפרופורציוני ל $\cos 2\phi_<$. איברים נוספים יופיעו בסדרים גבוהים יותר של תורת ההפרעות ב g ולמעשה כל איבר שאינו אסור מתוך שיקולי הסימטריה שמקיימת המערכת יופיע בשלב כל שהוא. מסיבה זו יש למעשה לכלול כל איבר המותר מתוך הסימטריות ב bare action ולבחון את התפתחותו תחת RG. אני מותיר לכם כתרגיל להראות כי האופרטור שנוצר רלוונטי פחות מהאופרטור $\cos\phi$ (במובן שהוא הופך לרלוונטי בטמפרטורות גבוהות מאלו בהן $\cos\phi$ הופך לרלוונטי) ואינו משפיע על הפיסקה ליד מעבר הפאזה. הדבר נכון גם לכל יתר האופרטורים הנוצרים בתהליך ה RG. מסיבה זו נתעלם מהם בהמשך.

השינוי ב Λ (ה momentum cutoff) שקול לשינוי בסקלת האורך $l = \frac{1}{\Lambda}$. הקטנת Λ שקולה להגדלת l בתהליך של coarse graining – קיבוץ של דרגות חופש על פני סקלה l (המתחילה בקבוע הסריג a ב bare level) לדרגת חופש אחת אפקטיבית.

בצעד הרנורמליזציה $\Lambda \to \Lambda - d\Lambda$ l משתנה באופן

$$l + dl = \frac{1}{\Lambda - d\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} + \frac{d\Lambda}{\Lambda^2} \Rightarrow \frac{dl}{l} = \frac{d\Lambda}{\Lambda}$$

ונוכל לרשום את התוצאות הקודמות (*) באופן הבא, הנקרא משוואות הזרימה:
(flow equations)

$$\frac{dK}{d(\ln l)} = \frac{\alpha_2}{4K} g^2$$

$$\frac{dg}{d(\ln l)} = \left(2 - \frac{1}{4\pi K}\right) g$$

אם נגדיר את המשתנים

$$X = 2 - \frac{1}{4\pi K}$$

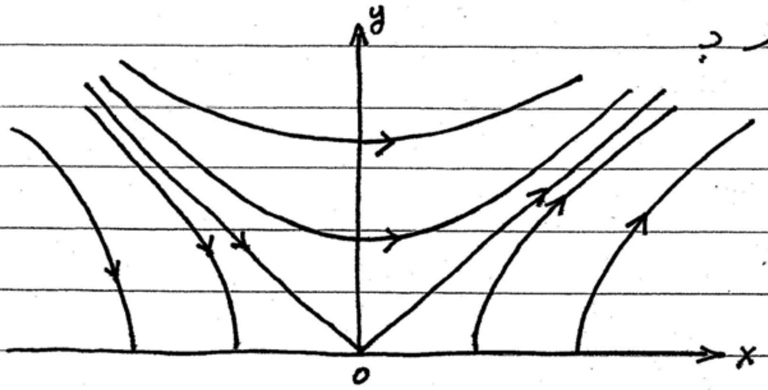
$$y = 2\pi\sqrt{8\alpha_2}\, g$$

משוואות הזרימה נראות כ:

$$\frac{dx}{d(\ln l)} = \frac{1}{8} y^2 (2 - X)^3$$

$$\frac{dy}{d(\ln l)} = Xy$$

והתמונה מפת הזרימה ליד $X=0$ נראית כ:



בסביבה זו המשוואות הופכות ל

$$\frac{dx}{d(\ln l)} = y^2$$

$$\frac{dy}{d(\ln l)} = Xy$$

$$\Rightarrow xdX = ydy = xy^2 d(\ln l)$$

עם הפתרונות $X^2 - y^2 = const$

כלומר, בסביבה זו הדינמיקה היא לאורך הפרבולות. הקבוע המגדיר את הפרבולה לאורכה מתבצעת הדינמיקה נקבע על ידי תנאי ההתחלה x_0 ו-y_0 המתאימים את המערכת בסקלה ההתחלתית a_0.

אנו רואים כי הקו (seperatrix) $y=-x$, $x<0$ הינו הגבול בין שני אזורים. משמאלו המערכת זורמת תחת טרנספורמצית ה-RG אל עבר הקו $y=0$ $x<0$. זהו קו של נקודות שבת יציבות (stable fixed line) מערכת הנמצאת עליו לא זורמת. סטייה קטנה ממנו גורמת לדינמיקה המחזירה את המערכת אליו. מה משמעות אזור זה? מערכת שתנאי ההתחלה שלה ב-bare level ממוקמים אזור זה מתנהגת בסקלות אורך גדולות בהתאם לפעולה אפקטיבית $\int d^2r \, \frac{K^*}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2$ (כאשר K^* נקבע על ידי תנאי ההתחלה על ציר X אליו זורמת המערכת). בהתאם לדיון בתחילת הפרק מערכת זו נמצאת בפאזה המתאימה לטמפרטורות נמוכות של ה-XY model עם קורלציות בעלות דעיכה אלגברית.

במונחי הפרמטרים של מודל XY תנאי ההתחלה לדינמיקה נתונים ע"י:

$$x_0 = 2 - \pi\beta J$$

$$y_0 = 2\pi\sqrt{8\alpha_2}\, e^{-\beta E_c}$$

כך שהמודל נמצא בנקודה הקריטית המפרידה בין ההתנהגויות השונות כאשר $x_0=-y_0$ $\Leftarrow$

$$2-\pi\beta_c J = -2\pi\sqrt{8\alpha_2}\, e^{-\beta_c E_c}$$

$\Leftarrow$ קיבלנו משוואה ל-T_{KT}:

$$T_{KT} = \frac{\pi}{2}J\left(1+\pi\sqrt{8\alpha_2}\, e^{-\frac{E_c}{T_{KT}}}\right)^{-1}$$

$$\simeq \frac{\pi}{2}J\left(1-\pi\sqrt{8\alpha_2}\, e^{-\frac{E_c}{T_{KT}}}\right)$$

יש לפתור משוואה זו באופן self consistent. נשים לב, יחד עם זאת, שבגבול של E_c גדול התוצאה מתקרבת ל-$\frac{\pi J}{2}$ אשר קיבלנו משיקולי אנרגיה חופשית שהפעלנו לגבי vortex בודד. ההבדלה ב-T_{KT} ביחס לתוצאה המתקבלת ל-N vortex בודד נובעת מהאפקטים של זוגות קשורים של vortex-antivortex על ρ_s כפי שהסברנו בהקשר של האפקטים הדיאלקטריים.

עבור תנאי התחלה הנמצאים מימין ל seperatrix המערכת זורמת לנקודה עם $K\to\infty$
ו g סופי. כלומר במונחי ה XY model $\rho_s\to 0$ ו $E_c\to const$. זו הנקודה
עם הקורלציות הדועכות אקספוננציאלית בטמפרטורות גבוהות.
אנו מוצאים לכן כי מערכת שעובדת ב $T=T_{KT}-\epsilon$ זורמת ל $X=0$ כלומר $\rho_s(l\to\infty)=J(l\to\infty)=\frac{2}{\pi}T_{KT}$
ואילו מערכת ב $T=T_{KT}+\epsilon$ זורמת ל $X\to\infty$ כלומר $\rho_s(l\to\infty)=0$. כתוצאה מכך ה
long wavelength phase stiffness מבצע קפיצה של $\frac{2}{\pi}T_{KT}$ ב $T=T_{KT}$.

לסיום, נוכל להעריך את אורך הקורלציה ξ עבור $T>T_{KT}$ ליד המעבר. אורך זה נתון על ידי סקלת האורך, l, בה $X=\infty$ כלומר $\rho_s=0$ ולכן קורלציות דועכות אקספוננציאלית.

קו הזרימה המתאים למערכת הקרובה למעבר עם $T>T_{KT}$ מקיים $y^2-x^2=c^2$ עבור c קטן.
בסביבה זו $y_0=-x_0+\Delta x_0$ ⇐

$$c=\sqrt{y_0^2-x_0^2}=\sqrt{(-x_0+\Delta x_0)^2-x_0^2}\simeq\sqrt{-2x_0\Delta x_0}$$

$$=\sqrt{-2x_0\pi J\frac{(T-T_{KT})}{T_{KT}^2}}\cong\sqrt{-4x_0\cdot\frac{T-T_{KT}}{T_{KT}}}\equiv\frac{\pi}{b}\sqrt{\frac{T-T_{KT}}{T_{KT}}}$$

ממשוואת הזרימה ל X נקבל

$$dx=y^2\frac{dl}{l}$$

$$=(x^2+c^2)\frac{dl}{l}$$

⇐ $$\frac{dx}{x^2+c^2}=\frac{dl}{l}$$

⇐ $$\frac{1}{c}\left[\arctan\frac{x(l)}{c}-\arctan\frac{x_0}{c}\right]=\ln\frac{l}{l_0}$$

$$l=l_0e^{\frac{1}{c}\left(\arctan\frac{x(l)}{c}-\arctan\frac{x_0}{c}\right)}$$

ומכאן
אנו מעוניינים ב l עבור $x(l)=\infty$ כאשר $x_0<0$ ואנו מניחים $0<c\ll 1$ ולכן נקבל

$$\xi(T)=l(x\to\infty)=l_0e^{\frac{1}{c}(\arctan\infty-\arctan-\infty)}=l_0e^{\frac{\pi}{c}}=l_0e^{b\sqrt{\frac{T_{KT}}{T-T_{KT}}}}$$