תורת BCS מספקת תאור מיקרוסקופי, וכמותי במקרים רבים, של תכונות המצב העל-מוליך.
כ-7 שנים לפני הופעת תורת BCS נוסחה תורה אחרת ע"י גינזבורג ולנדאו (1950):
Landau-Ginzburg, המספקת תאור של המצב העל-מוליך במסגרת התורה
הכללית יותר שפותחה השנים לטיפול במעברי פאזה מסדר שני. לתורת GL מכוון
בכך שהיא מאפשרת טיפול בשאלות מסוג במקרים בהם המערכת אינה הומוגנית תוך מתן
תמונה ויזואלית פשוטה. תורת GL לא זכתה לתשומת לב משמעותית מצד
יכולתה הפנומנולוגית אך זכתה לפופולריות רבה ב 1959 כאשר Gorkov הראה כי
למעשה ניתן לקבלה מתוך התורה המיקרוסקופית של BCS.

בבסיס תורת GL עומדת ההנחה כי הסדר העל-מוליך ניתן לתאר בעזרת פרמטר סדר
שהינו פונקציה מרוכבת $\Psi(r)$ כך ש $\Psi(r)=0$ בפאזה הנורמלית וגדל באופן רציף -
במקרה שאין שדה מגנטי חיצוני, כאשר המערכת מקוררת מתחת ל T_c. מתוך התורה של
Gorkov ניתן לזהות את $\Psi(r)$ עם ה gap parameter $\Delta(r)$ של BCS
(עד כדי קבוע) ואת $|\Psi(r)|^2$ עם $n_s(r)$, צפיפות ה superfluid. עד כדי קבוע
פרופורציה

GL הניחו כי כאשר Ψ קטנה - עובדה המגבילה את תחום הטמפרטורות של התורה לסביבת
T_c, על ידע היא משמעותית לכך מספיק לפתח את צפיפות האנרגיה החופשית של המערכת כטור
חזקות ב Ψ ובנגזרותיה כאשר ההתנהגות הזו מאפשרת להסתפק באיברי הסדר
הנמוכים:

$$f = f_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c}\right)\Psi\right|^2 + \frac{h^2}{8\pi}$$

כאשר f_n צפיפות האנרגיה החופשית במצב הנורמלי וכללנו גם את האנרגיה להשלמת של שדה
מגנטי דרך הפוטנציאל הווקטורי $\vec{A}$ והשדה המגנטי $\vec{h}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ עם צפיפות אנרגיה $\frac{h^2}{8\pi}$ שאינו
מתאר (אלא היא השדה הגדלה הנוצר מהשדה החיצוני H והמתבטאות זרמי הסיבוב בעל-מוליך)

מספר אילוצים בחשבון צריך כדי לבחור את הפונקציה הנ"ל: מכיוון ש f ממשית לא ניתן לבחור
ב Ψ עם לא ב $|\Psi|$ מכיוון שאז f לא אנליטית ב $\Psi=0$ ומסיבה זו לא ניתן גם לכלול
חזקות אי זוגיות של $|\Psi|$ בפיתוח. הבאות הוא לכן ב $|\Psi|^2$.

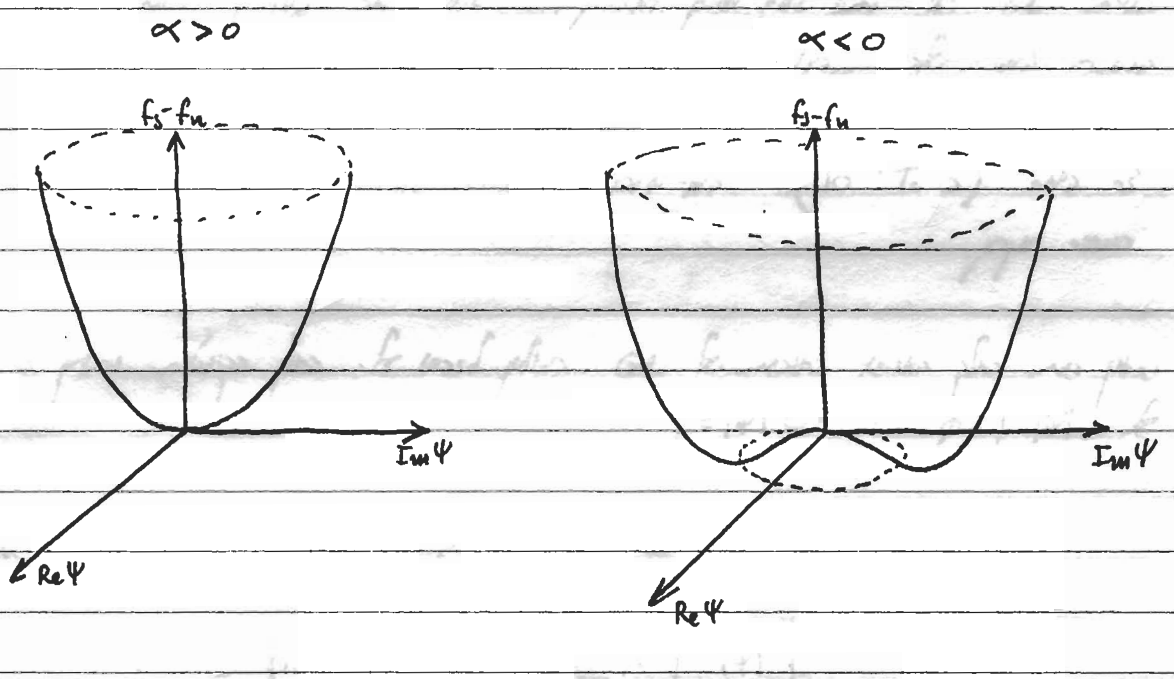
הצימוד לשדה האלקטרומגנטי החיצוני נעשה בצורת ה minimal-coupling הרגילה כדי להבטיח gauge invariance: אינווריאנטיות תחת $\vec{A}\to\vec{A}+\vec{\nabla}\Lambda$ $\quad \psi\to\psi e^{i\frac{e^*}{\hbar c}\Lambda}$

ל-e^* יש ! מימד של מטען אך הוא אינו שווה בהכרח למטען האלקטרון.

בהעדר שדות חיצוניים נחזור למקרה ההומוגני

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4$$

קל לראות כי כדי שהמערכת תהיה יציבה חייב להתקיים $\beta>0$: אחרת המינימום באנרגיה החופשית מתקבל ב $|\psi|^2\to\infty$. לעומת זאת α יכול להיות חיובי או שלילי.



כאשר $\alpha>0$ מינימום האנרגיה החופשית מתקבל ב $\psi=0$ המתאים למצב הנורמלי.

כאשר $\alpha<0$ המינימום מתקבל ב $|\psi_0|^2=-\frac{\alpha}{\beta}$ ובו $f_s-f_n=-\frac{\alpha^2}{2\beta}$

$\Rightarrow$ המערכת מקטינה את האנרגיה החופשית שלה ביחס למצב הנורמלי.

שימו לב כי האנרגיה החופשית אינה תלויה בפאזה של ψ: $\psi=|\psi|e^{i\varphi}$ אלא רק ב $|\psi|$

לכן כל המצבים בהם $|\psi|^2=-\frac{\alpha}{\beta}$ אקוויולנטים מבחינת האנרגיה החופשית שלהם: האנרגיה אינווריאנטית תחת טרנספורמצית $U(1)$ $\psi\to\psi e^{i\varphi}$ אך מצב היסוד שובר סימטריה זו ובוחר פאזה מסוימת

המעבר מ־$\alpha>0$ ל־$\alpha<0$ מתרחש ב־T_c כפי שמתאים להתנהגות סדר 2 שלנו (ψ קטן). מכיוון שאנו יודעים כי המעבר הוא מסדר שני α ו־β הן פונקציות חלקות של הטמפרטורה בסביבת T_c.
מכיוון שאנו מעוניינים בסביבה זו נשאיר רק את האיבר הראשון של פיתוח טיילור של α ו־β ב־T סביב T_c:

$$\alpha = \alpha_0 (T-T_c) \qquad (\alpha_0>0)$$
$$\beta = const$$

מכאן נקבל עבור $T<T_c$

$$|\psi| = \left[\frac{\alpha_0}{\beta}(T_c-T)\right]^{1/2}$$

בהתאמה למה שחישבנו עבור $\Delta(T)$ ליד T_c בתורת BCS. הדמיון הוא למשל שלפי פיזיקלית שכן ומתוך השוואתם ניתן לקבוע את הקבועים המופיעים בתורת GL. שאלה היא מתי ניתן להשתמש בתורת GL כדי למצוא שלבי מעבר פאזה. מסתבר יותר במעבדה לראות ולא במקום תחום שנמצא בפועל. הנקודה שלה היא תחום קטן. תחום זה הוא מוגבל כיוון שמכיוון שמעל הקריטי בו הפאזה מקבלת ה mean-field המתאים התחשבות בפלקטואציות של ψ סביב ערכו הממוצע צר מאוד (ב־$10^{-4}T_c$). בעל-מוליכים בטמפרטורות גבוהות אזור זה גדול למדי עד ל־10-20K במקרה מסוים.

נתמקד כעת בחלק באנרגיה החופשית של GL המוליך לצרכינו: החלק הקינטי. נרשום אותו כפונקציה של $|\psi|$ ו־ϕ: $\psi=|\psi|e^{i\phi}$

$$(f_s-f_n)_{kin} = \frac{1}{2m^*}\left|\left(-i\hbar\vec\nabla-\frac{e^*}{c}\vec A\right)\psi\right|^2$$

$$= \frac{1}{2m^*}\left[\left(\hbar\vec\nabla|\psi|\right)^2+\left(\hbar\vec\nabla\phi-\frac{e^*}{c}\vec A\right)^2\cdot|\psi|^2\right]$$

האיבר הראשון מתאר את האנרגיה הקשורה לשינוי בגודל הפרמטר סדר. האיבר השני מתאר את האנרגיה הקינטית הקשורה לזרמי על (super current). מתוך הקשר $\vec J = -c\frac{\partial f}{\partial \vec A}$ נמצא

$$\vec J_s = \frac{e^*}{m^*}|\psi|^2\left(\hbar\vec\nabla\phi-\frac{e^*}{c}\vec A\right) \equiv e^* n_s^* \vec v_s$$

כאשר $|\psi|^2=n_s^*$ וה superfluid velocity נתונה על ידי $\vec{v}_s = \frac{1}{m^*}\left(\hbar\vec{\nabla}\phi - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)$

כך שהאיבר הקינטי הקשור לגרדיאנט ניתן לכתיבה כ $\frac{1}{2}m^* n_s^* v_s^2$.

שימו לב כי שינויים בגודל פרמטר הסדר מאלצים את המערכת להעלות את האנרגיה שלה, בכך שהם מתרחקים ממינימום הפוטנציאל ב $|\psi|=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ ועלותם מעט ככה יעלו אנרגיה סופית. שינויים בפאזה לעומת זאת, קלים יותר מכיוון שהפאזה כאשר אנרגיה מחייבת מעבר בין הפאזה שונה מינימום באנרגיה: המינימום באנרגיה הפוטנציאלית קיים לכל $|\psi|=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ בלי קשר לפאזה: המערכת יכולה לנוע על ה"עמק" של הפוטנציאל מבלי לשנות את האנרגיה. כאשר כך הוכחה להיות חלקה במרחב ניתן לומר ששינויים בפאזה ϕ תלויים במקום גורמים אנרגיה אך אם שינויים אלה נעשים על פני סקלות אורך גדולות המחיר האנרגטי קטן.

נוכל כעת לקבל את אפקט Meissner מתוך הביטוי ל $\vec{J}_s$ ומשוואות מקסוול:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_s$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{e^*}{m^*}n_s^*\,\vec{\nabla}\times\left(\hbar\vec{\nabla}\phi - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\nabla^2\vec{B} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}}_{0})$$

$$\vec{\nabla}\times\hbar\vec{\nabla}\phi = 0$$

$\Leftarrow$ משוואת לונדון אשר קיבלנו (בכיול $\vec{A}$) בתורת BCS:

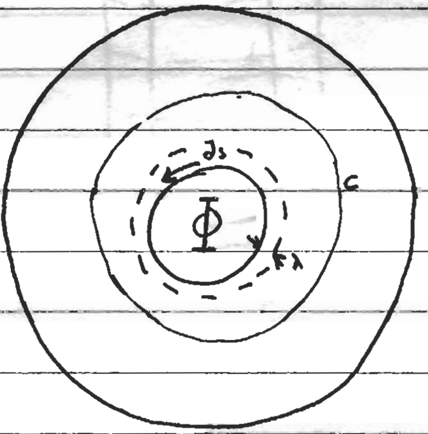
$$\vec{B} = \lambda^2\nabla^2\vec{B}$$

כאשר ה penetration depth הוא

$$\lambda = \left(\frac{m^* c^2}{4\pi n_s^* e^{*2}}\right)^{1/2}$$

במאמר המקורי של GL הפרמטרים m^* ו e^* היו המסה והמטען האלקטרוני הרגילים. תוצאות נסיוניות לאחר מכן הראו כי e הוא $e^*=2e$: מטען ה Cooper pair. m^* לא ניתן למדידה באופן ישיר. הגדלים הנסיוניים תלויים רק ב $\frac{m^*}{n_s^*}$. אם נקח $m^*=2m$ מספר הנשאים ו $n_s^*=\frac{n_s}{2}$: מספר זוגות Cooper ב condensate נקבל את התוצאה שקיבלנו עבור λ בתורת BCS.

אפקט Meissner גורם שמצאנו ל $\vec{J}_s$ מתאים לאפקט המיוחד הבא:
נתבונן בטבעת על-מוליך שהכנסנו תוך החור לאורך ציר הטבעת והעבר השדה מגנטי חיצוני. מאפקט Meissner אנו יודעים כי בשכבה שעוביה λ משפת הטבעת יזרמו זרמי-על שיסככו את השדה החיצוני בתוך הטבעת.



נתבונן במסילה סגורה C סביב החור הנמצאת במרחק גדול מ λ משפת הטבעת. לכן על C $\vec{J}_s=\vec{v}_s=0$.

$$\Leftarrow \quad 0=\oint_C \vec{v}_s\, d\vec{l} = \frac{1}{m^*}\oint_C\left(\hbar\vec{\nabla}\phi-\frac{e^*}{c}\vec{A}\right)d\vec{l}$$

מכיוון ש Ψ חד ערכית צריך להתקיים n-שלם
$$\oint_C \vec{\nabla}\phi\, d\vec{l} = 2\pi\cdot n$$

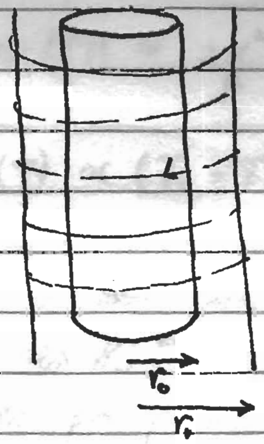
כמו כן מתקיים
$$\oint_C \vec{A}\,d\vec{l} = \int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \Phi$$
כאשר Φ השטף המגנטי דרך המסילה המוגדרת ע"י C' מוגדר בחור.

$$\Leftarrow \quad 0 = 2\pi\hbar\cdot n - \frac{e^*}{c}\Phi$$

$$\Phi = \frac{hc}{e^*}\cdot n = \frac{hc}{2e}\cdot n \equiv \Phi_0\cdot n$$

השטף חייב להיות מקוונטט ביחידות שלמות של קוונט השטף Φ_0.

נבחן כעת את הרס של הרס העל-מוליכות בנוכחות של שדה מגנטי חזק מספיק. מתוך התופעות שקיבלנו מתורת BCS ברור כי הנוכחות שדה מגנטי מסיר את הניוון הבוזוני בין חברי ה Cooper pair וספקטרום עלול להרוס הרס והמקבלת להרס העל-מוליכות. נרצה לחשב את השדה הקריטי H_c שבו על-מוליכות נהרסת בשלב הראשוני - השדה התרמודינמי הקריטי.



נתבונן בגליל ברדיוס r_0 ואורך L של חומר העלול להיות במצב על-מוליך הנתון בתוך סליל ברדיוס r_1 ואורך L ועם N כריכות.

כאשר הגליל נמצא במצב הנורמלי השדה המגנטי בתוך הסליל קבוע (עבור סליל ארוך) ונתון ע"י $h = \frac{4\pi N I}{cL}$

כאשר I הזרם בסליל.

האנרגיה החופשית של המערכת היא אז

$$F_n = \pi r_0^2 L f_n + \pi r_1^2 L \cdot \frac{h^2}{8\pi}$$

צפיפות האנרגיה של הגליל במצב הנורמלי

כאשר הגליל נמצא במצב העל-מוליך השדה המגנטי בתוכו כתוצאה מאפקט Meissner מתאפס והאנרגיה החופשית של המערכת היא

$$F_s = \pi r_0^2 L f_s + \pi (r_1^2 - r_0^2) L \frac{h^2}{8\pi}$$

נשתמש בגבול r_0 והבוחן לקבוע שבה: את האנרגיה הקינטית של נתוני השדה.

כשהגליל עובר במעבר זרם I_c מעבר לעל-מוליך השטף המגנטי דרך הסליל קטן ולכן מושרה כא"מ ⇐ המערכת בגליל מבצעת עבודה הנתונה ע"י, (כאשר הזרם נשאר קבוע בסליל):

$$\int_n^s VI\,dt = -\int_n^s \left(\frac{N}{c}\frac{d\Phi}{dt}\right) I\,dt = \frac{NI}{c}\left(\Phi_n - \Phi_s\right) = \frac{NI}{c}\pi r_0^2 h = \pi r_0^2 L \frac{h^2}{4\pi}$$

המעבר לא הפיך לכן לפי על מולכה כאשר הפרש האנרגיות החופשיות שלה $F_n - F_s$ ישווה לעבודה האנרגטית שנעשתה שהיא מתבצעת על הסליל כדי לשמור את השדה המגנטי מעבר $\int_n^s VI\,dt$.

תנאי זה מגדיר את השדה הקריטי H_c:

$$F_n - F_s = \pi r_0^2 L (f_n - f_s) + \pi r_0^2 L \frac{H_c^2}{8\pi} = \int VI\,dt = \pi r_0^2 L \frac{H_c^2}{4\pi}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{H_c^2(T)}{8\pi} = f_n(T) - f_s(T)$$

המעבר מנורמל-על-מוליך בשדה מגנטי סופי הוא מעבר ראשון. השדה המגנטי החיצוני אך הפרמטר לא רציף.

ψ משתנה באופן לא רציף

מעניין שליד T_c $$f_n(T)-f_s(T) = \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{\alpha_0^2}{2\beta}(T-T_c)^2$$

הפ' <u>שליד T_c</u> $$H_c(T) \propto (T_c - T)$$

בדוגמא בעלת גיאומטריה מורכבת יותר מגליל שנכנס מקביל לשדה המגנטי השדה על שפת הדוגמא לא יהיה יותר שווה לשדה החיצוני. השדה יהיה שונה בנקודות שונות על השפה ויגיע לערך הקריטי לפני שהשדה החיצוני ישיג אותו. כאשר הדבר קורה האזורים בהם השדה גדול מהשדה הקריטי יהפכו לנורמליים בעוד שיתר הדוגמא תשאר על-מוליכה. זהו ה-intermediate state של על-מוליך מסוג 1.

בשנות ה-50 היו ניסויים מסויימים בהם האזור בו חדר השדה המגנטי את הדוגמא לא היה תלוי בגיאומטריה שלהם. בנוסף בדוגמאות בעלות גיאומטריה שבהם צפויה להיות מעבר השדה תוך מדידות תכונות השדה המגנטי מהסוג שנעשו בדוגמאות הללו הראו כי השדה המגנטי חודר את הדוגמא באופן הדרגתי במצב העל-מוליך. נראה היה שאפקט Meissner לא מתקיים בהם - אלו הם העל-מוליכים מסוג 2. הסבר לשונה סופק ב 1957 ע"י Abrikosov.
כדי להבין את מקור ההבדל בין שני סוגי העל מוליכים נתבונן באנרגיה החופשית בשדה 0 במצב העל-מוליך

$$f_s - f_s = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2$$

נרשום $g = \frac{\psi}{\psi_0}$, $\psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ הערך המתאים למינימום של f במצב ההומוגני

$$= \alpha|\psi_0|^2\left[|g|^2 + \frac{\beta}{2\alpha}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)|g|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*\alpha}|\nabla g|^2\right]$$

$$= \alpha|\psi_0|^2\left[|g|^2 - \frac{1}{2}|g|^4 - \xi^2|\nabla g|^2\right]$$

כאשר $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|}$ $\Leftarrow$ $\left(T_c \text{ ליד } \xi \propto \left(\frac{1}{1-\frac{T}{T_c}}\right)^{1/2}\right)$

היינו ה coherence length

ניתן להראות כי ξ מגדיר סקלת אורך לשינויים מרחביים ב Ψ. בבל-מוליכים קלאסיים הוא מסדר גודל של $1000\AA$-טיפוסי. בבל מוליכים בטמפרטורות גבוהות $\xi_{ab} \sim 10\AA$ (במישור ab) ו $\xi_c \sim 3\AA$ (בכיוון c ניצב למישור ab)

בהשוואת של שתי סקלות אורך קיבלנו: $\lambda ! \xi$ מולה את ההשבלות שאם ξ קטן בהרבה מ λ מכאן נובע כי הבל-מוליך לא יקיים באופן המושלם בהעברת שדה מגנטי חיצוני שכן השדה המגנטי בהעלה מינימליים ב Ψ קטן (מכיון ש ξ קטן)
נחשב לכן מהו השדה שבו מתחילים את ההעברה המגנטית. תנאי המינימיזציה של $f_s - f_n$ הוא משוואת אוילר-לגרנז' ביחס ל Ψ:

GL equation:
$$\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}\left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)^2\Psi = 0$$

בהנחה שהשדה המגנטי הנתון בשדה מגנטי בכיוון Z: נבחר $A_y = HX$
בבל-מוליכים מתחילה להופיע באזור קטן במשמעות כך ש Ψ קטן ומתקיים באזור מסוים. מכיון שאנו מניחים כי $\Psi_0 \gg \Psi$ נוכל להזניח את האיבר הקובי במשוואה ולקבל

$$\left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\Phi_0} HX \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0}\right)^2 X^2\right]\Psi = \frac{1}{\xi^2}\Psi$$

$\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$

ננסה פתרון מהצורה
$$\Psi = e^{i(k_y y + k_z z)} f(X)$$

$$\Leftarrow \quad -\partial_x^2 f + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0}\right)^2 (X - X_0)^2 f = \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right) f$$

כאשר
$$X_0 = \frac{k_y \Phi_0}{2\pi H}$$

משוואה זו זהה בצורתה למשוואת שרדינגר לחלקיק טעון בשדה מגנטי. ניתן לראות זאת אם נכפיל ב $\frac{\hbar^2}{2m^*}$. התדירות הציקלוטרון של המוצא במקרה הזה היא $\omega_c = \frac{2\pi\hbar H}{m^*\Phi_0}$
והאנרגיות E_n של המשוואה שרדינגר המקבילה מקיימות $E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right)$

אם בפתרון הבעיה הקוונטית אנו מקבלים רמות. אלו הן רמות האוסצילטור ההרמוני עם אנרגיה

$$\epsilon_n = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar\frac{2eH}{m^*c}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$H = \frac{\Phi_0}{2\pi(2n+1)}\left(\frac{1}{\xi^2}-k_z^2\right) \Leftarrow$$

ברור כי השדה המגנטי הגבוה ביותר בו מתקבל פתרון למשוואה הוא עבור $k_z=0$ ו-$n=0$.
ערכו המקסימלי המסומן ב-H_{c2} נתון לכן ע"י

$$H_{c2}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)}$$

זהו השדה שמתחתיו מתחילה נוקלאציה של אזורים על-מוליכים קטנים. הפתרון המרחבי שמתאים
ב-H_{c2} מתאים לפונקציית הגל של האוסצילטור ההרמוני $e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}}$.

נשווה כעת בין השדה התרמודינמי H_c והשדה H_{c2} אשר חישבנו. מהגדרת הביטוי
שמתאים ל-H_c, המוגדר ע"י $f_n-f_s=\frac{\alpha^2}{2\beta}$ והביטוי שמצאנו ל-λ ניתן לכתוב את H_c
באופן הבא:

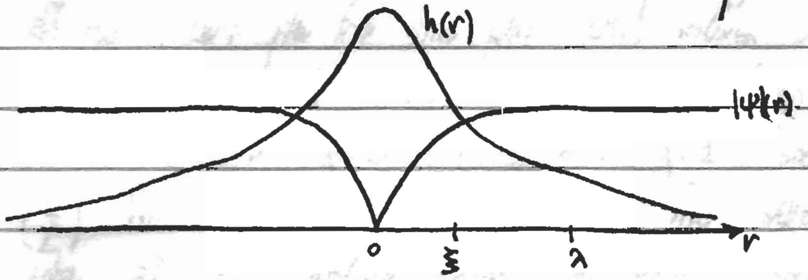
$$H_c(T) = \frac{\Phi_0}{\sqrt{2}\cdot 2\pi\,\xi(T)\,\lambda(T)}$$

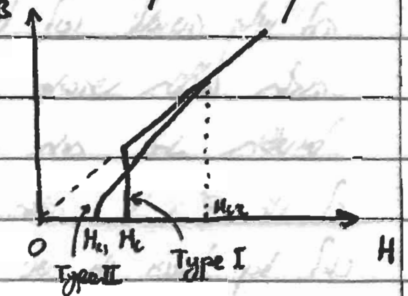
אם נגדיר את הגודל $\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$ נקבל

$$H_{c2} = \sqrt{2}\,\kappa\, H_c$$

ברור לכן כי הערך $\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}$ מפריד לכן בין חומרים בהם $H_{c2}<H_c$ $\left(\kappa<\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
ובהם המערכת תעדיף להשאר במצב ההומוגני תוך קיום אפקט Meissner עד H_c -
(אין לה סיבה להפוך אי הומוגנית ולאפשר חדירת השדה ב-H_{c2} היא עדיין יכולה לקיים את המצב
ההומוגני), - אלו הם העל-מוליכים מסוג 1, לבין חומרים בהם $H_{c2}>H_c$ $\left(\kappa>\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
בהם על מנת הומוגניות ואפקט Meissner שלם מפסיק להתקיים ב-H_{c1} אך העל-מוליכות
לא הומשבת עם אפקט Meissner חלקי מתקיימת בין H_{c1} ל-H_{c2} - אלו הם
העל-מוליכים מסוג 2

Abrikosov גם גילה את הדרך בה חודר השדה המגנטי את הגוש במוליך-על מסוג 2
השדה המגנטי חודר את הגוש בצורת vortices. דרך כל אחד מה vortices עובר שטף
מגנטי של Φ_0. במרכז ה vortex העל-מוליכות נהרסת ועוברת למצב הנורמלי
במרחק ξ מהמרכז. סביב ליבת ה vortex (vortex core) מתפתחים זרמי
סיבוב המבטלים את השדה המגנטי במרחק λ מהמרכז.





ב 1962 גילה Josephson אפקט יוצא דופן הקרוי על שמו. הוא גילה כי בין שני
אלקטרודות על-מוליכות המופרדות בשכבה מבודדת דקה יזרום זרם על-מוליך:

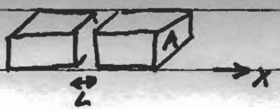
$$I_s = I_c \sin\Delta\varphi$$

בהעדר כל מפל מתח בין האלקטרודות: $V=0$.
כאן $\Delta\varphi$ הוא ההפרש בין הפאזה של פרמטר הסדר של GL של שני האלקטרודות ו I_c
הוא הזרם הקריטי: הזרם העל-מוליך המקסימלי שהצומת יכולה לשאת.
בנוסף לכך הוא גילה כי אם קיים מפל מתח V בין האלקטרודות העל-מוליכות הפרש
הפאזה $\Delta\varphi$ יתפתח בזמן כמתואר כך:

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar}V$$

כך שהזרם יהיה זרם חילופין עם אמפליטודה I_c ותדירות $\omega = \frac{2eV}{\hbar}$ כך שהאנרגיה $\hbar\omega$
שווה לאנרגיה שצובר זוג Cooper כשהוא עובר דרך הצומת.
האפקט הראשון נקרא DC Josephson effect והשני AC Josephson effect

נראה כעת כיצד לקבל את ה DC Josephson effect מתוך תורת GL.
נתבונן בשני על-מוליכים מופרדים המופרדים בשכבה דקה באורך $L<<\xi$ בכיוון x



נתבונן במשוואת GL עבור $g=\frac{\Psi}{|\Psi_0|}$ בהעדר שדות חיצוניים:
ובגלל סימטרית הבעיה נניח $g=g(x)$

$$\xi^2\frac{d^2g}{dx^2}+g-|g|^2g=0$$

בתוך גוף מוליך $|\Psi|=|\Psi_0|$ כך ש $g=1$ אך הפאזה של פרמטר הסדר צריכה להיות שונה בגוף מוליך השמאלי וגוף לשמאל את המטריה $U(1)$ באופן שונה מגוף מוליך הימני. נניח לכן הפאזה בגבולות שנמצאים בגוף מוליך השמאלי היא 0 והימני $\Delta\varphi$. עלינו לפתור לכן בתוך משוואת G.L תחת תנאי השפה $g=1$ ב $x=0$ ו $g=e^{i\Delta\varphi}$ ב $x=L$.
כל עוד $\xi \gg L$ האיבר הראשון במשוואה גדול מהאיברים האחרים בפקטור מסדר גודל $\left(\frac{\xi}{L}\right)^2$.
נוכל לכן להזניח את שני האיברים האחרונים ולהשאר עם משוואת Laplace $\partial_x^2 g=0$ שפתרונה לפתור תחת תנאי השפה שלנו. ⇒ לפיכך שהפתרון הינו ליניארי

$$g(x)=1-\frac{x}{L}+\frac{x}{L}e^{i\Delta\varphi}$$ עבור $0\le x\le L$.

אם נציב בביטוי ל $\vec{J}_s$ (עבור $\vec{A}=0$)

$$\vec{J}_s=\frac{e^*\hbar}{2m^*i}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi-\Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)$$

נקבל עבור הזרם בכיוון x:

$$I=I_c\sin\Delta\varphi$$

כאשר

$$I_c=\frac{2e\hbar\Psi_0^2}{m^*}\cdot\frac{A}{L}$$