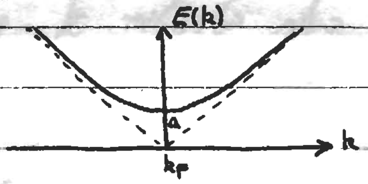
העירורים מעל למצב היסוד מתוארים ע"י הסכום השני. אלו הם עירורים פרמיוניים חופשיים בעלי אנרגיה

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}$$



כפי שהיה ניתן לצפות, Δ_k ממלאת את התפקיד של פער אנרגיה. היא נקבעת מתוך

$$\Delta_k = \sum_{k'} V_{kk'} \langle C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \rangle = \sum_{k'} V_{kk'} U_{k'}^* V_{k'} \langle 1 - \gamma_{k'0}^\dagger \gamma_{k'0} - \gamma_{k'1}^\dagger \gamma_{k'1} \rangle$$

מספר העירורים (quasi-particles) במערכת בעלת נפח וטמפרטורה נתונים נקבע מתוך הדרישה לכך שהאנרגיה החופשית תהיה מינימלית $\left(\frac{\partial F}{\partial N^{qp}}\right)_{V,T} = 0$ כאשר N^{qp} מספרם של ה qp: לא של האלקטרונים המקוריים. אבל משמעות הדבר היא כי הפוטנציאל הכימי של ה qp מתאפס. (לא הפוטנציאל הכימי של האלקטרונים הנקבע מתוך השונות של F ביחס לN: מספר האלקטרונים בדוגמא). בתוספת העובדה כי העירורים הינם פרמיונים חופשיים נקבל

$$\langle \gamma_{k0}^\dagger \gamma_{k0} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_k} + 1} = f(E_k)$$

באופן דומה עבור $\sigma=1$. נשתמש בכך כדי לקבל

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} U_{k'}^* V_{k'} \left[1 - 2f(E_k)\right]$$

$$= -\sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \tanh\left(\frac{\beta E_{k'}}{2}\right)$$ זוהי ה gap-equation

אם נשתמש בקירוב לפוטנציאל $V_{kk'} = \begin{cases} -V_0 & |\xi_k| < \omega_0, \ |\xi_{k'}| < \omega_0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ נקבל $\Delta_k = \Delta_{k'} = \Delta$!

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \\ |\xi_k| < \hbar\omega_0}} \frac{\tanh\left(\frac{\beta E_k}{2}\right)}{E_k}$$ ה BCS gap equation

משוואה זו מגדירה את התלות בטמפרטורה של הפער האנרגטי $\Delta(T)$. הטמפרטורה הקריטית היא הטמפרטורה בה $\Delta(T)\to 0$. במקרה זה $E_k \to |\xi_k|$ והספקטרום הופך להיות זה של המערכת הנורמלית. נוכל למצוא את T_c, לכן, מתוך החלפת E_k ב-$|\xi_k|$ ב-gap equation. נחליף את הסכום לאינטגרל ונעבור לאינטגרציה על האנרגיה:

$$\frac{1}{V_0} = \int_0^{\hbar\omega_0} d\xi\, g(\xi)\, \frac{\tanh\left(\frac{\xi}{2k_BT_c}\right)}{\xi} \simeq g_0 \int_0^{\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT_c}} dx\, \frac{\tanh x}{x} = g_0 \ln\left(\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\frac{\hbar\omega_0}{k_BT_c}\right)$$

$$\Leftarrow \quad k_BT_c = 1.13\,\hbar\omega_0\, e^{-\frac{1}{g_0V_0}}$$

בדיוק התוצאה שקיבלנו מחישוב ה-pairing susceptibility

ה-gap equation

$$\frac{1}{g_0V_0} = \int_0^{\hbar\omega_0} d\xi\, \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\xi^2+\Delta^2}\right)}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}$$

מגדירה את $\Delta(T)$

ב-$T=0$

$$\frac{1}{g_0V_0} = \int_0^{\hbar\omega_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\Delta^2(0)}} = \ln\left[\frac{\hbar\omega_0}{\Delta(0)} + \sqrt{1+\left(\frac{\hbar\omega_0}{\Delta(0)}\right)^2}\right]$$

מכיון שבגבול $g_0V_0 \ll 1$ $\hbar\omega_0 \gg \Delta(0)$ (כפי שניתן לבדוק בדיעבד)

$$\simeq \ln\left(\frac{2\hbar\omega_0}{\Delta(0)}\right)$$

$$\Leftarrow \quad \Delta(0) = 2\hbar\omega_0\, e^{-\frac{1}{g_0V_0}}$$

לכן

$$\frac{\Delta(0)}{k_BT_c} = 1.76$$

תרגיל: עבור $T \ll \Delta(0)$ נוכל לקרב את ה-tanh ב-gap equation ע"י $1-2e^{-\beta\sqrt{\xi^2+\Delta^2}}$ ולקבל שעבור $g_0V_0 \ll 1$

$$\frac{1}{g_0V_0} \simeq \ln\left(\frac{2\hbar\omega_0}{\Delta(T)}\right) - 2\int_1^{\infty} dx\, \frac{e^{-\beta\Delta(T)x}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$x = \sqrt{1+\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)^2}$$

$$= \ln\left(\frac{2\hbar\omega_0}{\Delta(0)}\right) - 2K_0\left(\beta\Delta(T)\right)$$

$$\xrightarrow{\beta\Delta \gg 1} \ln\left(\frac{2\hbar\omega_0}{\Delta(0)}\right) - \sqrt{\frac{2\pi}{\beta\Delta(T)}}\, e^{-\beta\Delta(T)}$$

$$\Delta(T) \simeq \Delta(0) - \sqrt{2\pi\Delta(0)k_BT}\, e^{-\frac{\Delta(0)}{k_BT}} = 1.76\, k_BT_c\left[1 - 1.89\sqrt{\frac{T}{T_c}}\, e^{-1.76\frac{T_c}{T}}\right] \Leftarrow$$

בקירוב: ליד T_c נפתור את ה gap equation כסדרה

$$\frac{1}{g_0V_0} = \int_0^{\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}} dx \left\{\frac{\tanh x}{x} + \left[\frac{\tanh\sqrt{x^2+\left(\frac{\beta\Delta(T)}{2}\right)^2}}{\sqrt{x^2+\left(\frac{\beta\Delta(T)}{2}\right)^2}} - \frac{\tanh x}{x}\right]\right\}$$

נפתח את האבר בסוגריים המרובעים לסדר הנמוך ביותר ב- $\beta\Delta(T) \ll 1$ לקבל

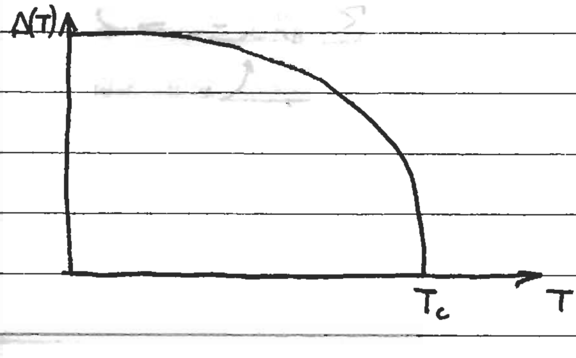
$$\frac{1}{g_0V_0} = \int_0^{\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}} dx\, \frac{\tanh x}{x} + \frac{(\beta\Delta(T))^2}{8}\int_0^{\infty} dx\left[\frac{1}{x^2\cosh^2 x} - \frac{\tanh x}{x^3}\right]$$

$$= \ln 1.13\frac{\hbar\omega_0}{k_BT} - 0.10657\left(\frac{\Delta(T)}{k_BT}\right)^2$$

$$\ln\frac{k_BT}{1.13\hbar\omega_0} = -\frac{1}{g_0V_0} - 0.10657\left(\frac{\Delta(T)}{k_BT}\right)^2 \Leftarrow$$

$$k_BT \simeq k_BT_c\left[1 - 0.10657\left(\frac{\Delta(T)}{k_BT}\right)^2\right]$$

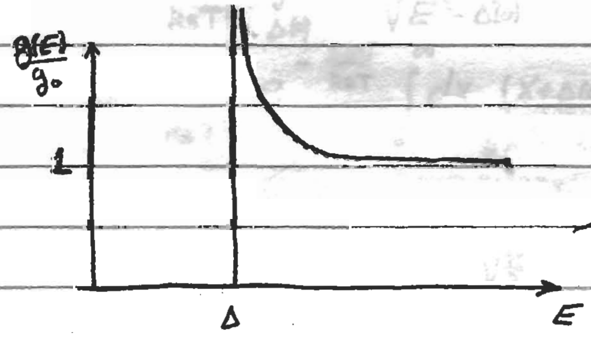
$$\Delta(T) = 3.06\, k_BT_c\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} = 1.74\,\Delta(0)\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \Leftarrow$$



שימו לב כי הפרמטר הסדר ביחידות של k_BT_c : $\frac{\Delta(T)}{k_BT_c}$ היא פונקציה של $\frac{T}{T_c}$ בלבד.
היכולת לבטא את התלות של הגדלים הפיזיקליים בפרמטרי המערכת הנורמליים (V_0, g_0, ω_D)
דרך התלות שלהם ב T_c בלבד הופכת את תורת BCS לתורה חזקה במיוחד בכלל הפרמטרים
אלה. בפועל קשה מאוד להכניס את הצפיפות g ואת V מורכבים הפשטות הופכת צורה לחשב את
T_c לפרמטר ללא שגיאה. בניסוי ערך T_c נמדד לתהליך מדויקת ומכיון שב BCS
ניתן לבטא את תכונות המערכת העל-מוליכה דרך T_c בלבד התורה היא תורה כה נכונה רק.

ראינו כי הפרמטר הסדר Δ מהווה גם את הפער האנרגטי שמתחתיו אין מצבים מותרים בעל-מוליך.
נמצא את השינוי בצפיפות המצבים בעל-מוליך כתוצאה מהתיאור הזה. אנו מעוניינים לחשב את:

$$g(E) = \frac{1}{V}\frac{dN}{dE} = \frac{1}{V}\frac{dN}{d\xi}\frac{d\xi}{dE} \overset{\text{ליד } E_F}{=} \underset{\text{כמעט קבוע}}{g_0}\frac{d\xi}{dE} = \begin{cases} g_0 \frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} & E>\Delta \\ 0 & E<\Delta \end{cases}$$



המצבים עם $E<\Delta$ שהיו קיימים במצב הנורמלי נדחקים במצב העל-מוליך לאנרגיות גבוהות מ Δ. כתוצאה מכך צפיפות המצבים גדלה משמעותית מהמצב הנורמלי באנרגיות מעל Δ (ב Δ קיימת התבדרות) ומעבר לערכה במצב הנורמלי באנרגיות גבוהות יותר.

העדר מצבים בעלי אנרגיה הקטנה מ Δ מעל למצב היסוד גורמת לדעיכה אקספוננציאלית של קיבול החום הסגולי בטמפרטורות הקטנות מהפער האנרגטי Δ. נראה זאת באופן מפורש.
מכיון שעירורי המערכת מתנהגים כגז אלקטרונים חופשיים האנטרופיה של המערכת נתונה ע"י

$$S = -\underset{\text{מתחשבים בשני עירורים } \gamma_0, \gamma_1 \text{ עבור } k \text{ נתון}}{2k_B}\sum_k f_k \ln f_k + (1-f_k)\ln(1-f_k) \qquad f_k = \frac{1}{e^{\beta E_k}+1}$$

ומכאן הקיבול החום הסגולי יהיה לכן

$$C = T\frac{dS}{\partial T}$$

$$= -2k_BT\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial T}\ln\left(\frac{f_k}{1-f_k}\right) = 2\sum_k E_k\frac{\partial f_k}{\partial T} \qquad (*)$$

$$= 2\int dE\, g(E)\, E\, \frac{\partial f(E)}{\partial T}$$

כשאנחנו ב $\qquad g(E) = g_0\frac{E}{\sqrt{E^2-\Delta^2}} \qquad E>\Delta$

בגבול של $T\ll\Delta(0)$ $\qquad f(E)\simeq e^{-\frac{E}{k_BT}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial T} = \frac{E}{k_BT^2}e^{-\frac{E}{k_BT}}$

כשמשווים את הסדר של E ב T רק הסדר של Δ ב T משנה עם האקספוננט $\int$ $e^{-\frac{2E}{k_BT}}$.

$\Leftarrow$ לכן $T\ll\Delta(0)$

$$C = \frac{2g_0}{k_BT^2}\int_{\Delta(0)}^{\infty} dE\,\frac{E^3}{\sqrt{E^2-\Delta^2(0)}}\,e^{-\frac{E}{k_BT}}$$

$$= \frac{2g_0}{k_BT^2}e^{-\frac{\Delta(0)}{k_BT}}\underbrace{\int_0^\infty dx\,\frac{(x+\Delta(0))^3}{\sqrt{x^2+2\Delta(0)x}}\,e^{-\frac{x}{k_BT}}}_{\xrightarrow{T\to0}\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Delta^{5/2}(0)\,(k_BT)^{1/2}} \xrightarrow{T\to0} \sqrt{2\pi}\,\frac{g_0}{k_B^{1/2}}\frac{\Delta^{5/2}(0)}{T^{3/2}}\,e^{-\frac{\Delta(0)}{k_BT}}$$

קיבלנו, כצפוי, את התלות האקספוננציאלית בטמפרטורה.

נחזור כעת לגבול החום הסגולי ליד T_c. נצטרך רק ונחזור לביטוי (*) ונשתמש את ?

$$C = 2\sum_k E_k\frac{\partial f_k}{\partial(\beta E_k)}\left(-\frac{E_k}{k_BT^2}+\frac{1}{k_BT}\frac{\partial E_k}{\partial T}\right)$$

$$= \frac{2}{T}\sum_k\left(-\frac{\partial f_k}{\partial E_k}\right)\left(E_k^2 - TE_k\frac{\partial E_k}{\partial T}\right)$$

$$= \frac{2}{T}\sum_k\left(-\frac{\partial f_k}{\partial E_k}\right)\left(E_k^2 - \frac{1}{2}T\frac{\partial\Delta^2}{\partial T}\right)$$

ליד T_c נוכל להחליף את E_k ב $|\xi_k|$ ולהשתמש בנוסחה $\frac{\partial f}{\partial|\xi|} = \frac{\partial f}{\partial\xi} = \frac{1}{4k_BT}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\xi}{2k_BT}\right)}$

נקבל

$$= -\frac{2}{T} g(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\partial f}{\partial \xi} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} T \frac{\partial \Delta^2}{\partial T} \right)$$

$$= \frac{1}{2k_B T^2} g(0) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\xi^2}{\cosh^2\left(\frac{\xi}{2k_B T}\right)} + g(0) \frac{\partial \Delta^2}{\partial T}\bigg|_{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

האיבר הראשון רציף ב T_c ומשאיר את התרומה הרגילה לקיבול החום של המערכת הנורמלית:

$$\frac{1}{2k_B T^2} g(0) \cdot \frac{4\pi^2}{3} (k_B T)^3 = \frac{2\pi^2}{3} g_0 k_B^2 \cdot T$$

האיבר השני נובע מהשפעת השתנות הפער Δ על ראות האנרגיה של ה qp ולכן אינו רציף ב T_c.
הקפיצה הנוצרת ממנו בחום הסגולי הינה

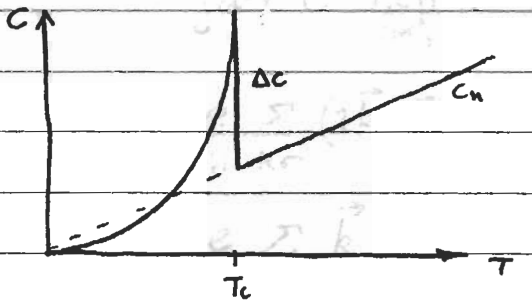
$$g_0 \frac{\partial \Delta^2}{\partial T}\bigg|_{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\partial f}{\partial \xi} = -g_0 \frac{\partial \Delta^2}{\partial T}\bigg|_{T_c}$$

$$= 9.4 \, g_0 k_B^2 T_c$$

ראינו כי ליד T_c $\Delta = 3.06 \, k_B T_c \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$ ולכן

$\Leftarrow$ הקפיצה ב C ב T_c יחסית לערכו ב $T_c + 0^+$ הינה

$$\frac{\Delta C}{C_n|_{T_c}} = \frac{9.4}{\frac{2\pi^2}{3}} = 1.43$$



נבצע כעת לסכם כיצד תופעות ההולכה האידאית של העל-מוליך מתקבלות מתאוריית BCS. נשים לב כי המצאות של פער אנרגטי לעירור מעל למצב היסוד אינו תנאי מספיק לתופעת העל-מוליכות (למעשה הוא אף אינו תנאי הכרחי!). למבודדים מסוג band insulators יש פער אנרגטי כזה אך הם

איך קשור phase rigidity המוביל למוליכות ולדיאמגנטיות מושלמות בעל-מוליך.
נוכל להבין את שתי התכונות האלו בעל מוליך אם נבחן את תגובת המערכת לשדות חשמליים ומגנטיים חיצוניים. שני סוגי השדות ניתנים לתאור על ידי וקטור פוטנציאל חיצוני

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

בנוכחות וקטור-פוטנציאל כזה האיבר הקינטי בהמילטוניאן הופך ל:

$$\int d^3r \sum_\sigma \frac{1}{2m}\psi_\sigma^+(r)\left[-i\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right]^2\psi_\sigma(r) \qquad (e>0)$$

צפיפות הזרם בקוונטיזציה שניה בנוכחות $\vec{A}$ הינה

$$\vec{J}(r) = -\frac{e}{2m}\sum_\sigma\left\{\psi_\sigma^+(r)\left(-i\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi_\sigma(r) - \left[\left(i\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)\psi_\sigma(r)\right]\cdot\psi_\sigma(r)\right\}$$

$$= \underbrace{-\frac{e^2}{mc}\sum_\sigma \hat{n}_\sigma\cdot\vec{A}}_{\text{אבר דיאמגנטי}} + \vec{J}_{para}(r)$$

כאשר

$$\vec{J}_{para}(r) = \frac{ie}{2m}\sum_\sigma\left\{\psi_\sigma^+(r)\vec{\nabla}\psi(r) - \left(\vec{\nabla}\psi_\sigma^+(r)\right)\cdot\psi_\sigma(r)\right\}$$

או במרחב Fourier

$$\vec{J}_{para}(q) = \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\,\vec{J}_{para}(r)$$

$$= \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\left(\frac{ie}{2m}\right)\frac{1}{V}\sum_\sigma\sum_{k,k'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\left(i\vec{k}'+i\vec{k}\right)C_{k\sigma}^+C_{k'\sigma}$$

$$= -\frac{e}{2m}\sum_{k\sigma}\left(2\vec{k}+\vec{q}\right)C_{k\sigma}^+C_{k+q\sigma}$$

$$= -\frac{e}{m}\sum_{k,\sigma}\vec{k}\,C_{k-\frac{q}{2}\sigma}^+C_{k+\frac{q}{2}\sigma}$$

עד סדר ראשון בA ההפרעה בהמילטוניאן ניתנת לכתיבה:

$$\delta H = -\frac{1}{c}\int d^3r\,\vec{J}_{para}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{cV}\sum_q \vec{J}_{para}(-\vec{q})\vec{A}(\vec{q})$$

$$= \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\sum_{kq\sigma}\vec{k}\cdot\vec{A}(\vec{q})\,C_{k+\frac{q}{2}\sigma}^+C_{k-\frac{q}{2}\sigma}$$

אנו מעוניינים לחשב במפורש linear response כלל משוואה עבור של צפיפות הזרם $\langle \vec{J}(q,\omega)\rangle$

בתשובה להפרעה זו.

האיבר הדיאמגנטי תורם $-\frac{ne^2}{mc}\vec{A}(q,\omega)$

כאשר $n = n_\uparrow + n_\downarrow$ הצפיפות הממוצעת.

התרומה הנוספת לאיבר הפרמגנטי תבוא מ linear response

$$\langle J_\mu^{para}(q,\omega)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\langle J_\mu^{para}(q,t)\rangle$$

$$= \sum_\nu \int dt\, e^{i\omega t}\int dt' \frac{1}{V}\sum_{q'} (-i)\theta(t-t')\left\langle\left[J_\mu^{para}(q,t), J_\nu^{para}(q',t')\right]\right\rangle\left(\frac{-1}{c}\right)A_\nu(q',t')$$

מתוך אינווריאנטיות להזזה $\langle[J(r),J(r')]\rangle$ צריך להיות תלוי רק ב $r-r'$ מכיון שכלל

לכתוב $= \frac{1}{V^2}\sum_{kk'} e^{i(kr+k'r')}\langle[J(k),J(k')]\rangle$ נקבל כי $\langle[J(k),J(k')]\rangle \propto \delta_{k,-k'}$

$$= \sum_\nu \int dt\,dt'\, e^{i\omega t}(-i)\theta(t-t')\left\langle\left[J_\mu^{para}(q,t), J_\nu^{para}(-q,t')\right]\right\rangle\left(\frac{-1}{cV}\right)A_\nu(q,t')$$

מכיון שקיימת אינווריאנטיות להזזה בזמן $\langle[J(t),J(t')]\rangle$ תהיה תלויה רק ב $t-t'$ נוכל לכתוב

$$= \sum_\nu \int d(t-t')\, e^{i\omega(t-t')}(-i)\theta(t-t')\left\langle\left[J_\mu^{para}(q,t), J_\nu^{para}(-q,t')\right]\right\rangle$$

$$\times \int dt'\left(\frac{-1}{cV}\right)e^{i\omega t'}A_\nu(q,t')$$

$$= -\frac{1}{c}\sum_\nu K_{\mu\nu}(q,\omega)A_\nu(q,\omega)$$

כאשר $K_{\mu\nu}(q,\omega) = \frac{-i}{V}\int d(t-t')\, e^{i\omega(t-t')}\theta(t-t')\left\langle\left[J_\mu^{para}(q,t), J_\nu^{para}(-q,t')\right]\right\rangle$

מכיון ש $\vec{E}(r,t) = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}(r,t)$ נקבל (בחרנו בכיול שבו ϕ מתאפס) $\vec{A}(q,\omega) = \frac{-ic}{\omega}\vec{E}(q,\omega)$

ונקבל ביטוי למוליכות AC :

$$\langle j_\mu(q,\omega)\rangle = \sum_\nu \sigma_{\mu\nu}(q,\omega)\, E_\nu(q,\omega)$$

כאשר

$$\sigma_{\mu\nu}(q,\omega) = \frac{i}{\omega}\left[\frac{ne^2}{m}\delta_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}(q,\omega)\right]$$

האיבר הראשון מתאר את התגובה הדיאמגנטית של המערכת. מכיוון שהוא דמיוני הוא מתאים לתגובות השראתיות (inductive): המערכת מגיבה לשדה בזמן המתאים את השדה החיצוני.

במתכות נורמליות האיבר הפרמגנטי: עם $K_{\mu\nu}$ מבטל בדיוק את התרומה של האיבר הדיאמגנטי ב-$\omega=0$ ואין משהו חלק מדומה ל-σ בגבול $q,\omega=0$. המוליכות במערכת נורמלית היא לכן purely dissipative בגבול זה. כפי שנראה המצב אינו כזה בעל-מוליך.

לעומת זאת נראה כי זהו המצב, כלומר שבגבול $q=0,\ \omega\to 0$ (הסדר הנכון בו יש לקחת את הגבולות לחישוב ה DC conductivity) נקבל $\sigma \to \frac{i}{\omega}\frac{c^2}{4\pi\lambda^2}$

הסיבה לסימון זה ולמשמעות האורך λ תתבהר בהמשך.

תחת הנחה זו נקבל

$$\vec{J} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\vec{A}$$

משוואה זו קרויה לפעמים משוואת לונדון London's equation ואנו נפתור אותה יחד עם משוואת מקסוול

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\Leftarrow\quad -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

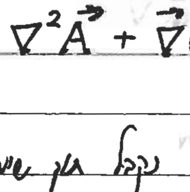
אם מתעניינים במקרה שאינו תלוי בזמן ועובדים ב transverse gauge ולכן נקבל תוך שימוש במשוואת לונדון

בתוך העל-מוליך:

$$\nabla^2\vec{A} = \lambda^{-2}\vec{A}$$

נבחן בגבול בין על מוליך לואקום המצוי במישור xy ושדה מגנטי בכיוון y.

העל-מוליך ממלא את חצי המרחב עם $z>0$! $\vec{B} = B\hat{y}$ עבור $z<0$



קל לראות כי הפתרון הינו מפורש:

$$A_x = \begin{cases} B(z-\lambda) & : z<0 \\ -\lambda B e^{-\frac{z}{\lambda}} & : z>0 \end{cases} \Rightarrow J_x = \begin{cases} 0 & : z<0 \\ \frac{c}{4\pi\lambda} B e^{-\frac{z}{\lambda}} & : z>0 \end{cases}$$

$$B_y = \begin{cases} B & : z<0 \\ B e^{-\frac{z}{\lambda}} & : z>0 \end{cases} \Leftarrow$$

אנו מוצאים לכן כי המערכת מייצרת זרמים בכיוון x היוצרים שדה מגנטי המבטל את השדה החיצוני בתוך העל-מוליך במרחקים הגדולים מ λ : ה penetration depth. זהו בדיוק אפקט Meissner הנובע רק מההנחה ש $J \propto A$. נחשב כעת את λ מתורת BCS.

תוצאה מלאה של המוליכות בהתאם לגישה שקיבלנו לפי נוסחת Kubo ניתן לקבל בעזרת הטכניקות אותן למדנו עד כאן בתורת הקוונטים. יחד עם זאת החישוב עבור $q=0$ ניתן לביצוע ללא שימוש בטכניקות אלו ואציג לכם אותו כעת.

כפי שראינו ההפרעה בהמילטוניאן עד סדר ראשון ב A היתה במקרה $\vec{q}=0$

$$\delta H = \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\sum_{k\sigma} \vec{k}\vec{A}(0)\, C^{+}_{k,\sigma} C_{k\sigma}$$

$$= \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\sum_{k} \vec{k}\vec{A}(0)\left(C^{+}_{k\uparrow}C_{k\uparrow} - C^{+}_{-k\downarrow}C_{-k\downarrow}\right)$$

$$= \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\sum_{k} \vec{k}\vec{A}(0)\Big[|u_k|^2\gamma^{+}_{k0}\gamma_{k0} + |v_k|^2\gamma_{k1}\gamma^{+}_{k1} + u_k v_k \gamma^{+}_{k0}\gamma^{+}_{k1} + u^{*}_k v^{*}_k \gamma_{k1}\gamma_{k0}$$
$$- |v_k|^2\gamma_{k0}\gamma^{+}_{k0} - |u_k|^2\gamma^{+}_{k1}\gamma_{k1} + u^{*}_k v^{*}_k\gamma_{k0}\gamma_{k1} + u_k v_k\gamma^{+}_{k1}\gamma^{+}_{k0}\Big]$$

$$= \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\sum_{k} \vec{k}\cdot\vec{A}(0)\left[\gamma^{+}_{k0}\gamma_{k0} - \gamma^{+}_{k1}\gamma_{k1}\right]$$

כשהשתמשנו בביטוי ל C במונחי ה γ, ביחסי האנטי-קומוטציה של ה γ ו $|u_k|^2+|v_k|^2=1$

אם נשווה הפרעה זו להמילטוניאן שקיבלנו במקרה $A=0$ נגלה כי ההמילטוניאן עדיין מלוכסן בזוגות γ_{k0} ו γ_{k1} עם אנרגיות חדשות

$$E_{k0} \to E_k + \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\vec{k}\cdot\vec{A}(0)$$

$$E_{k1} \to E_k - \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\vec{k}\cdot\vec{A}(0)$$

חישוב כמה עבור ערך התצפית של $\langle J^{para}(q=0)\rangle$ נותן

$$\langle \vec{J}_{para}(0)\rangle = -\frac{e}{m}\sum_k \vec{k}\langle \gamma^+_{k0}\gamma_{k0} - \gamma^+_{k1}\gamma_{k1}\rangle$$

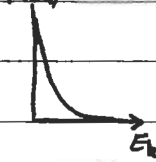
$$= -\frac{e}{m}\sum_k \vec{k}\left[f(E_{k0}) - f(E_{k1})\right]$$

אנו מעוניינים ב linear response (בגבול בו $A\to 0$) ולכן נפתח בטור זה עד לסדר ראשון ב A

$$= -\frac{e}{m}\sum_k \vec{k}\left[f(E_k) + \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\vec{k}\cdot\vec{A}\,\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k} - f(E_k) + \frac{1}{V}\frac{e}{mc}\vec{k}\cdot\vec{A}\,\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right]$$

$$= \frac{2e^2}{m^2c}\frac{1}{V}\sum_k \left(\vec{k}\cdot\vec{A}(0)\right)\vec{k}\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{2e^2}{m^2c}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\left(\vec{k}\cdot\vec{A}(0)\right)\vec{k}\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right)$$



נשים לב כי $f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta E_k}+1}$ נופלת אקספוננציאלית עם E_k ולכן עם k

לכן התרומה העיקרית לאינטגרל תבוא מ E_k קטנים כלומר ⇐ ערכי k הקרובים ל k_F

בגלל זה לכן: $\int d^3k \to \int dk\, d\varphi\, d\cos\theta \cdot k_F^2$ ונקרב גם את גודלו של ה k המופיע באינטגרנד להיות k_F.

נשתמש ב $\int d\varphi\, d(\cos\theta)\,\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu = \frac{4\pi}{3}\delta_{\mu\nu}$ ולבסוף נעבור לאינטגרציה על ξ_k ע"י

$$\frac{k_F}{m}k\,dk = d\xi_k \Rightarrow k_F\,dk = m\,d\xi_k \quad (k=1)$$

$$= \frac{2e^2}{m^2c}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\vec{A}(0)\,m\,\underbrace{k_F^3}_{(2\pi)^3\frac{3}{8\pi}\cdot n}\int d\xi_k\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right) = \frac{ne^2}{mc}\int d\xi_k\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right)$$

אם נוסיף לכך את תרומת האבר הדיאמגנטי נקבל

$$\langle \vec{J}(0,0)\rangle = -\frac{ne^2}{mc}\left[1-\int d\xi_k\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right)\right]\vec{A}(0,0)$$

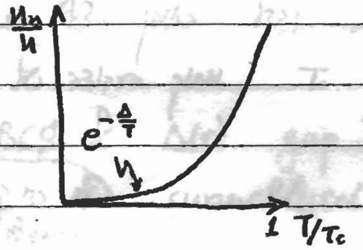
$$\equiv -\frac{n_s(T)e^2}{mc}\vec{A}(0,0)$$

כשהגדרנו את ה superfluid density להיות $n_s(T)\equiv n-n_n(T)$ כאשר ה normal fluid density היא

$$n_n(T) = n\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_k\left(-\frac{\partial f(E_k)}{\partial E_k}\right)$$

שימו לב כי ב $T=0$ $n_s=n$ ו $n_n=0$ ואילו ב T_c $n_s=0$ ו $n_n=n$.

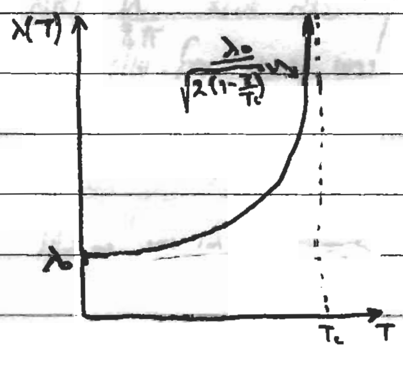
(הפונקציה $\frac{n_n}{n}\left(\frac{T}{T_c}\right)$ נקראת לפעמים ה Yoshida function)



צורי? ההבדלה של BCS לגלות הצד הדיאמגנטי של זוג מלא כמורכב משני חלקים: הנוזל הנורמלי המורכב מחלקיקי Bogolubov המעוררים תרמית ונוזל-העל שהוא ה Cooper pair condensate. התורה גם מסבירה לנו להבין מתי תאור כמותי זה נשבר: לחלוטין כאשר במרחק את המערכת בתדירויות שגבוהות מספיק $\Delta\sim\omega$ ובכך הנוזל הנורמלי והנוזל-העל אינם ניתנים להבחנה יותר זה מזה.

מתוך הביטוי שקיבלנו אנו מוצאים עוד את ערכו של ה penetration depth:

$$\lambda(T) = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s(T)e^2}\right)^{1/2}$$



בטמפרטורה נמוכה יחסית לגם מספר קטן אקספוננציאלי של q.p מעוררים מחוץ ל condensate. הללו מקטינים את צפיפות-הזרם supercurrent הנישא על ידי ה condensate ומאפשרים את חדירת החיצוני.
כתוצאה מכך השדה החיצוני חודר לתוך הדגימה מעט יותר: $\lambda(T)-\lambda(0)$ גדל אקספוננציאלית בטמפרטורה נמוכה. קרוב ל T_c λ מתבדר כפי שמצופה מכיון שבמצב הנורמלי השדה חודר לדוגמא השלמה.