מצב מעובה ב' – תרגיל 2

1. vortices בעל-נוזל

א. הראו כי למשוואות אוילר-לגרנג' של נוזל Bose עם אינטראקציות קצרות טווח יש פתרון מהצורה $\phi(r,\theta,z)=e^{in\theta}f(r/r_0)$ כאשר $n\neq 0$ שלם ו $\vec{r}=(r,\theta,z)$. r_0 הינו אורך אופייני של הבעיה. מהו? מצאו את ההתנהגות האסימפטוטית של $f(r)$ עבור r גדול וקטן.

ב. חשבו את צפיפות הזרם שנושא פתרון זה והראו כי הוא מתאר מערבולת (vortex) סביב הראשית. חשבו את הסירקולציה סביב הראשית.

ג. הניחו כי הנוזל נמצא בגליל ברדיוס R וחשבו את התרומה העיקרית לאנרגיה של הקונפיגורציה בגבול של R גדול. עבור איזה n אנרגיה זו הקטנה ביותר?

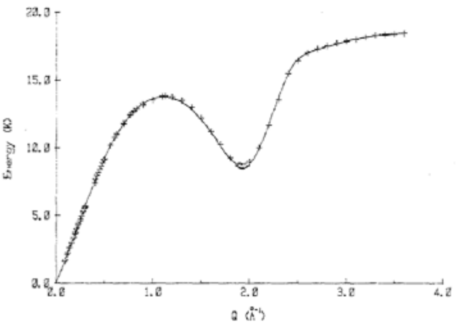
ד. נוכל להעריך את האנטרופיה שמלווה פתרון מסוג זה אם נחלק את שטח חתך הגליל לתאים בשטח r_0^2 ונניח כי ליבת ה vortex יכולה להימצא בכל אחד מהם. באיזו טמפרטורה האנרגיה החופשית של הפתרון הופכת לשלילית ולכן ממנה והלאה vortices מופיעים באופן ספונטני במערכת?

2. יחס פיינמן

א. חשבו את פונקציית הקורלציה של הצפיפות $S(k)=\frac{V}{N}\left\langle\delta\rho(\vec{k},\tau)\,\delta\rho(-\vec{k},\tau)\right\rangle$ בנוזל Bose עם אינטראקציות קצרות טווח במצב העל-נוזל.

ב. הראו כי ב $T=0$ ספקטרום העירורים של הנוזל מקיים את יחס פיינמן $\varepsilon(k)=\frac{k^2}{2mS(k)}$.

יחס זה מראה כי הקורלציות ארוכות הטווח ($S(k)\propto k$ עבור k קטנים) בצפיפות הבוסונים מוליכות לדיספרסיה האקוסטית ב k קטנים. מסתבר כי שימוש ביחס זה עם פונקציית הקורלציה הניסיונית (הנמדדת בעזרת פיזור ניוטרונים) מוליך למינימום ביחס הדיספרסיה עבור $k\sim 1/a$, כאשר a המרחק הממוצע בין הבוסונים. מינימום זה נובע מערורים הנקראים רוטונים (rotons).



3. נפתח את השדה הבוסוני סביב קונפיגורציית המינימום $\phi_0=\sqrt{\frac{\mu}{g}}$: $\phi(\vec{r})=\phi_0+\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\varphi_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

א. רשמו ביטוי לפעולה של הנוזל עד לסדר שני ב $\varphi_{\vec{k}}$ ו $\varphi^*_{\vec{k}}$ והראו כי במונחי וקטור השורה $(\varphi^*_{\vec{k}},\varphi_{-\vec{k}})$ ווקטור העמודה הצמוד לו היא ניתנת לכתיבה כסכום על $\vec{k}$ של אברים בלתי תלויים.

ב. חשבו בעזרת הפעולה בסעיף א' את פונקציית גרין של השדה : $G(\vec{r},\tau)=-\left\langle T_\tau\phi(\vec{r},\tau)\phi^\dagger(0,0)\right\rangle$.

הראו שהקטבים של $G(\vec{k},i\omega_n)=\int d^3r\int_0^\beta d\tau\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n\tau)}G(\vec{r},\tau)$ נמצאים באנרגיות העירור שקבלנו בכיתה.