מצב מעובה ב' – תרגיל 1

1. אינטגרלים גאוסיים מרוכבים במימד גדול מאחד

א. הראו כי עבור n משתנים מרוכבים z_i, n פרמטרים מרוכבים J_i ומטריצה $n\times n$ הרמיטית H מתקיים:

$$Z \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{dz_j^* dz_j}{2\pi i}e^{-\sum_{i,j}z_i^* H_{ij} z_j + \sum_i (J_i^* z_i + z_i^* J_i)} = (\det H)^{-1} e^{\sum_{i,j} J_i^* (H^{-1})_{ij} J_j}$$

הדרכה: עברו למשתנים חדשים בהם האקספוננט באינטגרל הינו ריבועי (ללא אברים לינאריים) ואז בצעו מעבר נוסף למשתנים המלכסנים תבנית ריבועית זו.

ב. הראו כי
$$\left\langle z_m z_n^* \right\rangle \equiv \frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{dz_j^* dz_j}{2\pi i} z_m z_n^* e^{-\sum_{i,j} z_i^* H_{ij} z_j} = H_{mn}^{-1}$$

ג. הוכיחו את משפט Wick:

$$\left\langle z_{i_1} z_{i_2}\cdots z_{i_N} z_{j_1}^* z_{j_2}^* \cdots z_{j_N}^* \right\rangle = \sum_P H^{-1}_{i_1 j_{P(1)}}\cdots H^{-1}_{i_N j_{P(N)}} = \sum_P \left\langle z_{i_1} z^*_{j_{P(1)}}\right\rangle \cdots \left\langle z_{i_N} z^*_{j_{P(N)}}\right\rangle$$

כאשר $\sum_P$ הינו הסכום על כל התמורות (פרמוטציות) של השלמים $1,2,\cdots,N$.

2. משתנים גרסמניים (Grassmann variables) ומצבים קוהרנטיים פרמיוניים

אלגברה (Algebra) מעל שדה הינה מרחב וקטורי בו מוגדרת פעולת כפל בילינארית. נגדיר את האלגברה הגרסמנית $\mathcal{A}$ מעל שדה המרוכבים:

א. קומבינציה לינארית של אברים η_i ב $\mathcal{A}$ עם מקדמים מרוכבים: $c_0 + \sum_i c_i\eta_i$ היא אבר ב $\mathcal{A}$.

ב. המכפלה $\eta_i\eta_j$ שייכת ל $\mathcal{A}$. פעולת הכפל אסוציאטיבית ואנטי-חילופית: $\eta_i\eta_j = -\eta_j\eta_i$ (ולכן $\eta_i^2 = 0$).

כתוצאה מכך, $\mathcal{A}$ נפרשת על ידי כל הקומבינציות הלינאריות:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1\cdots i_n} c_{i_1,\cdots,i_n}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_n} \qquad c_{i_1,\cdots,i_n}\in\mathbb{C}$$

אופרטור הנגזרת ביחס למשתנה גרסמני מוגדר בעזרת $\partial_{\eta_i}\eta_j = \delta_{ij}$ ומקיים אנטי-חילופיות עם גרסמנים אחרים: $\partial_{\eta_i}\eta_j\eta_i = -\eta_j$.

אינטגרציה ביחס למשתנה גרסמני מוגדרת על ידי: $\int d\eta_i\,\eta_i = 1$, $\int d\eta_i = 0,$ (האם יש צורך באינטגרלים נוספים?) וגם היא אנטי-חילופית: $\int d\eta_i d\eta_j\,\eta_i\eta_j = -\int d\eta_i d\eta_j\,\eta_j\eta_i = -1$

פונקציות גרסמניות מוגדרות על ידי פיתוח טילור שלהן :

$$f(\eta_1,\cdots,\eta_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1\cdots i_n=1}^{k}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial\eta_{i_1}\cdots\partial\eta_{i_n}}\bigg|_{\eta=0}\eta_{i_n}\cdots\eta_{i_1}$$

(מהו הסדר הגבוה ביותר המופיע בפיתוח לפונקציה של k גרסמנים?)

לבסוף, לצורך בניית המצבים הקוהרנטיים הפרמיוניים עלינו להצהיר על יחסי אנטי-חילוף בין המשתנים הגרסמניים והאופרטורים הפועלים עליהם לבין האופרטורים הפרמיוניים :

$$\{\eta_i,a_j\}=0,\quad \{\eta_i,a_j^\dagger\}=0,\quad \{\partial_{\eta_i},a_j\}=0,\quad \{\partial_{\eta_i},a_j^\dagger\}=0,\quad \{\int d\eta_i,a_j\}=0,\quad \{\int d\eta_i,a_j^\dagger\}=0$$

הראו כי בהינתן אלגברה גרסמנית עם משתנים ψ_i :

א. $|\psi\rangle=\exp\left(-\sum_i\psi_i a_i^\dagger\right)|0\rangle$ הינו מצב קוהרנטי המקיים $a_i|\psi\rangle=\psi_i|\psi\rangle$ ו $a_i^\dagger|\psi\rangle=-\partial_{\psi_i}|\psi\rangle$.

ב. המצב הקוהרנטי הצמוד $\langle\psi|=\langle 0|\exp\left(-\sum_i a_i\bar{\psi}_i\right)=\langle 0|\exp\left(\sum_i\bar{\psi}_i a_i\right)$ מקיים $\langle\psi|a_i=\partial_{\bar{\psi}_i}\langle\psi|$ ו $\langle\psi|a_i^\dagger=\langle\psi|\bar{\psi}_i$. שימו לב כי בניגוד למצבים הקוהרנטיים הבוסוניים $\bar{\psi}_i$ אינם קשורים על ידי פעולת הצמדה כלשהיא (שאינה מוגדרת כאן כלל) ל ψ_i, אלא מהווים קבוצה בלתי תלויה של משתנים גרסמניים.

ג. החפיפה בין מצבים קוהרנטיים נתונה על ידי : $\langle\psi|\psi'\rangle=\exp\left(\sum_i\bar{\psi}_i\psi'_i\right)$

ד. היחידה ניתנת לרישום כ $I=\int\prod_i d\bar{\psi}_i d\psi_i\, e^{-\sum_i\bar{\psi}_i\psi_i}|\psi\rangle\langle\psi|$

3. אינטגרלים גאוסיים גרסמניים במימד גדול מאחד

א. הראו כי עבור $2n$ גרסמנים ψ_i ו $\bar{\psi}_i$, $2n$ גרסמנים λ_i ו $\bar{\lambda}_i$ ומטריצה $n\times n$ הרמיטית H מתקיים :

$$Z\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}d\bar{\psi}_j d\psi_j\, e^{-\sum_{i,j}\bar{\psi}_i H_{ij}\psi_j+\sum_i(\bar{\lambda}_i\psi_i+\bar{\psi}_i\lambda_i)}=\det H\, e^{\sum_{i,j}\bar{\lambda}_i(H^{-1})_{ij}\lambda_i}$$

ב. הראו כי $\langle\psi_m\bar{\psi}_n\rangle\equiv\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}d\bar{\psi}_j d\psi_j\, e^{-\sum_{i,j}\bar{\psi}_i H_{ij}\psi_j}\psi_m\bar{\psi}_n=H_{mn}^{-1}$

ג. הוכיחו את משפט Wick למקרה הפרמיוני :

$$\left\langle\psi_{i_1}\psi_{i_2}\cdots\psi_{i_N}\bar{\psi}_{j_1}\bar{\psi}_{j_2}\cdots\bar{\psi}_{j_N}\right\rangle=\sum_P\text{sgn}(P)H^{-1}_{i_1 j_{P(1)}}\cdots H^{-1}_{i_N j_{P(N)}}=\sum_P\text{sgn}(P)\left\langle\psi_{i_1}\bar{\psi}_{j_{P(1)}}\right\rangle\cdots\left\langle\psi_{i_N}\bar{\psi}_{j_{P(N)}}\right\rangle$$

כאשר $\sum_P$ הינו הסכום על כל התמורות של השלמים $1,2,\cdots,N$ ו $\text{sgn}(P)$ הינו סימן התמורה כלומר 1- בחזקת מספר החילופים בתמורה.

4. אינטגרלי מסלול פרמיוניים

א. הראו כי פונקצית החלוקה במקרה הפרמיוני ניתנת לכתיבה כ $Z=\int D\bar{\psi}D\psi e^{-S[\bar{\psi},\psi]}$

כאשר $D\bar{\psi}D\psi=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\prod_{i}d\bar{\psi}_i^n d\psi_i^n$

$$S=\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\sum_i\left[\left(\frac{\bar{\psi}_i^n-\bar{\psi}_i^{n+1}}{\varepsilon}\right)\psi_i^n+(H-\mu N)(\bar{\psi}^{n+1},\psi^n)\right]$$

$\varepsilon=\frac{\beta}{N}$ ותנאי השפה $\bar{\psi}_i^N=-\bar{\psi}_i^0,\ \psi_i^N=-\psi_i^0$. שימו לב (הראו זאת) שעבור מצב $\left|n\right\rangle$ בהצגת מספרי האכלוס מתקיים $\left\langle n|\psi\right\rangle\left\langle\psi|n\right\rangle=\left\langle-\psi|n\right\rangle\left\langle n|\psi\right\rangle$, כאשר $\left\langle-\psi\right|=\left\langle 0\right|\exp\left(-\sum_i\bar{\psi}_i a_i\right)$.

ב. חשבו את פונקציית החלוקה של גז פרמיונים חופשיים.