פורמליזם ה path-integral עבור מערכת ספין.

נתבונן בספין $S=\frac{1}{2}$ יחיד. במקרה זה מצב כללי ניתן להרשם כקומבינציה הלינארית

$$|\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$$

כאשר α ו-β מרוכבים ומקיימים את תנאי הנורמליזציה $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$

למערכת, כתוצאה מכך, שלוש דרגות חופש ממשיות. תאור אקוויולנטי של המצב הכללי ניתן להעשות על ידי שלושת המשתנים b,θ,φ:

$$|\psi\rangle = |b,\theta,\varphi\rangle = e^{ib}\left[e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right]$$

כאשר e^{ib} היא פאזה כללית ולכן אינה משפיעה על הפיזיקה של הבעיה. בפרט b מבטאת את החופש הכולל שיש בידינו. אם ניקח את b נראה כי המצבים $|b,\theta,\varphi\rangle$ מהווים סט שלם:

$$\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}|b,\theta,\varphi\rangle\langle b,\theta,\varphi|$$

$$=\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\left[e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\right]\left[e^{i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + e^{-i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\langle\downarrow|\right]$$

$$=\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\left[\cos^2\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sin^2\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right] = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

בנוסף ערך התצפית של אופרטור הספין $\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\sigma}$ כאשר $\vec{\sigma}$ הן מטריצות פאולי הינו

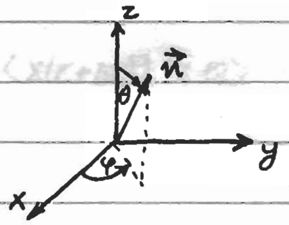
$$\langle b,\theta,\varphi|\vec{S}|b,\theta,\varphi\rangle = \frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\langle\uparrow| + e^{-i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\langle\downarrow|\right]\times$$

$$\Big\{e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle$$

$$,\ ie^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle - ie^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle$$

$$,\ e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle - e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \sin\theta\cos\varphi\ ,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta \right\} = \frac{1}{2}\vec{n} = s\vec{n}$$



כאשר $\vec{n}$ הינו וקטור היחידה המוגדר על ידי הזויות θ ו-φ.

למרות ש $|b,\theta,\varphi\rangle$ מהווים סט שלם, מצבים עם θ,φ שונים אינם אורתוגונליים זה לזה. כפי שנראה כעת, תכונה זו גוררת קיומה של פאזה לא טריויאלית בניסוח אינטגרל המסלול של הבעיה. כרגיל בחישוב אינטגרל המסלול עבור פונקצית החלוקה אנו מחלקים את הקטע $\tau\in[0,\beta]$ למספר גדול - N של קטעים קטנים ומכניסים את אופרטור היחידה בין כל שני קטעים:

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{ e^{-\beta H} \right\} = \prod_{i=1}^{N} \int_0^{\pi} d\theta_i \sin\theta_i \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_i}{2\pi}\ \langle b_N \theta_N \varphi_N | e^{-\Delta\tau H} | b_{N-1}\theta_{N-1}\varphi_{N-1}\rangle \cdots$$

$$\cdots \langle b_2\theta_2\varphi_2 | e^{-\Delta\tau H} | b_1\theta_1\varphi_1\rangle \langle b_1\theta_1\varphi_1 | e^{-\Delta\tau H} | b_0\theta_0\varphi_0\rangle$$

כאשר $\beta = N\Delta\tau$ ו- $|b_N\theta_N\varphi_N\rangle = |b_0\theta_0\varphi_0\rangle$

$$\langle \tau+\Delta\tau | e^{-\Delta\tau H} | \tau\rangle \simeq \langle \tau+\Delta\tau | (1-\Delta\tau H) | \tau\rangle$$

$$= \langle \tau+\Delta\tau | \tau\rangle - \Delta\tau \langle \tau+\Delta\tau | H | \tau\rangle$$

$$\simeq \left[\langle\tau| + \Delta\tau \frac{d}{d\tau}\langle\tau| \right] \left[|\tau\rangle - \Delta\tau H|\tau\rangle \right]$$

$$\simeq 1 + \Delta\tau \left[\langle\dot{\tau}|\tau\rangle - \langle\tau|H|\tau\rangle \right]$$

$$\simeq e^{\Delta\tau\left[\langle\dot{\tau}|\tau\rangle - \langle\tau|H|\tau\rangle\right]}$$

מכיון ש $0 = \frac{d}{d\tau}\langle\tau|\tau\rangle = \langle\dot{\tau}|\tau\rangle + \langle\tau|\dot{\tau}\rangle = 2\,\mathrm{Re}\,\langle\dot{\tau}|\tau\rangle$

האיבר הראשון באקספוננט מדומה ומוביל לאותה פאזה, הנובעת מחפיפה בין פונקצית הגל בזמנים קרובים: "connection".

עבור חלקיק חופשי ראינו כיצד נראה החלק הסימפלקטי בפעולה:

$$\langle x(\tau+\Delta\tau)|x(\tau)\rangle = \int dp(\tau)\, \langle x(\tau+\Delta\tau)|p(\tau)\rangle\langle p(\tau)|x(\tau)\rangle$$

$$= \int \frac{dp(\tau)}{2\pi\hbar}\, e^{ip(\tau)\left[x(\tau+\Delta\tau)-x(\tau)\right]} = \int \frac{dp(\tau)}{2\pi\hbar}\, e^{i\Delta\tau\cdot p(\tau)\dot{x}(\tau)}$$

עבור המקרה שלנו

$$\frac{d}{d\tau}|\tau\rangle = i\dot{b}|\tau\rangle + e^{ib}\left\{\left[-i\frac{\dot\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\dot\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right]e^{-i\frac{\varphi}{2}}|\uparrow\rangle + \left[i\frac{\dot\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\dot\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]e^{i\frac{\varphi}{2}}|\downarrow\rangle\right\}$$

ולכן

$$\langle\dot\tau|\tau\rangle = -\langle\tau|\dot\tau\rangle$$

$$= -\left\{i\dot{b} + \cos\frac{\theta}{2}\left[-i\frac{\dot\varphi}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\dot\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right] + \sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{i\dot\varphi}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{\dot\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]\right\}$$

$$= -i\left(\dot{b} - \frac{1}{2}\dot\varphi\cos\theta\right)$$

נשתמש כאן בחופש הכיול שקיים כדי לבחור את b באופן נוח. כדי לקיים את תנאי המחזוריות $\vec{n}(\beta)=\vec{n}(0)$ הנובע מה Trace בהגדרת פונקציית החלוקה עלינו לדרוש $|\theta(\beta)\varphi(\beta)\rangle = |\theta(0)\varphi(0)\rangle$. עקב הפקטור $e^{\pm i\frac{\varphi}{2}}$ בפונקציית הגל הוא משנה סימן כאשר $\varphi\to\varphi+2\pi$ בעוד שערכי התצפית של ξ על המצב אינם רגישים לשינוי זה. כדי להתגבר מבעיה זו ולקבל אותו מצב כאשר $\varphi\to\varphi+2\pi$ נבחר $b=\pm\frac{\varphi}{2}$ כך ש $e^{\pm i\frac{\varphi}{2}}$ הופך ל 1 או $e^{\pm i\varphi}$.

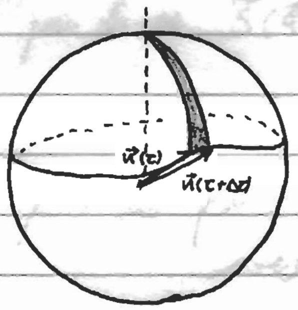
נבחר $b=\frac{\varphi}{2}$ ונשתמש ב $\langle b\theta\varphi|\vec{S}|b\theta\varphi\rangle = S\vec{n}$ לקבל שהפעולה המגדירה את אינטגרל המסלול נתונה ע"י

$$\int_0^\beta d\tau\left[-\langle\dot\tau|\tau\rangle + \langle\tau|H|\tau\rangle\right]$$

$$= iS\int_0^\beta d\tau\,(1-\cos\theta)\dot\varphi + \int_0^\beta d\tau\, H(S\vec{n}(\tau))$$

ניתן להראות כי התוצאה זו נכונה לספין כללי ואינה מצטמצמת ל $S=1/2$.

האבר הראשון הינו ה Berry phase וניתן לשייך לו את המשמעות הגאומטרית הבאה:



הזווית המרחבית הנפרשת בין הוקטורים $\vec n(\tau)$, $\vec n(\tau+\Delta\tau)$ ו $\hat z$ נתונה על ידי

$$\Delta\varphi \cdot \int_0^\theta d\theta' \sin\theta' = \Delta\tau \cdot \dot\varphi (1-\cos\theta)$$

ולכן ה Berry phase היא הזווית המרחבית הנפרשת על ידי הוקטור $\vec n$ במסלולו הסגור על ספירת היחידה: ω כפול הסקלר iS : $iS\omega$
הזווית המרחבית מוגדרת מודולו 4π (היינו צריכים להגדיר גם ביחס לוקטור $-\hat z$) אך מכיוון ש $2S$ הינו שלם $e^{iS\cdot 4\pi}=e^{i2S\cdot 2\pi}=1$ ולכן הבחירה המסוימת שעשינו אינה משפיעה על התוצאה. ניתן גם להבין תוצאה זו ולומר שאם נדרוש שהקוונטיזציה תהיה אינווריאנטית המסלול לא תהא רגישה לבחירה זו (את התוצאה המשלימה היינו מקבלים אם היינו מודדים את θ כזווית עם ציר z השלילי) הספין S חייב להיות שלם או חצי שלם.

נשתמש כעת בפורמליזם שפיתחנו בכדי להגיע לתורת שדה אפקטיבית לאנטיפרומגנטים קוונטים.
נרצה תחילה כדי לקבל "גרסת תלות המשתנה לפי" של מערכת המתוארת על ידי ההמילטוניאן

$$H = J\sum_{\langle ij\rangle} \vec S_i \cdot \vec S_j$$

כאשר $J>0$ ואנו על שריג קובי ב d ממדים עם קבוע שריג a.

כפי שראינו פונקציית החלוקה נתונה על ידי

$$Z = \prod_i \int D S_i(\tau)\, e^{-A}$$

עם הפעולה

$$A = iS\sum_i \int_0^\beta d\tau\, d\omega\left[\frac{\vec S_i(\tau)}{S}\right] + \int_0^\beta d\tau \cdot J\sum_{\langle ij\rangle} \vec S_i(\tau)\, \vec S_j(\tau)$$

כאשר $\vec S_i(\tau)$ הינם וקטורים קלאסיים באורך S הנעים על אתרי השריג ומשתנים בזמן בקטע $\tau\in[0,\beta]$ כך ש $\vec S_i(0)=\vec S_i(\beta)$. $d\omega$ הינו אלמנט הזווית המרחבית הנפרש על ידי הוקטור $\vec S$ בזמן $d\tau$ כפי שראינו לעיל.

בכוונתנו לבנות מהמודל המצוין הנ"ל תורה אפקטיבית לאנרגיות נמוכות ואורכי גל ארוכים אנו מודרכים על ידי שתי התצפיות הבאות:

הראשונה נובעת מחוק שימור. במקרה הנוכחי הספין הכולל $\vec{S}_{tot} = \sum_i \vec{S}_i$ מתחלף עם ההמילטוניאן ולכן הוא גודל נשמר שאינו תלוי בזמן. כלומר, אחרי טרנספורם פורייה, $\vec{S}(\vec{q}=0)$ אינו תלוי בזמן ואנו מצפים כי עבור $\vec{q}$ קטן $|\vec{q}| \ll \frac{\pi}{a}$ $\vec{S}(\vec{q})$ ישתנה בזמן לאט.

הקבוצה השניה נובעת משבירת סימטריה או Goldstone mode הקשור אליה. מכיון שאנו בוחנים את המקרה האנטי-פרומגנטי אנו מצפים כי אם סימטרית הסיבוב של הספין נשברת

$$\langle \vec{S}_i \rangle = (-1)^i \vec{M} = e^{i\vec{Q}\vec{R}_i} \vec{M}$$

כאשר $\vec{Q}$ הוא הוקטור עם $\frac{\pi}{a}$ עבור כל רכיביו. $\vec{R}_i$ הוא וקטור המקום של האתר ה-i ו-$\vec{M}$ הוא פרמטר הסדר הסופי המתאר את שבירת הסימטריה. שינוי אחיד בכיוון של $\vec{M}$ בכל השריג משמר את האנרגיה ללא שינוי. שינוי מרחבי עם אורך גל גדול של $\vec{M}$ עולה מעט מאוד אנרגיה נוספת (Goldstone mode). אנו מצפים לכן כי בנוכחות סימטריה שבורה גם $\vec{S}(\vec{q})$ עבור $\vec{q}$ קרוב ל-$\vec{Q}$ ישתנה לאט בזמן $|\vec{q}-\vec{Q}| \ll \frac{\pi}{a}$. גם בהעדר שבירה אמיתית של הסימטריה אם בתחום שאורך הקורלציה ארוך מספיק מסקנה זו תישאר תקפה.

כתוצאה מהדיון הנ"ל נרשום את $\vec{S}$ כסכום שני רכיבים המשתנים לאט ליד $\vec{q}=0$: $\vec{L}(\vec{R}_i)$ וליד $\vec{q}=\vec{Q}$ $\vec{n}(\vec{R}_i)$

$$\vec{S}_i(\tau) = (-1)^i S \vec{n}(\vec{R}_i,\tau) + a \vec{L}(\vec{R}_i,\tau)$$

כאן $\vec{n}$ הוא וקטור יחידה וכדי לשמור על תנאי הנרמול $|\vec{S}_i|^2 = S^2$ עד סדר a^2 נדרוש $\vec{n}(\vec{R}_i)\cdot\vec{L}(\vec{R}_i)=0$. הסיבה לפקטור a לפני $\vec{L}$ בביטוי הנ"ל נובעת מהעובדה שעבור סדר אנטי-פרומגנטי מושלם (למשל $\vec{n}=\hat{z}$) אין מגנטיזציה (עם $\vec{q}=0$) בכלל. ורק רעידות במקום של $\vec{n}$ מובילות למגנטיזציה לוקלית. כלומר $\langle S(\vec{q}=0)\rangle \sim n_i - n_{i+1}$ וכדי להגיע לגבול הרציף אנו מצפים $L_i \sim \frac{n_i - n_{i+1}}{a}$ כך ש- $n_i - n_{i+1} \sim a L_i$.

נשתמש בביטוי הנ"ל כדי לחשב את H עד סדר שני ב-a: זהו למעשה התפתחות gradient expansion

$$H = J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

$$= J \sum_{\langle ij \rangle} \left[(-1)^i S \vec{n}(\vec{R}_i) + a\vec{L}(\vec{R}_i) \right] \left[(-1)^j S \vec{n}(\vec{R}_j) + a\vec{L}(\vec{R}_j) \right]$$

$$= -J S^2 \sum_{i,\alpha} \vec{n}(\vec{R}_i) \cdot \vec{n}(\vec{R}_i + a\vec{e}_\alpha)$$

$$+ J S a \sum_{i,\alpha} (-1)^i \left[\vec{n}(\vec{R}_i) \cdot \vec{L}(\vec{R}_i + a\vec{e}_\alpha) + \vec{n}(\vec{R}_i) \cdot \vec{L}(\vec{R}_i - a\vec{e}_\alpha) \right]$$

$$+ J a^2 \sum_{i,\alpha} \vec{L}(\vec{R}_i) \cdot \vec{L}(\vec{R}_i + a\vec{e}_\alpha)$$

$$= -J S^2 \sum_{i,\alpha} \left[1 + a \vec{n}(\vec{R}_i) \cdot \frac{\partial \vec{n}(\vec{R}_i)}{\partial R_i^\alpha} + \frac{1}{2} a^2 \vec{n}(\vec{R}_i) \frac{\partial^2 \vec{n}(\vec{R}_i)}{\partial^2 R_i^\alpha} + O(a^3) \right]$$

$$+ 2 J S a^2 \sum_{i,\alpha} (-1)^i \vec{n}(\vec{R}_i) \cdot \left[\vec{L}(\vec{R}_i) + O(a^2) \right] + J a^2 d \sum_i \left(\left| \vec{L}(\vec{R}_i) \right|^2 + O(a) \right)$$

מכיון ש $|\vec{n}|^2 = 1$ אז $\vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial R^\alpha} = 0$ וכן ש $\vec{n}_i \cdot \vec{L}_i = 0$ ולכן

$$= -J S^2 \sum_{i,\alpha} \left[1 + \frac{1}{2} a^2 \vec{n}(\vec{R}_i) \frac{\partial^2 \vec{n}(\vec{R}_i)}{\partial R_i^{\alpha\,2}} \right] + J d a^2 \sum_i \left| \vec{L}(\vec{R}_i) \right|^2 + O(a^3)$$

$$= -J S^2 \sum_{i,\alpha} 1 + \int d^d R \left[\frac{J S^2 a^{2-d}}{2} \left| \vec{\nabla} \vec{n}(\vec{R}) \right|^2 + J d\, a^{2-d} \left| \vec{L}(\vec{R}) \right|^2 \right]$$

נחשב את ה Berry phase:

$$S \sum_i \int_0^\beta d\tau\, d\omega\left[\frac{\vec{S}_i(\tau)}{S} \right] = S \sum_i \int_0^\beta d\tau\, d\omega\left[(-1)^i \vec{n}(\vec{R}_i,\tau) + \frac{a}{S} \vec{L}(\vec{R}_i,\tau) \right]$$

$$\simeq S \sum_i \int_0^\beta d\tau \left\{ d\omega\left[(-1)^i \vec{n}(\vec{R}_i,\tau) \right] + \left. \frac{\delta \omega[\vec{\Omega}]}{\delta \vec{\Omega}} \right|_{\vec{\Omega} = (-1)^i \vec{n}(\vec{R}_i,\tau)} \cdot \frac{a}{S} \vec{L}(\vec{R}_i,\tau) \right\}$$

מכיון ש $-\vec{n}(\theta,\varphi) = \vec{n}(\theta+\pi,\varphi)$ נקבל ש

$$S\int_0^\beta d\tau\, d\omega[-\vec{n}(\tau)] = S\int_0^\beta d\tau\,[1+\cos\theta(\tau)]\,\dot{\varphi}(\tau)$$

$$= -S\int_0^\beta d\tau\,[1-\cos\theta(\tau)]\,\dot{\varphi}(\tau) + 2S\int_0^\beta d\tau\,\dot{\varphi} = -S\int_0^\beta d\tau\, d\omega[\vec{n}(\tau)] + 2S[\varphi(\beta)-\varphi(0)]$$

אך מכיון ש $2S[\varphi(\beta)-\varphi(0)] = 2\pi\cdot\text{integer}$ נקבל ש

$$e^{-iS\int_0^\beta d\tau\, d\omega(-\vec{n}(\tau))} = e^{iS\int_0^\beta d\tau\, d\omega[\vec{n}(\tau)]}$$

ונוכל לכן לרשום את האיבר הראשון בביטוי ל Berry phase:

$$S\sum_i \int_0^\beta d\tau\,(-1)^i\, d\omega[\vec{n}(R_i,\tau)]$$

בנוסף לכך ניתן לראות ש

$$\frac{\delta\omega[\vec{\Omega}(\tau)]}{\delta\vec{\Omega}(\tau)} = \frac{\partial\vec{\Omega}(\tau)}{\partial\tau}\times\vec{\Omega}(\tau)$$

ולכן האיבר השני בפעולה ניתן לרישום:

$$\sum_i\int_0^\beta d\tau\, a\vec{L}(\vec{R}_i,\tau)\cdot\frac{\partial\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)}{\partial\tau}\times\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)$$

כשהשתמשנו בכך שהפקטור $(-1)^i$ מגיע בזוג ולכן מתבטל כאשר אנו מגדירים $\vec{n}_i$ $(-1)^i\vec{n}_i$

בסה"כ הפעולה האפקטיבית נתונה ע"י

$$A_{eff} = iS\sum_i\int d\tau\,(-1)^i\, d\omega[\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)]$$
$$+\int_0^\beta d\tau\int d^dR\left\{\frac{JS^2a^{2-d}}{2}\left|\vec{\nabla}\vec{n}(\vec{R},\tau)\right|^2 + Jda^{2-d}\left|\vec{L}(\vec{R},\tau)\right|^2 + ia^{1-d}\vec{L}(\vec{R},\tau)\left(\frac{\partial\vec{n}(\vec{R},\tau)}{\partial\tau}\times\vec{n}(\vec{R},\tau)\right)\right\}$$

האינטגרל על השדה $\vec{L}$ הינו גאוסי אך צריך להתבצע תחת האילוץ $\vec{L}\cdot\vec{n}=0$. במקרה שלנו אילוץ זה אינו בעיה מכיון שהשדה בצמוד המכפלה $\frac{\partial\vec{n}}{\partial\tau}\times\vec{n}$ המופיעה כרושם באינטגרל הנ"ל ניצב ל $\vec{n}$ ולכן גם השדה המוצמד ממלא את האילוץ ונוכל לבצע את האינטגרל עם התוצאה

$$A_{eff} = iS\sum_i\int d\tau\,(-1)^i\, d\omega[\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)]$$
$$+\int_0^\beta d\tau\int d^dR\left\{\frac{JS^2a^{2-d}}{2}\left|\vec{\nabla}\vec{n}(\vec{R},\tau)\right|^2 + \frac{a^{-d}}{4Jd}\left(\frac{\partial\vec{n}(\vec{R},\tau)}{\partial\tau}\right)^2\right\}$$

עם האילוץ $|\vec{n}|^2 = 1$ זהו ה non-linear sigma model

על ידי הגדרת מהירות ה spin waves
וקבוע הצימוד

$$c = \sqrt{2d}\, J S a$$
$$g = \frac{2\sqrt{2d}}{S} a^{d-1}$$

והגדרת $X_0 = c\tau$, $X_\alpha = R_\alpha$ קואורדינטות אוקלידיות ב $d+1$ מימדים X_μ נקבל

$$A_{eff} = iS\sum_i \int d\tau\, (-1)^i\, d\omega\left[\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)\right] + \frac{1}{g}\int_0^{c\beta} dX_0 \int d^d\vec{x}\, \left(\partial_\mu \vec{n}\right)^2$$

עם האילוץ $|\vec{n}|^2=1$.

נתבונן כעת ביתר פירוט באיבר ה Berry phase. נעשה זאת עבור המקרה החד מימדי
עם תנאי שפה מחזוריים (נניח מספר זוגי של אתרים על השרשרת) $\vec{n}(\vec{R}_1) = \vec{n}(\vec{R}_{2N+1})$

$$S\sum_{i=1}^{2N} (-1)^i \int_0^\beta d\tau\, d\omega\left[\vec{n}(\vec{R}_i,\tau)\right] = S\sum_{k=1}^{N}\int_0^\beta d\tau \left\{ d\omega\left[\vec{n}(2ka,\tau)\right] - d\omega\left[\vec{n}((2k-1)a,\tau)\right]\right\}$$

מכיון שגל "זוג" בגדל x מכל 2 אתרים $\longrightarrow$

$$\simeq \frac{S}{2}\int_0^\beta d\tau \int_0^L dx\, \frac{\delta\omega[\vec{n}(x,\tau)]}{\delta\vec{n}(x,\tau)} \cdot \frac{\partial\vec{n}(x,\tau)}{\partial x}$$

$$= \frac{S}{2}\int_0^{\beta c} dX_0 \int_0^L dX_1\, \frac{\partial\vec{n}}{\partial X_0}\times\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial X_1}$$

$$= -\frac{S}{2}\int_0^{\beta c} dX_0 \int_0^L dX_1\, \frac{\partial\vec{n}}{\partial X_0}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial X_1}\cdot\vec{n}$$

להשתכנע שקיבלנו המשמעות הטופולוגית הבאה: נתבונן בהעתקה מבאר דו מימדי המתואר על ידי
הפרמטרים X_0, X_1 לספירה היחידה המתואר על ידי $\vec{n}(X_0,X_1)$ $\quad (X_0,X_1) \to \vec{n}(X_0,X_1)$
אלמנט שטח אינפיניטסימלי על הבאר המקורי מתמפה לאלמנט
על גבי הספירה כך ש $d\vec{A}$ מקביל ל $\vec{n}$

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial X_0}\times\frac{\partial\vec{n}}{\partial X_1}\right) dX_0\, dX_1$$

$\Leftarrow$

$$dA = d\vec{A}\cdot\vec{n}$$

~~אם~~ $\vec{n}$ מחזורי גם ב X_0 וגם ב X_1. עבור קונפיגורציה כזו נקבל קבוע על השפה

ש היריעה הינו מישור $[0,\beta c]\times[0,L]$ $\vec{n}$ מגדיר מיפוי מכדור דו מימדי הנפרש ע"י
x_0, x_1 לכדור היחידה ומספר

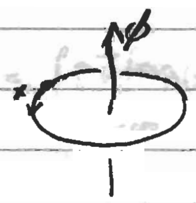
$$Q = \frac{1}{4\pi}\int dx_0 \int dx_1 \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \vec{n}}{\partial x_1}\right)\cdot \vec{n}$$

סופר את מספר הפעמים בהם כדור היחידה מכוסה במהלך מיפוי זה. מספר זה הינו שלם וקרוי
ה: "winding number", "Pontryagin index", Skyrmion "number"
לכן אחר כך הכי נקבל ע"י

$$e^{-i2\pi SQ}$$

כמספר טופולוגי הפאזה של Q משתנה - הוא אינו משנה את משוואות התנועה הקלאסיות
אך יש לו השפעה ניכרת על אינטגרל המסלול המגדיר את הגבול הקוונטי.
עבור ספין שלם $e^{-i2\pi SQ}=1$ והפאזה הנ"ל אינה משפיעה על סימן האיבר באינטגרל המסלול.
באופן שכזה e^{-A_E} תמיד חיובי וכל המסלולים הקוונטים תורמים לאינטגרל באותו סימן.
עבור ספין חצי שלם הפאזה תורמת $(-1)^Q$ תלוי ב Skyrmion index של הקונפיגורציה
המשתתפת באינטגרל המסלול. כתוצאה מכך קיים אפקט של אינטרפרנציה בין קונפיגורציות שונות
הגורם לכך שמצב היסוד יהיה שונה באופן מהותי מזה של מצב ספין לא כמצב ללא הפאזה.

כפי שנראה עבור ספין שלם במימד אחד הקורלציות הקוונטיות עבור הרכב האנטי פרומגנטי הם
אקספוננציאליות ויש פער אנרגטי (Haldane gap) בין מצב היסוד למצב המעורר הראשון.
לעומת זאת נראה כי עבור השרשרת עם $S=\frac{1}{2}$ המערכת נשארת חסרת-פער gapless.
זוהי תוצאה ישירה של ה Berry phase
ניתן לקבל מושג על כך באופן בו מתנהג חלקיק חסר ספין הנע במעגל דרך
חולש magnetic flux tube עם שטף ϕ

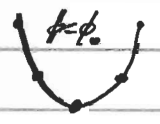


ההמילטוניאן הינו

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-i\partial_x + \frac{\phi}{L\phi_0}\right)^2 \qquad \phi_0 = \frac{hc}{me}$$

הספקטרום הינו

$$E = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(n + \frac{\phi}{\phi_0}\right)^2 \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$



עבור $\frac{\phi}{\phi_0}$ שלם מצב היסוד הינו $|n\rangle = |-\frac{\phi}{\phi_0}\rangle$ והוא לא מנוון

עבור $\frac{\phi}{\phi_0}$ חצי שלם מצב היסוד מנוון: $|-\frac{\phi}{\phi_0}-\frac{1}{2}\rangle,\ |-\frac{\phi}{\phi_0}+\frac{1}{2}\rangle$

בנוסף אינטגרל המסלול של הצורה

$$Z=\int DX\, e^{i\omega[X(\tau)]}\, e^{-\frac{m}{\hbar}\int_0^\beta d\tau \frac{\dot{X}^2}{2}}$$

כאשר ω היא pure gauge coupling בין החלקיק וקוונטות השטף (Aharonov Bohm phase).

$$\omega=\frac{2\pi}{L}\frac{\phi}{\phi_0}\int_0^\beta d\tau\,\dot{X} \;=\; 2\pi n\frac{\phi}{\phi_0} \qquad n=0,\pm1,\pm2\cdots$$

כאשר n הינו ה winding number של $X(\tau)$: מספר הפעמים שהחלקיק מקיף את המעגל בין $\tau=0$ ל $\tau=\beta$. נהוג לקרוא לו Skyrmion number בשני מימדים.
עבור $\frac{\phi}{\phi_0}$ חצי שלם ~~מספר שלם~~ ו S חצי שלם קיימת התאמה מלאה בין הסקטורים השונים והאינדקסים הטופולוגיים (n בבעיה הנוכחית או Q בבעיית הספין). בשני המקרים התוצאה של אפקטים לנוען במצב היסוד.

עבור ה NLSM המשמעות של ה Berry phase הינה משמעותית קשה: עבור S חצי שלם הוכח על ידי הלדיין מבוסס על הנחה רק $S=\frac{1}{2}$ כי המערכת נשארת gapless וזאת שונה כי התוצאה דומה תוצג על ידי מערכות עם ספין חצי שלם גבוה יותר. זהו אכן המצב כפי שמסיקים מראים אך אנו לא נמשיך לעסוק בכך. במקום זאת נפנה למקרה עם ספין שלם בו נוכל להתעלם מה Berry phase:

$$Z=\int D\vec{n}\,\delta[\vec{n}^2-1]\,e^{-\frac{1}{g}\int d^{d+1}x\,[\partial_\mu\vec{n}(x)]^2} \qquad : c=a=1$$

נכניס את האילוץ בעזרת Lagrange multiplier field

$$=\int D\vec{n}\int_{-i\infty}^{i\infty} D\lambda(x)\; e^{-\int d^{d+1}x\left\{\lambda(x)\left[\vec{n}^2(x)-1\right]+\frac{1}{g}\left[\partial_\mu\vec{n}(x)\right]^2\right\}}$$

$$=\int_{-i\infty}^{i\infty} D\lambda(x)\; e^{\int d^{d+1}x\,\lambda(x)-\frac{3}{2}\mathrm{Tr}\ln\left[\frac{1}{g}\partial_\mu^2+\lambda(x)\right]}$$

מספר הרכיבים של השדה המגנטי $\vec{n}$.

נחשב את האינטגרל בקירוב ה: Saddle point. את משוואת התנועה נקבל מהדרישה $\frac{\delta A_{eff}(\lambda)}{\delta\lambda}=0$

תנאי ה Saddle point הינו עבור קונפיגורציה קבועה $\lambda(x)=\lambda$

$$1 = \frac{3}{2}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{\frac{1}{g}\partial_\mu^2+\lambda}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{2}{3} = \int_{|\vec k|<\Lambda} \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\,\frac{1}{\frac{k^2}{g}+\lambda}$$

כאשר הכנסנו short distance cutoff: $\Lambda\sim\frac{\pi}{a}$.

במימד אחד

$$\int_0^\Lambda \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{g}{k^2+g\lambda} = \frac{g}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2+g\lambda}{g\lambda}\right)$$

$m^2=g\lambda$ היא המסה (הפער האנרגטי) של העירור הקוונטי לשדה $\vec n$ מכיוון שהפעולה עבור קונפיגורציה λ קבועה השווה ל $\frac{m^2}{g}$ נותנת אז

$$\frac{1}{g}\sum_{k,\omega}\left(\omega^2+k^2+m^2\right)\vec n(\omega,k)\cdot\vec n(-\omega,-k)$$

ויחס הדיספרסיה הינו $\omega(k)=\sqrt{k^2+m^2}$

מתנאי משוואת ה saddle point נמצא את הפער

$$m\sim\Lambda e^{-\frac{4\pi}{3g}}$$

זהו ה: Haldane gap הקטן אקספוננציאלית עם S מכיוון ש $\frac{1}{g}\propto S$

שים לב כי זו תוצאה לא פרטורבטיבית בצימוד הקטן $g\sim\frac{1}{S}$.

בשני מימדים

$$\int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{g}{k^2+m^2} = \frac{g}{2\pi^2}\int_0^\Lambda dk\,\frac{k^2}{k^2+m^2}$$

נבדוק באיזה תחום $m=0$ עבור

$$\overset{m=0}{=} \frac{g\Lambda}{2\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2}\frac{4}{S}a\Lambda \sim \frac{2}{\pi}\frac{1}{S}$$

$\Lambda\sim\frac{\pi}{a}$

אם נגיע לכן למסקנה כי קיים ערך קריטי S_c שעבור $S<S_c$ למשוואת ה saddle point פתרון רק עם $m>0$ (עבור $\frac{m}{\Lambda}$ קטן, האגף השמאלי נתון לקירוב ב $\frac{2}{\pi}\frac{1}{S}\left[1-\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right]$).

זהו מצב הדומה ל Haldane-state במימד אחד: spin-liquid.

עבור $S>S_c$ האגף השמאלי קטן מ $\frac{2}{3}$ ולכן אין פתרון למשוואת ה saddle point עם $m=0$. מצב זה הינו כנראה מצב קלאסי בו סדר אנטיפרומגנטי ארוך טווח צריך להתקיים, ב $T=0$.

שגיאת הקירוב שלנו כאן היא גדולה מדי כדי לקבל הערכה אמינה של S_c. חישובים נומריים ו series expansions הראו כי $S_c<\frac{1}{2}$ ולכן עבור $S\geq\frac{1}{2}$ סדר אנטיפרומגנטי קיים ב $T=0$:

תוצאה זו תקפה גם למקרה הדו מימדי עם $S=\frac{1}{2}$ למרות ה Berry phase הקיים בה.

משפט Mermin-Wagner אנו יודעים כי סדר כזה לא ניתן להתקיים בטמפרטורה סופית.
בטמפרטורה סופית האינטגרל על ω צריך להיות מוחלף בסכום על Matsubara frequencies:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{g}{\omega_n^2+k^2+m^2} = \frac{3g}{4}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\omega(k)}\coth\left[\frac{\beta}{2}\omega(k)\right]$$

$\omega(k)=\sqrt{k^2+m^2}$. אנו מצפים לפער אנרגטי קטן, (אורך קורלציה ארוך) בטמפרטורות נמוכות
כלומר $m(T)\ll T$ נוכל לקרב את ה $\coth\left[\frac{\beta\omega}{2}\right]$ כ: $\frac{2}{\beta\omega}$ ולבדוק את ההתנהגות
בתחום הרגיש.

$$\simeq\frac{3g}{2\beta}\int_{|k|<\Lambda}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2+m^2(T)} \simeq \frac{3g}{4\pi\beta}\ln\frac{\Lambda}{m(T)}$$

$$m(T)\simeq\Lambda e^{-\frac{4\pi}{3gT}}\simeq\xi^{-1}(T) \qquad \Leftarrow$$

אורך הקורלציה גדל באופן אקספוננציאלי כאשר $T\to0$.

בשלושה ממדים הפלוקטואציות הקוונטיות מדוכאות עוד יותר מאשר למקרה הדו-ממדי ולכן נצפה לסדר אנטיפרומגנטי
ארוך טווח לכל S בטמפרטורות גבוהות מ $T=0$ (עד T Néel).