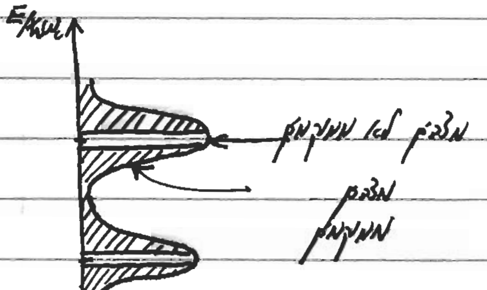
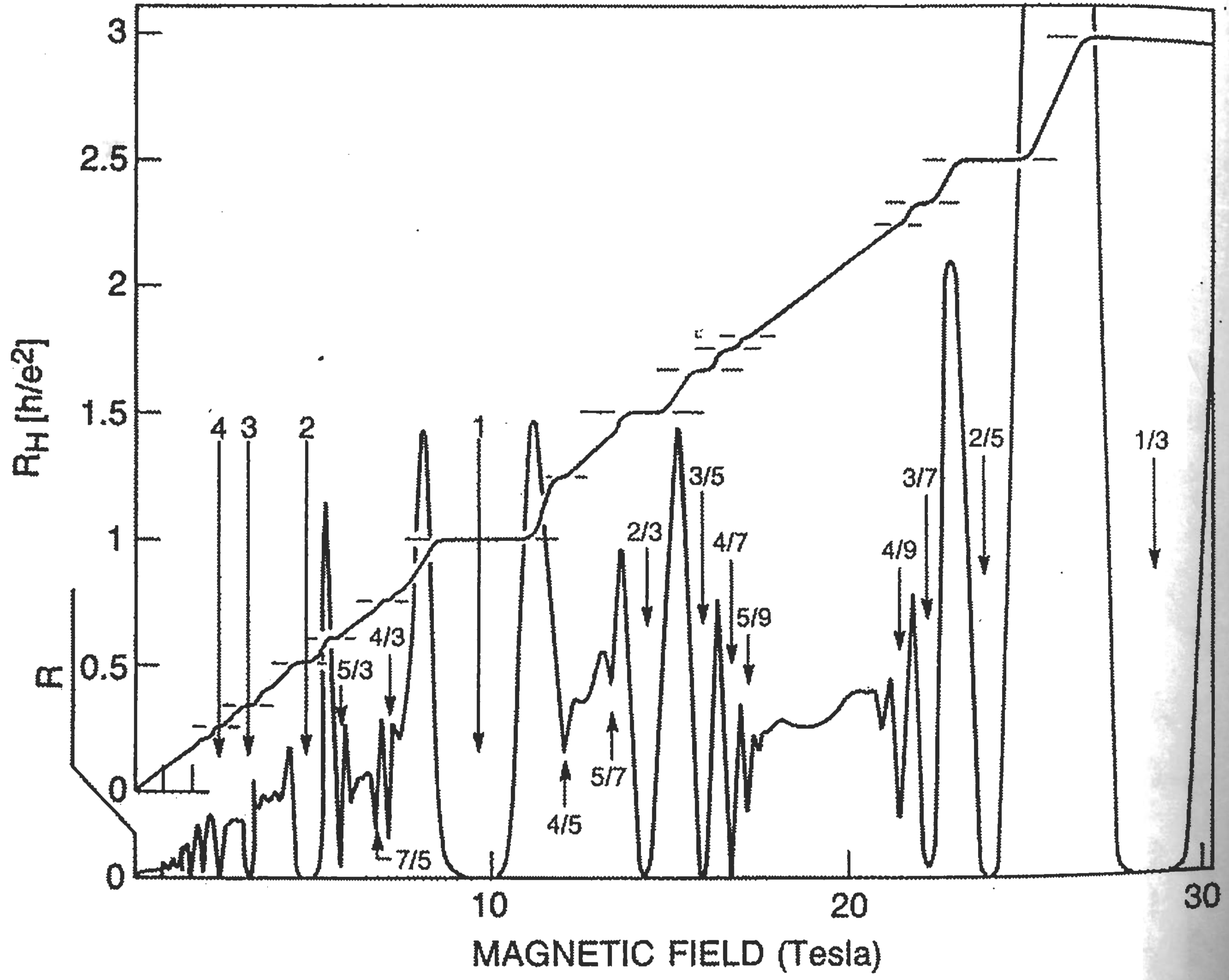
אפקט הול הקוונטי נצפה כאשר דוגמאות אלקטרוניות דו-ממדיות (כיום הטכנולוגיה השכיחה למערכות מסוג זה הינן GaAs heterostructures) נתונות בשדה מגנטי ניצב חזק.
עבור ערכים מסוימים של השדה המגנטי ההתנגדות האורכית (ושם המוליכות האורכית) נעלמות בזמן שההתנגדות הול מציגה פלטו. - ראו התוצאות הניסיוניות בעמוד הבא

אני מניח כי אתם מכירים את הפתרון לבעיה של אלקטרון יחיד הנע בשני ממדים בהשפעת שדה מגנטי ניצב. הפונקציות העצמיות מתארות רמות לנדאו עם אנרגיות $E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$
כאשר $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ היא תדירות הציקלוטרון (מכאן ואילך אזניח את הספין בהנחה - מניח כי ה g-factor כה גדול כך שכל הרמות מקוטבות מבחינת הספין שלהן)
לכל רמת לנדאו מנוון ניוון מקרוסקופי $N_\phi = \frac{\phi}{\phi_0}$ כאשר ϕ הינו השטף המגנטי דרך המערכת ו $\phi_0 = \frac{hc}{e}$.

באפקט הול הקוונטי השלם R_{xx} נעלמת ! $R_{xy} = n\frac{h}{e^2}$ בפלטאות המתרחשות סביב הקטעי מילוי שלמים כלומר $\nu = \frac{N}{N_\phi} = n = 1,2,3\ldots$ כאשר N הינו מספר החלקיקים במערכת (למעשה רוב הפלטאות המתאימות ל n אי זוגי אינן ניכרות - נובע מקיומו של ספין ואפקטים של exchange)
אפקט זה ניתן להסביר במסגרת תמונה של חלקיקים חסרי אינטראקציה. בעבודת אי סדר ניתן לראות לנדאו מספר רק שבהן הרמות ליד אנרגיות לנדאו המקוריות נותרות extended אלו הרמות ב"כנף" התפלגות הרמות ממוקמות



כאשר רמת פרמי נמצאת בפער הממוקם R_{xx} נעלם מכיוון שקיים פער אנרגטי של $\hbar\omega_c$ לערך של מצב לא ממוקם מתחת ל E_F למצב לא ממוקם מעל E_F. באותו זמן ניתן להראות כי R_{xy} הנמדד מתבטא במצבים הלא ממוקמים מתחת ל E_F קבוע כל זמן ש E_F נמצא בתחום הממוקם (ניתן להראות כי המצבים הלא ממוקמים סביב מרכז כל רמת לנדאו תורמים $\frac{h}{e^2}$ ל R_{xy}).



R_H [h/e^2]
R
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
4
3
2
1
5/3
4/3
7/5
4/5
5/7
2/3
3/5
4/7
5/9
4/9
3/7
2/5
1/3
10
20
30
MAGNETIC FIELD (Tesla)

הביטוי לאפקט הול הקוונטי השבור דומה לזה של האפקט השלם אך מתרחש בשדות מגנטים גבוהים יותר בהם רק רמת לנדאו התחתונה מלאה באופן חלקי. הפלטואים הנצפים ביותר של האפקט מרוכזים סביב ערכי המילוי $\nu = \frac{m}{2m\pm1}$ כאשר $m=1,2,3$. בעוד שהפער האנרגטי באפקט הול הקוונטי השלם נוצר מפער הציקלוטרון בין רמות לנדאו עוקבות, במקרה השבור הפער מתרחש בתוך רמת לנדאו אחת - התחתונה. הפער הזה נובע ממקור אחר: אינטראקציות.

כשעסקו בתאור עיוני של האפקט השבור ב 1981 הציע Laughlin פונקציית גל וריאציונית למצב היסוד ולעירורים האלמנטריים של מערכת תחת תנאי ה FQHE. אני אתאר בחלק הראשון את עבודתו ואמשיך בחלק השני תורת שדה אפקטיבית ל FQHE המאפשרת לקבל בצורה קלה את התוצאות של Laughlin ותוצאות אחרות שאינן ניתנות לחישוב קל מתוך גישת פונקציית הגל.

קל במיוחד לתאר את פונקציית Laughlin בכיול הסימטרי:

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(y, -x)$$

נמצא את מצבי לנדאו בכיול זה.

עבור אלקטרון $e=|e|$

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\left(-i\ell\partial_x + \frac{y}{2\ell}\right)^2 + \left(-i\ell\partial_y - \frac{x}{2\ell}\right)^2\right]$$

כאשר $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$ היא ה magnetic length

נגדיר

$$z = \frac{1}{\ell}(x+iy) \qquad \partial_z = \ell(\partial_x - i\partial_y)$$

$$z^* = \frac{1}{\ell}(x-iy) \qquad \partial_{z^*} = \ell(\partial_x + i\partial_y)$$

$\Leftarrow$

$$H = \hbar\omega_c\left[\left(\frac{z^*}{2^{3/2}} - \sqrt{2}\,\partial_z\right)\left(\frac{z}{2^{3/2}} + \sqrt{2}\,\partial_{z^*}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \hbar\omega_c\left(b^+b + \frac{1}{2}\right)$$

כאשר הגדרנו

$$b = \frac{z}{2^{3/2}} + \sqrt{2}\,\partial_{z^*}$$

$$b^+ = \frac{z^*}{2^{3/2}} - \sqrt{2}\,\partial_z$$

אופרטורי הורדה והעלאה של רמות לנדאו

$$[b, b^+] = 1$$

נוכל להגדיר גם אופרטורים המעלים בתוך כל רמת לנדאו:

$$a = \frac{z^*}{2^{3/2}} + \sqrt{2}\,\partial_z$$

$$a^+ = \frac{z}{2^{3/2}} - \sqrt{2}\,\partial_{z^*}$$

המקיימים $[a,a^+]=1$ ו $[a,b]=[a,b^+]=0$

ברמת לנדאו התחתונה פונקצית הגל חייבת לקיים

$b\Psi = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{z}{2^{3/2}} + \sqrt{2}\,\partial_{z^*}\right)\Psi = 0 \Rightarrow \Psi = f(z)\, e^{-\frac{zz^*}{4}}$$

בתוך רמת לנדאו זו. פונקצית הגל עם הערך העצמי הנמוך ביותר של האופרטורים a, a^+ מקיימת

$$a\Psi = a\, f(z)\, e^{-\frac{zz^*}{4}} = \left(\frac{z^*}{2^{3/2}} + \sqrt{2}\,\partial_z\right) f(z)\, e^{-\frac{zz^*}{4}} = 0 \Rightarrow f = 1$$

המצבים האחרים בתוך הרמה התחתונה מתקבלים ממנה על ידי הפעלת a^+:

$$(a^+)^m e^{-\frac{zz^*}{4}} = \left(\frac{z}{2^{3/2}} - \sqrt{2}\,\partial_{z^*}\right)^m e^{-\frac{zz^*}{4}} \propto z^m e^{-\frac{zz^*}{4}}$$

קל לראות כי זוהי פונקציה עצמית של אופרטור התנע הזוויתי במישור עם ערך עצמי $m\hbar$.

עבור השברים $\frac{1}{m}$ m אי זוגי

Laughlin ניחש פונקצית גל רב חלקיקית וריאציונית למצב היסוד של ה FQHE תוך שימוש בפונקציות הגל של חלקיק בודד ברמת לנדאו התחתונה בלבד. שכן בגבול שבו השדה גבוה מאוד האינטראקציה הקולונית מרחיקה מרמות לנדאו גבוהות יותר ולכן לא יהיו קפיצות בין שכבות אנרגיה אלה.

הוא רשם את פונקצית הגל הוריאציונית שלו כמכפלה של Jastrow functions

$$\Psi = \prod_{j<k} f(z_j - z_k)\, e^{-\frac{1}{4}\sum_{e} |z_e|^2}$$

ומצא את הפונקציה f האופטימלית מבחינת מינימיזציה של האנרגיה.

לאחר שהגלה הפונקציה לכתוב לנחש התכונה - ודרישת האנטיסימטריה הכללית קובעת כמעט לגמרי את f. הדרישה הראשונה גוררת כי $\prod_{j<k} f(z_j - z_k)$ הינו פולינום הומוגני ב $z_1 \cdots z_M$ ולכן גם $f(z)$ הינו פולינום ב z. דרישת האנטיסימטריה גוררת לכן

$$f(z) = z^m \qquad m \text{ אי זוגי:}$$

(שימו לב כי כדי שהפונקציה הגל תהא פונקציה עצמית של התנע הזוויתי עם ערך עצמי M היא צריכה להיות פולינום שדרגתו M - כל האיברים בה צריכים להיות מאותה הדרגה M ולכן כל ה-f-ים המופיעים בה צריכות להיות בעלות אותו m)!

כדי להבין את הדרגה אשר מתארת פונקצית הגל של Laughlin נציג את צפיפות ההסתברות שלה באופן המזכיר משקל בולצמן קלאסי:

$$|\Psi_m(z_1 \cdots z_M)|^2 = e^{-\beta \phi(z_1 \cdots z_M)}$$

כאשר $\beta = \frac{1}{m}$ הוא טמפרטורה הפוכה פיקטיבית!

$$\phi(z_1 \cdots z_M) = -2m^2 \sum_{j<k} \ln|z_j - z_k| + \frac{m}{2} \sum_{\ell} |z_\ell|^2$$

הינה האנרגיה הפוטנציאלית של אוסף מטענים, עם מטען m, הדוחים זה את זה בשני מימדים דרך אינטראקציית קולון בפוטנציאל לוגריתמי: $2\ln|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.
מכיוון שעבור אלקטרוסטטיקה מהסוג הזה הפוטנציאל המושרה ע"י התפלגות מטען $\rho(r)$ הינו

$$V(\vec{r}) = \int d^2r'\, 2\ln\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{\ell}\, \rho(r')$$

ומכיון שבשני מימדים $\nabla^2 \ln r = 2\pi\delta(r)$ נקבל

$$\nabla^2 V = 4\pi \rho(r)$$

לכן פוטנציאל שמקורו $V = \frac{r^2}{2\ell^2}$ נוצר מצפיפות מטען אחידה של $\rho = \frac{1}{2\pi\ell^2}$ מאחר והאיבר ב ϕ מתאר כאנרגיה הפוטנציאלית של המטענים הנובעת מאינטראקציה עם צפיפות מטען רקע אחידה בגודל זה.

האנרגיה המינימלית של פלזמה קלאסית זו מתקבלת כאשר מטען הפלזמה צפיפות המטען של המטענים המקושרים לאלקטרונים : $\rho_e \cdot m$ משתווה לצפיפות מטען הרקע

מטען החלקיקים הבודדים

צפיפות החלקיקים של האלקטרונים

כלומר $\rho_e = \frac{1}{m \cdot 2\pi \ell^2}$ קוואזיצה כזו תיאר במלא האנרגיה הקלאסית המינימלית ולכן זהו בשוואת
בהתאמה המסתברות של האלקטרון. הקוואזיצה הסבירה כיוון שלכל תגאר הדבורות מטען אחדה של
רמת לנדאו תהיה מלאה כדי $\frac{1}{m}$ מכמות המלאה.

Laughlin גם הציע פונקציות גל לאקסיטציות עבור ערכים נמוכים של המערכת המתקבלים על ידי
החדרת קוונטה בודדה ϕ_0 נוספת דרך הנקודה z_0.
כפי שמופיע מצב החלב

$$\Psi_m^{+z_0} = \prod_i (z_i - z_0)\,\Psi_m = \prod_i (z_i - z_0) \prod_{i<k} (z_j - z_k)^m e^{-\frac{1}{4}\sum_\ell |z_\ell|^2}$$

מתאר quasi hole בנקודה z_0. קל לראות כי עבור $z_0=0$, לדוגמא, כל
מצב תנע-זוויתי המשתתף ב-Ψ_m עובר ב-$\Psi_m^{+z_0}$ למצב התנע הזוויתי עם תנע זוויתי גדול באחד -
האלקטרונים הולכים נדחפים מעט כלפי חוץ.
כדי לראות את דחיית האלקטרון במצב החדש נשים לב כי תחת הרשומה הפלסמה הקלאסית

$$\phi \rightarrow \phi - 2m \sum_i \ln |z_i - z_0|$$

כלומר לפלסמה הקלאסית הפיקטיבית יש מטען m במצב החדש מטען עודף בנקודה z_0.
הפלסמה תסכך מטען זה על ידי יצירת חוסר מטען עודף הפוך ודחיית מטען עודף לספר
הטיפה. מכיוון שצפיפות המטען של הפלסמה הפיקטיבית הינה $m \cdot \rho_e$ נקבל שצפיפות
האלקטרונים במצב החדש מכילה חור במטען $\frac{1}{m}$ סביב הנקודה z_0.

דרך נוספת לחשב את מטען העירור סביב z_0 היא לחשב את הפאזה γ שהמצב צובר כאשר
הופכים את z_0 מסביב אדיאבטית במעגל ברדיוס R המקיף שטף ϕ. המטען האפקטיבי
e^* ניתן אז דרך הקשר

$$\gamma = \frac{e^*}{\hbar c} \oint_R \vec{A}\,dl = 2\pi \frac{e^*}{e} \frac{\phi}{\phi_0}$$

Berry הראה כי עבור המילטוניאן התלוי בפרמטר z_0: $H(z_0)$ המשתנה באופן אדיאבטי
בנוסף לשינוי הפאזה הרגיל $\int^t E(t')dt'$ כאשר $E(t)$ היא האנרגיה העצמית של $\Psi(t)$
צוברת הפאזה נוספת γ המקיימת

$$\frac{d\gamma}{dt} = i \langle \Psi(t) | \frac{d\Psi(t)}{dt} \rangle$$

במקרה שלנו

$$\frac{d\Psi_m^{+z_0}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\ln\left[z_i - z_0(t)\right]\cdot \Psi_m^{+z_0}$$

רק e

$$\frac{d\gamma}{dt} = i\left\langle \Psi_m^{+z_0}\right| \frac{d}{dt}\sum_i \ln\left[z_i - z_0(t)\right] \left|\Psi_m^{+z_0}\right\rangle$$

אם מבין שצפיפות החלקיקים בנוכחות ה quasi hole היא $\rho^{+z_0}(z) = \langle \Psi_m^{+z_0} | \sum_i \delta(z_i - z) | \Psi_m^{+z_0}\rangle$ נקבל

$$\frac{d\gamma}{dt} = i\int d^2r\, \rho^{+z_0}(z)\,\frac{d}{dt}\ln\left[z - z_0(t)\right]$$

נרשום $\rho^{+z_0}(z) = \rho_0 + \delta\rho^{+z_0}(z)$ כאשר $\rho_0 = \frac{1}{m}\frac{\phi}{\phi_0}$ צפיפות השכבה האחידה.

נחשב תרומה הבאה N ρ_0: אם z_0 נעשה לולאה מעגל ברדיוס R בכיוון השעון סביב z המקיימים $|z|<R$ מקבלים $2\pi i$ ל γ כאשר עבור $|z|>R$ התרומה מתאפסת. נקבל לכן

$$\gamma_0 = i\int_{|r|<R} d^2r\, \rho_0 \cdot 2\pi i = -2\pi\cdot\langle N\rangle_R = -2\pi\frac{1}{m}\frac{\phi}{\phi_0}$$

מספר האלקטרונים הממוצע בתוך המעגל ברדיוס R.

מכיוון ש $\delta\rho^{+z_0}(z)$ מרוכזת על פני טווח ℓ מהנקודה z_0 התרומה ממנה תהיה רק N z המקיימים את המעגל לולאת עצמה ונוכל להזניח כי היא קטנה כגודל $\left(\frac{\ell}{R}\right)^2$.

נקבל לכן

$$-2\pi\cdot\frac{1}{m}\frac{\phi}{\phi_0} = 2\pi\frac{e^*}{e}\frac{\phi}{\phi_0} \Rightarrow e^* = \frac{e}{m}$$

בהתאמה לתוצאה הקודמת.

נרצה לבדוק כעת קיום כדי לחשב את הסטטיסטיקה שמקיימים אלה quasi-hole נחשב זוג. נעזר בפונקציית הגל של שני quasi-holes ב z_a ו z_b

$$\Psi_m^{z_a,z_b} = \prod_i (z_i - z_a)(z_i - z_b)\,\Psi_m$$

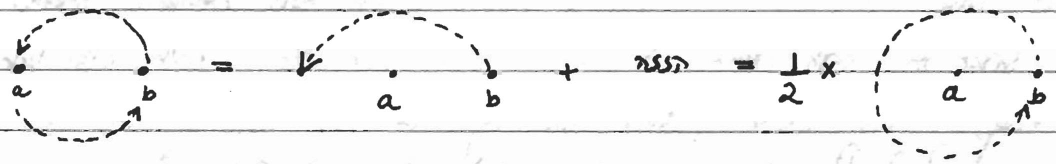
ונבצע את z_a לולאה מעגל סביב ברדיוס R. אם z_b נמצא מחוץ למעגל $|z_b|=R$ התרומה [illegible]

נוסיף לה את השאר. מכיוון ש $|z_b|-R \gg \ell$: z_b נמצא בתוך המעגל

הרי ש $\langle n \rangle_R$ ישתנה ב $-\frac{1}{m}$ כמו שצפוי בחישוב הקודם והמצב השני נוספת לפזה בשיעור

$$\Delta \gamma = \frac{2\pi}{m}$$

כלומר ה quasi-holes מקיימים fractional statistics: עבור $m=1$ בזמן החלפת שני הקווים חורים



נצברת פזה של $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{1}=\pi$ כלומר החורים מקיימים סטטיסטיקת פרמי-דיראק. עבור $m\neq 1$ בזמן החלפת החלקיקים בעקבות הזזה נצברת פזה של $e^{i\frac{\pi}{m}}$: סטטיסטיקה שבורה. חלקיקים מסוג זה נקראים אניונים: anyons.

Laughlin בנה הוכחה גם ל quasi-electrons:

$$\Psi_m^{-z_0} = \prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} - z_0\right)\Psi_m$$

ובעזרת דומה ניתן להראות כי מצב זה נושא מטען $+\frac{e}{m}$ וכי ה quasi electrons מקיימים אף הם סטטיסטיקה שבורה עם פזה $e^{-i\frac{\pi}{m}}$.

Laughlin הראה כי עבור ה quasi-hole וה quasi electrons קיים אנרגיה סופית ולכן המצב Ψ_m הוא אי-דחיס. שינוי הצפיפות שנובע מהמצב $\frac{\phi}{\phi_0}\cdot\frac{1}{m}$ נעשה על ידי יצירת קווי חורים או קווי אלקטרונים וכרוך בהתגברות על פער אנרגטי. הוא גם הראה כי ל Ψ_m מוליכות של Hall $\frac{1}{m}\frac{e^2}{h}$ כנדרש. כל זה עבור קווי חורים-אלקטרונים ממוקמים על ידי אי-סדר מוליכות על לא משתנה וזה המוצג מאחורי הפלטאות הנצפים ב FQHE.

הבעיה העיקרית בטיפול בספקטרום של אינטראקציות במערכת המציגה את ה FQHE הינה הניוון העצום הקיים במצב היסוד הלא מופרע של המערכת: הניוון הינו מאקרוסקופי ונובע מהמספר הקומבינטורי של דרכים לשכן N אלקטרונים ב $N_\phi > N$ מצבים חד-חלקיקיים. כתוצאה מכך עלינו להתמודד עם תורת הפרעות מנוונת באופן עצום.

הרעיון העיקרי העומד מאחורי תורת השדות האפקטיבית (שנראה כי הינה מסוג Chern-Simons) ל FQHE הוא להמיר את הבעיה המקורית בעזרת טרנספורמציה לבעיה חדשה שלה, לפחות באופן מקורב, מצב יסוד שאינו מנוון. בבעיה החדשה, שמצב היסוד המקורב שלה מכיל חלק מהקורלציות המאפיינות את המצב המדויק, נוכל להכליל באופן הפרעתי את הספקטרום של האינטראקציות הקולוניות ועוד אינטראקציות הכיול הנובעות המוכנסות לבעיה בעקבות הטרנספורמציה.

הצעד הראשון במעבר לתורת CS הינו זה של statistical transmutation. הרעיון כבר מוכר לנו כשדנו ב Jordan-Wigner transformation כאשר הראינו כיצד בעיה הרשומה במונחי אופרטורי ספין לבעיה פרמיונית.
בשפה של קוונטיזציה שניה זוהי טרנספורמציה של אופרטורי השדה האלקטרוניים $\psi(r)$:

$$\phi(r) = e^{i\Lambda(r)}\psi(r) \quad , \quad \Lambda(r) = \int d^2r' \, f(r-r')\,\rho(r')$$

כאשר

$$\rho(r) = \psi^\dagger(r)\psi(r) = \phi^\dagger(r)\phi(r)$$

ניתן לבדוק בעזרת שימוש בנוסחת Baker Hausdorff כי האופרטורים $\phi(r)$ מקיימים סטטיסטיקה שונה מזו של $\psi(r)$ בתנאי ש $f(r-r')$ אינה פונקציה חד-ערכית באופן ש

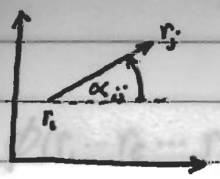
$$f(r-r') = f(r'-r) + \tilde{\phi}\pi$$

כאשר $\tilde{\phi}$ שלם אי-זוגי $\phi(r)$ מקיים סטטיסטיקת בוזה-איינשטיין. כאשר $\tilde{\phi}$ שלם זוגי $\phi(r)$ ממשיך לקיים סטטיסטיקת פאולי-דירק. עבור $\tilde{\phi}$ כללי $\phi(r)$ מתארים anyons.

נבחר פונקציה זו עבור הגדרה מסוימת של $f(r-r')$:

$$f(r_i-r_j)=\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ij}$$

כאשר α_{ij} הוא הזווית בין הוקטור $\vec{r}_j-\vec{r}_i$ וציר x.



מכיון ש α_{ij} משתנה ב $\pm\pi$ כאשר i ו j מחליפים מקומות הסטטיסטיקה
נקבעת ע"י ה"זוית הסטטיסטית": θ : statistical angle
כפי שנראה מיד.

נראה כעת השפעה של קוונטיזציה ראשונה. נניח כי אנו מתחילים ממצב בו החלקיקים פרמיונים אם הופכים
כל זוג חלקיקים $\Psi(r_1\cdots r_N)$ אז

$$\Psi(r_1\cdots r_n\cdots r_l\cdots r_N)=-\Psi(r_1\cdots r_l\cdots r_n\cdots r_N)$$

באופן אנלוגי למה שעשינו עבור קוונטיזציה שניה נגדיר

$$U(r_1\cdots r_N)=e^{i\sum_{i<j}\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ij}}\qquad\left(f(r_i-r')=\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ir'}\ ,\quad \rho(r')=\sum_j\delta(r'-r_j)\right)$$

ונבדוק את תכונות הסימטריה של

$$\phi(r_1\cdots r_N):=U^{-1}(r_1\cdots r_N)\,\Psi(r_1\cdots r_N)$$

(אנו בודקים את $U^{-1}\Psi$ מכיון שאלו פונקציות גל המוגדרות בשפה של קוונטיזציה ראשונה
לפי הטרנספורמציה בקוונטיזציה שניה)

מכיון ש

$$U^{-1}(r_1\cdots r_n\cdots r_l\cdots r_N)=\exp\left\{-i\frac{\theta}{\pi}\left[\sum_{\substack{i<j\\ \neq n,l}}\alpha_{ij}+\sum_{\substack{j=n+1\\ j\neq l}}^{N}\alpha_{nj}+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{in}+\sum_{j=l+1}^{N}\alpha_{lj}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{l-1}\alpha_{il}+\alpha_{nl}\right]\right\}$$

$$U^{-1}(r_1\cdots r_l\cdots r_n\cdots r_N)=U^{-1}(r_1\cdots r_n\cdots r_l\cdots r_N)$$

$$\times\exp\left\{-i\frac{\theta}{\pi}\left[\sum_{m=n+1}^{l}\left(\alpha_{lm}-\alpha_{ml}+\alpha_{mn}-\alpha_{nm}\right)+\left(\alpha_{ln}-\alpha_{nl}\right)\right]\right\}$$

ומכיון ש

$$\alpha_{ij}-\alpha_{ji}=\pm\pi$$

$$U^{-1}(r_1\cdots r_\ell\cdots r_n\cdots r_N) = U^{-1}(r_1\cdots r_n\cdots r_\ell\cdots r_N)\, e^{-i\frac{\theta}{\pi}\left[\sum_{m=n+1}^{\ell}(\pm 2\pi \text{ or } 0) \pm \pi\right]}$$

ומן שימוש באנטיסימטריה של $\psi(r_1\cdots r_N)$ נקבל

$$\phi(r_1\cdots r_\ell\cdots r_n\cdots r_N) = -e^{\pm i\theta}\,\phi(r_1\cdots r_n\cdots r_\ell\cdots r_N)$$

$\Leftarrow \quad \theta = (2k+1)\pi \quad : \quad \phi$ בוזוני

$\theta = 2k\pi \quad : \quad \phi$ פרמיוני

אחרת: ϕ אניוני.

ההמילטוניאן המקורי עבור האלקטרונים היה $\left(k = c = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{2\pi}{e}\right)$

$$H = \sum_i \frac{1}{2m}\left[\vec{P}_i + e\vec{A}(r_i)\right]^2 + \sum_i eA_0(r_i) + \sum_{i<j} V(r_i - r_j)$$

עם משוואת שרדינגר $H\Psi(r_1\cdots r_N) = E\Psi(r_1\cdots r_N)$

$$\Rightarrow HU\phi(r_1\cdots r_N) = UE\phi(r_1\cdots r_N)$$

ולכן אם ψ הינו מצב עצמי של H עם אנרגיה E הרי ϕ מצב עצמי של $H' = U^{-1}HU$ עם אותה האנרגיה.

מכיון ש U הינו אופרטור המעביר את אופרטורי המקום r_i בלבד הוא תלוי עם $\vec{A}(r_i)$, $A_0(r_i)$; $V(r_i - r_j)$ אבל

$$U^{-1}\vec{P}_i U = U^{-1}\left(-i\vec{\nabla}_i U\right) + U^{-1}U\left(-i\vec{\nabla}_i\right)$$

$$= e^{-i\sum_{i<j}\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ij}} \sum_{j\neq i} \frac{\theta}{\pi}\left(\vec{\nabla}_i \alpha_{ij}\right) e^{i\sum_{i<j}\frac{\theta}{\pi}\alpha_{ij}} + \vec{P}_i$$

סכום על j בלבד

$$\equiv e\vec{a}(r_i) + \vec{P}_i$$

כאשר ה statistical vector potential נתון ע"י

$$\vec{a}(r_i) = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\sum_{j\neq i}\vec{\nabla}_i\alpha_{ij} = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\left[\sum_{j\neq i}\frac{y_j-y_i}{|r_j-r_i|^2},\ -\sum_{j\neq i}\frac{x_j-x_i}{|r_j-r_i|^2}\right]$$

$$= \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\frac{1}{r}\hat{e}_\varphi$$

$$H' = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2m}\left[\vec{P}_i + e\left(\vec{A}(r_i)+\vec{a}(r_i)\right)\right]^2 + \sum_{i=1}^{N} eA_0(r_i) + \sum_{i<j}V(r_i-r_j) \Leftarrow$$

נבדוק מהו השדה המגנטי המתאים של ע"י $\vec{a}$. שימו לב כי למרות שהוא נתון כגרדיאנט של פונקציה ה curl שלו לא מתאפס. והדבר נובע מרב-ערכיות של α_{ij}

$\Leftarrow$ curl $\vec{a}(r)$ מתאפס בכל מקום פרט לראשית. תוך שימוש במשפט stokes נמצא

$$\int d^2r\ \vec{\nabla}\times\vec{a}(r) = \oint\vec{a}(r)\cdot d\vec{l} = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\theta}{\pi}\int_0^{2\pi} r\cdot\frac{1}{r}d\varphi = \phi_0\cdot\frac{\theta}{\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{a}(r) = \phi_0\frac{\theta}{\pi}\delta(\vec{r})\hat{z}$$

כלומר עם חלקיק במקום r_i הולך גם שטף מגנטי רק שאינו של $\frac{\theta}{\pi}$ קוונטות שטף. קו השטף הצמוד לו שם של החלקיק לגבי האלקטרומגנטיות היינו הפרש לשני פוטנציאל אחר הם מקיימים

נחשוב בהחלפה של שני חלקיקים. ההחלפה כמו אקוויוולנטית לסיבוב של אחד סביב השני בזווית π ונקבל כי שמצבר הפאזה פאזת אהרונוב-בוהם (Aharonov-Bohm) הנצברת בתהליך זה היא

$$\frac{1}{2}\cdot e\oint\vec{a}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,d\vec{r}_2 = \frac{e}{2}\phi_0\frac{\theta}{\pi} = \theta$$

לכן אם החלקיקים המקוריים פרמיונים ו $\theta=(2k+1)\pi$ הפאזה הכוללת הנצברת תוך כדי החלפה של החלקיקים המורכבים electrons + flux lines = composite particles היא

$$\pi+\theta = 2(k+1)\pi$$

החלקיקים המורכבים הינם בוזונים composite bosons כדי שנשתמש אותם קודם לכן

נשים לב - על ידי בחירת פונקציה שונה ל $f(r-r')$ המקיימת את התנאי $f(r-r') = f(r'-r) + \theta\pi$
היינו מקבלים לכאורה אחר ל $\vec{a}$. לעומת זאת השדה המגנטי הסטטיסטי $\vec{b} = \vec{\nabla}\times\vec{a}$ הזה נשאר
ללא שינוי. בהמשך אנחנו לא יכולים לבצע regular gauge transformations
$f \to f+g$ כאשר f מקיימת את התנאי לעיל ואילו g רגולרית כך ש $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} g = 0$
בנוסף כבר שמנו לב כי הבחירה שלנו $f = \alpha_{ij}$ מובילה לכיול הסימטרי.

במונחי קוונטיזציה שנייה

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi}\int d^2r'\, \vec{\nabla} f(\vec{r}-\vec{r}')\, \rho(\vec{r}')$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \phi_0 \frac{\theta}{\pi}\rho(\vec{r})\,\hat{z}$$

עבור הבחירה שלנו ל f היינו $\vec{a}$ טרנסברסלי (מכיון ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = 0$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = 0$$

משוואות אלו מגדירות את $\vec{a}$ לחלוטין (למעשה עד טרנספורמציית כיול עבורן $\nabla^2 g = 0$.
הגדרת $\vec{a}$ באופן מסדר חופש זה גם כן נקודת את $\vec{a}$). לכן על ידי בחירת
f מתאימה קבענו את הכיול - fixed the gauge.

פונקציית החלוקה נראית כעת כך:

$$Z = \int D\phi\, D\vec{a}\; \delta(\partial_i a_i)\, \delta\left(\frac{\pi e}{\theta\phi_0}\varepsilon_{ij}\partial_i a_j - e\rho\right) e^{iS} \qquad i,j = 1,2$$

$$S = \int dt\, d^2r \left[\phi^* i\partial_t\phi - H'\right]$$

נכניס a_0 : Lagrange multiplier field כדי לקיים את האילוץ השני:

$$Z = \int D\phi\, Da_\mu\; \delta(\partial_i a_i)\, e^{i(S_a + S_\phi)} \qquad \mu = 0,1,2$$

$$S_a = \int dt\, d^2r\, \frac{\pi e}{\theta\phi_0}\varepsilon_{ij} a_0 \partial_i a_j$$

$$S_\phi = \int dt\, d^2r \left[\phi^*\left(i\partial_t + e(A_0 + a_0)\right)\phi - \frac{1}{2m}\left|\left(-i\vec{\nabla} + e(\vec{A}+\vec{a})\right)\phi\right|^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int dt\, d^2r\, d^2r'\, \delta\rho(r)\, V(r-r')\, \delta\rho(r') \qquad \delta\rho = \rho - \bar{\rho}$$

נכתוב את ~~בהצגה~~ S_a של Chern-Simons בכיול הקולוני: Coulomb (transverse) gauge:

$$S_{c.s} = \int dt\, d^2r\, \frac{\pi e}{2\theta\phi_0}\, \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda$$

נבדוק:

$$S_{c.s} = \int dt\, d^2r\, \frac{\pi e}{2\theta\phi_0}\Big[\, a_0 \varepsilon_{ij}\partial_i a_j - \varepsilon_{ij} a_i \partial_0 a_j + \underbrace{\varepsilon_{ij} a_i \partial_j a_0}_{\text{integrate by parts}}\Big]$$

$$-a_0\varepsilon_{ij}\partial_j a_i = a_0 \varepsilon_{ij}\partial_i a_j$$

$$= \int dt\, d^2r \left[\frac{\pi e}{\theta\phi_0} a_0 \varepsilon_{ij}\partial_i a_j - \frac{\pi e}{2\theta\phi_0}\vec{a}_T \times \partial_0 \vec{a}_T\right]$$

להזכיר לנו כי אנו רוצים לעשות אחר כך - כ: transverse gauge

אם בשני מימדים $\partial_0 \vec{a}_T$ רק יכול להיות בכיוון כמו זה של $\vec{a}_T$ בעצמו ולכן האיבר השני נעלם בכיול הזה ואנו מקבלים את שרצינו.

לכן נצפה כי עבור כיול כללי (undoing the gauge fixing) העירה ה-
FQHE של Chern-Simons ונקבל את האיבר $S_{c.s}$ תהיה S_a של gauge invariant

$$Z = \int D\phi\, Da_\mu\, e^{i(S_{c.s} + S_\phi)}$$

שימו לב כי למרות ש $S_{c.s}$ מכילה פוטנציאל במפורש ולא רק את ה-
field strength הפעולה אינווריאנטית תחת טרנספורמציית כיול כנדרש - זה אכן נכון.
לראות זאת נבחן gauge variation שמוגדרת $\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda(\vec{r},t)$ קל לראות ש

$$\delta \mathcal{L}_{cs} \propto \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu\left[(\partial_\nu\Lambda)\cdot a_\lambda\right]$$

שהיא נגזרת שלמה ולכן נעלמת תחת אינטגרציה על פני משטח סגור.

נתחיל לעבוד בגבול בו על ידי ייצוג השדה הבוזוני בצורה פולרית: $\phi(r) = \sqrt{\rho(r)}\, e^{i\theta(r)}$

מזה נשען בפעולה הבאה המתאימה כדי למצוא θ שהצגנו כעת.

$$S_\phi = \int dt\, d^2r \left\{ \rho\left[-\partial_t\theta - e(-A_0 + a_0)\right] - \frac{1}{2m}\rho\left[\vec\nabla\theta + e(\vec A + \vec a)\right]^2 - \frac{1}{8m}\frac{(\vec\nabla\rho)^2}{\rho} \right\}$$

$$-\frac{1}{2}\int dt\, d^2r\, d^2r'\, \delta\rho(r)\, V(r-r')\, \delta\rho(r')$$

נבחן במשוואות ה mean-field : משוואות התנועה הקלאסיות הנובעות מהפעולה $S_\phi + S_{cs}$:

$\delta a_0:\quad \varepsilon_{ij}\partial_i a_j = \tilde\phi\,\phi_0\,\rho \qquad$: the C-S constraint

$\delta a_i:\quad \varepsilon_{ij}(\partial_j a_0 - \partial_t a_j) = \tilde\phi\,\phi_0\, J_i \qquad J_i = \frac{\rho}{m}\left[\partial_i\theta + e(A_i + a_i)\right] = \rho\, v_i$

$\delta\rho:\quad \partial_t\theta = -\frac{v_i^2}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{\partial_i^2\sqrt\rho}{\sqrt\rho} - e(-A_0 + a_0) - \int d^2r'\, V(r-r')\,\delta\rho(r')$

ומשוואה בעבור θ נותנת את משוואת הרציפות (התנאי לקבלה גם מתוך שלוש המשוואות הראשונות) $\qquad \partial_t\rho = -\vec\nabla\cdot\vec J$

שתי המשוואות הראשונות מתארות את אופי הצימוד בין השדות והבוזונים הסטטיסטיים וצפיפות החומר וזוהי בעצם בדיוק תוכן המשוואות של "Chern - Simons electrodynamics":

המשוואה הראשונה הינה משוואת האילוץ ברמה הקושרת את השדה המגנטי הסטטיסטי לצפיפות החלקיקים.

המשוואה השנייה אומרת לנו כי זרם במערכת יוצר שדה חשמלי סטטיסטי: $\vec\nabla a_0 - \partial_t\vec a$
תוצאה זו מוכרת אם נזכור כי זרם קוונטי גורר בהכרח זרם של קווי השטף הצמודים לבוזונים.
השדה החשמלי הסטטיסטי הינו אם כן תוצאה של חוק ההשראה של פרדיי

למשוואות mean-field אלו הפתרון הפשוט ביותר: $(A_0=0)$

$$\rho = \bar\rho = \frac{1}{\tilde\phi}\frac{B}{\phi_0} \Rightarrow \nu = \frac{1}{\tilde\phi} = \frac{1}{2k+1} \quad : \text{the Laughlin fractions}$$

$$\theta = a_0 = 0 \quad , \quad \vec a = -\vec A \qquad (\epsilon_{ij}\partial_i A_j = -B \text{ מתאים})$$

הפתרונות אלו מתאימים לנוזל בוזוני הומוגני הנע בשדה מגנטי נטו (חיצוני + סטטיסטי) אפס. אנו רואים כי charged Bose condensate זה מפגין את אפקט מייסנר ביחס ל $\vec A+\vec a$. אפקט מייסנר זה דרוש גם לכך שנוזל האלקטרונים המקורי אינו-דחיס. כדי להבין זאת עלינו לזכור כי עקב אילוץ ה CS כל שינוי בצפיפות החלקיקים גוררת בהכרח שינוי בשדה הסטטיסטי ולכן לשדה כולל השונה מאפס. התרחשות כזו, עם זאת, אינה אפשרית בעקבות ה Meissner effect ולכן הצפיפות נשמרת קבועה או במלים אחרות, הנוזל אינו-דחיס.

אנו יכולים גם לחשב את המוליכות הנובעת משדה חשמלי חיצוני קבוע $\vec E = -\vec\nabla A$. הפתרון למשוואות במקרה זה הינו מהצורה

$$\rho = \bar\rho = \frac{1}{\tilde\phi}\frac{B}{\phi_0} \quad , \quad \vec a = -\vec A \quad , \quad a_0 = A_0$$

$$j_i = \frac{1}{\tilde\phi\phi_0}\epsilon_{ij}\partial_j a_0 = -\frac{1}{\tilde\phi\phi_0}\epsilon_{ij}\partial_j(-A_0) = \frac{1}{\tilde\phi\phi_0}\vec z\times\vec E$$

משוואה זו מגדירה את θ.

מכאן נקבל (לאחר הכפלה ב e כדי לקבל מצפיפות זרם החלקיקים את צפיפות הזרם החשמלי) כי מוליכות ה Hall של הנוזל במצב זה היא

$$\sigma_H = \frac{e}{\tilde\phi\phi_0} = \frac{1}{2k+1}\frac{e^2}{h} = \nu\frac{e^2}{h}$$

בצורה דומה ניתן לקבל פתרונות המתאימים עירורים טופולוגיים ממוקמים אותם נזהה עם עירורי ה quasi hole וה quasi electron של Laughlin.

נתבונן (בכיול $A_0=0$) בפתרון מערבולת $\qquad \rho = \rho(r)$

כאשר φ היא הזווית בין וקטור המיקום $\vec{r}$ וציר x $\qquad \theta(\vec{r}) = \pm \varphi$

$\hat{\varphi}$ וקטור יחידה בכיוון φ (ניצב ל $\hat{r}$). $\qquad \vec{a}(\vec{r}) = -\vec{A} \pm \frac{\hat{\varphi}}{er}, \quad a_0 = 0$

מתוך משוואות האילוץ נקבל כי בפתרון הזה נשאר מטען (ביחס למצב ההומוגני הקודם $\bar{\rho}$) של

$$q = e\int d^2r\,(\rho-\bar{\rho}) = e\int d^2r\,\frac{1}{\tilde{\phi}\phi_0}\nabla\times(\vec{a}-\vec{A}) = \frac{e}{\tilde{\phi}\phi_0}\oint d\vec{l}\,(\vec{a}-\vec{A}) = \pm\frac{2\pi}{\tilde{\phi}\phi_0} = \pm\frac{e}{\tilde{\phi}}$$

הצורה המדויקת של $\rho(r)$ מתקבלת מפתרון נומרי של המשוואות ותהיה שונה עבור ה quasi hole וה quasi-particle. בשני המקרים $\rho \xrightarrow{r\to\infty} 0$ כדי לשמור את ρ [illegible].

בעזרת הרחבת תנודות קטנות מסביב לפתרון ה mean-field נוכל לקבל את האופנים הקולקטיביים של המערכת בקירוב שהוא אקוויולנטי ל RPA.
לצורך כך נבצע ליניאריזציה של משוואות ה mean field סביב הפתרון הקודם שמצאנו לעיל.

$$\varepsilon_{ij}\,\partial_i\,\delta v_j = \frac{\tilde{\phi}e\phi_0}{m}\,\delta\rho = \frac{\omega_c}{\bar{\rho}}\,\delta\rho$$

$$\varepsilon_{ij}\left[\partial_i\frac{1}{m}(\partial_t\delta\theta + e\,\delta a_0) - \partial_t\,\delta v_j\right] = \omega_c\,\delta v_i$$

$$\partial_t\delta\theta + e\,\delta a_0 = \frac{1}{4m\bar{\rho}}\,\partial_i^2\,\delta\rho - \int d^2r'\,V(r-r')\,\delta\rho(r')$$

ומשוואת הרציפות $\qquad \partial_t\,\delta\rho = -\bar{\rho}\,\partial_i\,\delta v_i$

עם הפתרון

$$\delta\rho = k\cos(kx-\omega t)$$

$$\delta v_y = \frac{\omega_c}{\bar{\rho}}\sin(kx-\omega t) \qquad \delta v_x = \frac{\omega}{\bar{\rho}}\cos(kx-\omega t)$$

$$\partial_t\delta\theta + e\,\delta a_0 = \frac{m}{\bar{\rho}}\,\frac{\omega_c^2-\omega^2}{k}\cos(kx-\omega t)$$

עבור אינטראקציה מקומית $V(r-r')=\lambda\delta(r-r')$ המשוואה האחרונה מספקת את יחס הדיספרסיה

$$\omega^2=\omega_c^2+\frac{\lambda\bar{\rho}}{m}k^2+\frac{1}{4m^2}k^4$$

אלו הם הפלסמונים המגנטים magneto plasmons.

עבור אינטראקציה קולומבית $V\sim\frac{1}{k}$ $\qquad \omega^2\sim\omega_c^2+\lambda k$

שימו לב לתוצאה של משפט Kohn $\omega\xrightarrow{k\to0}\omega_c$ עבור זה מדובר על תנועת
צנטרואיד של הגז כולו ולכן אינו מושפע מהאינטראקציה בין האלקטרונים באופן ש $\omega=\omega_c$.

נחשב כעת את התגובה המושרית לשדות אלקטרומגנטיים חיצוניים בקירוב RPA מתוך הפעולה של האפקט Chern-Simons. נפתח את הפעולה לסדר שני בסטיות הקטנות מהפתרונות ה M-F הקודמים:
נרשום $\rho=\bar{\rho}+\delta\rho$ ונפתח את סדר שני ב $\delta\rho$ וב $\partial_\mu\theta + e(A_\mu+a_\mu)$:

$$S_\phi = \int dt\, d^2r \left\{ \delta\rho\left[-\partial_t\theta - e(A_0+a_0)\right] - \frac{\bar{\rho}}{2m}\left[\vec{\nabla}\theta + e(\vec{A}+\vec{a})\right]^2 - \frac{1}{8m}\frac{(\vec{\nabla}\delta\rho)^2}{\bar{\rho}} \right\} - \frac{1}{2}\int dt\, d^2r\, d^2r'\, \delta\rho(r)\, V(r-r')\, \delta\rho(r')$$

מכיון ש $S_{C.S}$ ריבועית בפוטנציאלים הסטטיסטיים היא נשארת על כנה.
נבצע אינטגרציה החוצה של $\delta\rho$ מתוך S_ϕ לקבל

$$S_\theta = \sum_{\omega,\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2V(k)} \left[-i\omega\theta(-k) - e\left(A_0(-k)+a_0(-k)\right)\right]\left[i\omega\theta(k) - e\left(A_0(k)+a_0(k)\right)\right] \right.$$
$$\left. - \frac{\bar{\rho}}{2m}\left[-i\vec{k}\theta(-k) + e\left(\vec{A}(-k)+\vec{a}(-k)\right)\right]\left[i\vec{k}\theta(k) + e\left(\vec{A}(k)+\vec{a}(k)\right)\right] \right\} \qquad k\equiv(\vec{k},\omega)$$

כאשר הזנחנו את התרומה מהאבר $\frac{(\vec{\nabla}\delta\rho)^2}{\bar{\rho}}$ ב S_ϕ מכיון שבגבול אורכי הגל הארוכים היא נותנת תיקון לתרומה הבאה מאבר האינטראקציה, כמו שאנו נראה שנשמר לספקטרום ה magneto-plasmons.

על ידי אינטגרציה החוצה של θ נישאר עם הפעולה האפקטיבית

$$S_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{k,\mu,\nu} \Pi_{\mu\nu}(k)\, \delta a_\mu(-k)\, \delta a_\nu(k) \qquad : \delta a_\mu = A_\mu + a_\mu$$

עם

$$\Pi_{00}(k) = -\frac{e^2}{V(\vec{k})} \frac{\frac{\bar{\rho}}{2m}|\vec{k}|^2}{\frac{\omega^2}{2V(\vec{k})} - \frac{\bar{\rho}}{2m}|\vec{k}|^2}$$

$$\Pi_{ij}(k) = -\frac{e^2\bar{\rho}}{m}\left[\delta_{ij} + \frac{\frac{\bar{\rho}}{2m}k_i k_j}{\frac{\omega^2}{2V(\vec{k})} - \frac{\bar{\rho}}{2m}|\vec{k}|^2}\right]$$

$$\Pi_{0i}(k) = \Pi_{i0}(k) = -\frac{e^2\bar{\rho}}{2m} \frac{\frac{\omega}{V(\vec{k})}k_i}{\frac{\omega^2}{2V(\vec{k})} - \frac{\bar{\rho}}{2m}|\vec{k}|^2}$$

פעולה זו מתארת את ה linear response של הגזל הבוזוני לשדות הפוטנציאלים החיצוניים והסטטיסטיים.

נוכל לרשום אותה גם באופן הבא:

$$S_{eff} = \frac{1}{2}\sum_k \sum_{ij} \Pi_0(k)\left[\delta a_0(-k) + \frac{\omega}{|\vec k|^2} k_i\, \delta a_i(k)\right]\left[\delta a_0(k) + \frac{\omega}{|\vec k|^2} k_j\, \delta a_j(k)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_k \sum_{ij} \Pi_\perp(k)\left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec k|^2}\right]\delta a_i(-k)\,\delta a_j(k)$$

כאשר $\Pi_0 = \Pi_{00}$ ו $\Pi_\perp = -\frac{e^2\bar\rho}{m}$

האבר הראשון מתאר את התגובה האורכית (longitudinal response). Π_0 הוא ה density-density corr. ולכן ה compressibility הינו

$$\kappa = \frac{1}{e^2}\lim_{\substack{\omega=0\\ k\to 0}} \Pi_0 = \frac{1}{V(\vec k)}$$

עבור אינטראקציה קולונית התגובה הקולונית היא לכן אפס. כי הפלזמון [illegible]
עבור ω סופי יש לו קוטב ב $\omega^2 = 0 + \frac{\lambda\bar\rho}{m}k^2$

האבר השני הינו התגובה הרוחבית (transverse response) כדי לזהות את משמעותו נזכר כי
השדה המגנטי הכולל $\delta\vec b = \vec b + \vec B = \varepsilon_{ij}\,\partial_i\,\delta a_j$ [illegible]
$\frac{1}{2}\chi(\delta b)^2$:

$$-\frac{1}{2}\int dt\, d^2r\, \chi(\delta b)^2 = -\frac{\chi}{4}\sum_k\sum_{ij}\left[-ik_i\,\delta a_j(-k) + ik_j\,\delta a_i(-k)\right]\left[ik_i\,\delta a_j(k) - ik_j\,\delta a_i(k)\right]$$

$$= -\frac{\chi}{4}\sum_k\sum_{ij}\Big\{k_i^2\,\delta_{ij}\,\delta a_i(-k)\,\delta a_j(k) + k_j^2\,\delta_{ij}\,\delta a_i(-k)\,\delta a_j(k)$$
$$- k_i k_j\left[\delta a_i(-k)\,\delta a_j(k) + \delta a_j(-k)\,\delta a_i(k)\right]\Big\}$$

$$= -\frac{\chi}{2}\sum_k\sum_{ij}\left(|\vec k|^2\delta_{ij} - k_i k_j\right)\delta a_i(-k)\,\delta a_j(k)$$

זוהי התגובה הדיאמגנטית ה-k התלויה. קיבלנו כי χ : ה diamagnetic response
שווה ל עי

$$\chi = -\frac{\Pi_\perp(k)}{|\vec k|^2} \xrightarrow{k\to 0} \infty$$

זהו ולכן ה Meissner effect שמאפיין המוליכים
עם superfluid density $\rho_s = \bar\rho$ - לפחות בקירוב הנוכחי [illegible]

עד כה חישבנו את תגובת המערכת הבוזונית. אנו מעוניינים כעת לחשב את ה response functions של האלקטרונים המקוריים. לשם כך עלינו לבצע אינטגרציה על השדות הפלקטואטיביים a_μ כדי להשיג תלות אפקטיבית במונחי השדה החיצוני A_μ בלבד. קל יותר לבצע חישוב זה בכיול הבא:

transverse gauge $\partial_i a_i = \partial_i A_i = 0$. מכיוון שה response functions הן gauge invariant הן אינן רגישות לבחירה זו. בכיול זה

$$S = \frac{1}{2}\sum_k \Pi_0(k)\left[a_0(-k)+A_0(-k)\right]\left[a_0(k)+A_0(k)\right] + \frac{1}{2}\sum_k\sum_{ij}\Pi_1(k)\,\delta_{ij}\left[a_i(-k)+A_i(-k)\right]\left[a_j(k)+A_j(k)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_k\sum_{ij}\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\,\varepsilon_{ij}\,(ik_i)\left[a_0(-k)a_j(k)-a_0(k)a_j(-k)\right]$$

נבצע אינטגרציה על a_μ ונקבל

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k,\mu,\nu}\tilde\Pi_{\mu\nu}(k)\,A_\mu(-k)\,A_\nu(k)$$

עם

$$\tilde\Pi_{00}(k) = \frac{\Pi_0(k)\left(\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\right)^2|\vec k|^2}{\left(\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\right)^2|\vec k|^2-\Pi_0(k)\Pi_1(k)} \xrightarrow[k\to 0]{\omega=0} \frac{me^2}{(2\pi\tilde\phi)^2\bar\rho}|\vec k|^2$$

$$\tilde\Pi_{ij}(k) = \frac{\Pi_1(k)\left(\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\right)^2|\vec k|^2}{\left(\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\right)^2|\vec k|^2-\Pi_0(k)\Pi_1(k)} \xrightarrow[k\to 0]{\omega=0} -\frac{e^2V(k)}{(2\pi\tilde\phi)^2}|\vec k|^2$$

$$\tilde\Pi_{0j}(k) = \tilde\Pi_{j0}(k) = \frac{\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\Pi_0(k)\Pi_1(k)\cdot i\varepsilon_{ij}k_i}{\left(\frac{e^2}{2\pi\tilde\phi}\right)^2|\vec k|^2-\Pi_0(k)\Pi_1(k)} \xrightarrow[k\to 0]{k/\omega\to 0} \frac{ie^2}{2\pi\tilde\phi}\varepsilon_{ij}k_i$$

ה density-density response וה compressibility של המערכת הפרמיונית המקורית נתונה ע"י האיבר הראשון

$$K_0 = \frac{1}{e^2}\lim_{\substack{\omega=0\\k\to 0}}\frac{\delta^2 S}{\delta A_0(-k)\,\delta A_0(k)}\bigg|_{A_\mu=0} = \frac{m}{(2\pi\tilde\phi)^2\bar\rho}|\vec k|^2 \xrightarrow[k\to 0]{} 0$$

המערכת אינה דחיסה! בהגענו למסקנה זו הנחנו שלמערכת הבוזונית קיימת superfluid density סופי כלומר עבור ω סופי ל $\tilde\Pi_{00}$ קוטב ב $\omega^2=\omega_c^2+\frac{2\bar\rho}{m}k^2$ כפי שציפינו מתוך אנלוגיה לתנודות הקולקטיביות ([illegible])

$\Pi_1(k) \sim \rho_s \neq 0$ מילא תפקיד מכריע. הסימן נכון בגלל שזוהי בתכונות ה mean-field מגדיר superfluid density ערכו של הקונדנסט הגורם ל Meissner effect ועקב גורם לדעיכת עבור האלקטרונים המקוריים.

האבר השני מגלה את ה current-current response של המערכת. שאלה טבעית היא האם הגדלת של הקונדנסט $\rho_s \neq 0$ גורם גם ל-נעלות עבור הבוזונים. התשובה שלילית מכיוון ש $\tilde{\Pi}_{ij} \propto k^2 V(k)$ (שם האנלוגיה ל Π_1 מכיוון שאנו עובדים ב transverse gauge)
התנהגות $\tilde{\Pi}_{ij} \propto k^2$ מאפשרת מתבדרת ונעלמת בגבול $k \to 0$.

האבר השלישי מגלה את ה QHE:

$$J_i(k) = \frac{\delta S}{\delta A_i(-k)}\Big|_{A_\mu=0} = -i\,\frac{e^2}{2\pi\tilde{\phi}}\,\varepsilon_{ji}\,k_j\,A_0(k)$$

$$\Rightarrow J_i = -\frac{e^2}{2\pi\tilde{\phi}}\,\varepsilon_{ij}\,E_j \quad \Rightarrow \quad \sigma_H = \frac{e^2}{2\pi\tilde{\phi}} = \frac{1}{\tilde{\phi}}\,\frac{e^2}{h}$$

ברצוני להראות לכם כאן כיצד ניתן להשתמש בפעולת C-S לקבל פונקציית הגל של Laughlin לשברים הלא-זוגיים $\nu = \frac{1}{2k+1}$ ולהסביר ה off-diagonal long range order הקיים בפונקציית הגל של ה composite bosons במצבים אלה.

לצורך כך נשתמש ב $S_\Theta(\delta a) + S_{cs}(a)$ ונבצע אינטגרציה על a_μ (בהנחה כי $A_0=0$; $\vec\nabla\times\vec A = -B\hat z$) התוצאה היא:

$$S_\Theta = \frac{1}{2}\sum_k \left[\frac{\omega^2}{V(k) + \frac{(2\pi\tilde\phi)^2\bar\rho}{m|\vec k|^2}} - \frac{\bar\rho}{m}|\vec k|^2 \right] \theta(-k)\theta(k)$$

$$\Rightarrow \langle\theta(-k)\theta(k)\rangle = -i\,\frac{V(k) + \frac{(2\pi\tilde\phi)^2\bar\rho}{m}\frac{1}{|\vec k|^2}}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi\tilde\phi\bar\rho}{m}\right)^2 - \frac{\bar\rho}{m}V(k)|\vec k|^2} = -i\,\frac{V(k) + 2\pi\tilde\phi\,\omega_c\frac{1}{|\vec k|^2}}{\omega^2 - \omega_c^2 - \frac{\bar\rho}{m}V(k)|\vec k|^2}$$

פונקצית הקורלציה הסטטית מתקבלת מאינטגרציה על ω:

$$\langle\theta(-\vec k)\theta(\vec k)\rangle = \int d\omega\,\langle\theta(-k)\theta(k)\rangle = \frac{\tilde\phi}{2|\vec k|^2} + O\left(\frac{1}{|\vec k|}\right)$$

עבור אינטגרציה קלאסית. עבור אינטגרציה קוונטית : $O(1)$

$$\Rightarrow \langle\theta(\vec r)\,\theta(\vec r\,')\rangle \simeq \frac{1}{2\pi}\int d^2k\,\frac{\tilde\phi}{2k^2}e^{i\vec k(\vec r-\vec r\,')} = \frac{\tilde\phi}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\infty dk\cdot k\,\frac{e^{ik|\vec r-\vec r\,'|\cos\varphi}}{k^2}$$

$$= \frac{\tilde\phi}{2}\int_0^\infty dk\,\frac{k}{k^2+\epsilon^2}J_0(k|\vec r-\vec r\,'|) = \frac{\tilde\phi}{2}K_0\left(\epsilon|\vec r-\vec r\,'|\right) \xrightarrow{\epsilon|\vec r-\vec r\,'|\to 0} \frac{\tilde\phi}{2}\ln\left(\frac{2e^{-\gamma}}{\epsilon|\vec r-\vec r\,'|}\right)$$

צריך רגולריזציה של k ה infra-red divergence

אנו יכולים כעת לחשב את פונקצית הקורלציה של השדה הבוזוני:

$$\langle\phi^\dagger(\vec r)\,\phi(\vec r\,')\rangle \simeq \bar\rho\left\langle e^{-i[\theta(\vec r)-\theta(\vec r\,')]}\right\rangle = \bar\rho\, e^{-[\langle\theta^2(\vec r)\rangle - \langle\theta(\vec r)\theta(\vec r\,')\rangle]}$$

$$\propto \bar\rho\,|\vec r-\vec r\,'|^{-\frac{\tilde\phi}{2}} = \bar\rho\,|\vec r-\vec r\,'|^{-\frac{1}{2\nu}}$$

המקדם תלוי ברגולריזציה של short-distance כש $r\to r'$

אנו רואים כי המערכת הבוזונית מציגה <u>Algebraic</u> off diagonal long range order
עובדה זו התגלתה בפעם הראשונה על ידי MacDonald ו Girvin שהראו מפונקצית Laughlin.
היה זה צעד חשוב לקראת הפורמולציה של תורת שדות אפקטיבית מסוג C-S ל FQHE.

נעבור כעת ל $S(\theta)$ ונכתוב במרחב התנע (לפי פורייה)

$$S = \int dt \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial_t \theta(-\vec{k},t)\, \partial_t \theta(\vec{k},t)}{V(\vec{k}) + \frac{(2\pi\tilde{\phi})^2 \bar{\rho}}{m|\vec{k}|^2}} - \frac{\bar{\rho}}{m} |\vec{k}|^2\, \theta(-\vec{k},t)\, \theta(\vec{k},t) \right\}$$

$\theta(\vec{r},t)$ הוא שדה ממשי ולכן $\theta(-\vec{k},t) = \overset{*}{\theta}(\vec{k},t)$ ולכן נרשום

$$\theta(\vec{k},t) = \theta_1(\vec{k},t) + i\theta_2(\vec{k},t)$$
$$\theta(-\vec{k},t) = \theta_1(\vec{k},t) - i\theta_2(\vec{k},t)$$

ונגביל את $\vec{k}$ לחצי המישור העליון

$$S = \int dt \sum_{i=1,2} \underset{\text{חצי מישור עליון}}{\sum_{\vec{k}}} \left\{ A(\vec{k}) \left[\partial_t \theta_i(\vec{k},t)\right]^2 - B(\vec{k})\, \theta_i^2(\vec{k},t) \right\}$$

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{V(\vec{k}) + \frac{(2\pi\tilde{\phi})^2 \bar{\rho}}{m|\vec{k}|^2}} \quad , \quad B(\vec{k}) = \frac{\bar{\rho}}{m} |\vec{k}|^2$$

קיבלנו לכן סכום של אוסצילטורים הרמוניים

התנע הצמוד ל $\theta_i(k)$ הינו

$$P_i(\vec{k}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = 2A(\vec{k})\, \dot{\theta}_i(\vec{k})$$

ולכן

$$H = \underset{\vec{k}\ \text{חצי מישור עליון}}{\sum} \sum_{i=1,2} P_i(\vec{k})\, \dot{\theta}_i(\vec{k}) - L = \sum_{i=1,2} \underset{\text{חצי מישור עליון}}{\sum_{\vec{k}}} \frac{1}{4A(\vec{k})} P_i^2(\vec{k}) + B(\vec{k})\, \theta_i^2(\vec{k})$$

מכיוון ש $\left[\theta_i(\vec{k}), P_j(\vec{k}')\right] = i\delta_{ij}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$ $\theta_i(\vec{k}) = i \frac{\partial}{\partial P_i(\vec{k})}$! H מתאר אוסף אוסצילטורים הרמוניים

עם פונקצית גל במצב היסודי:
בהצגת התנע הצמוד ל θ:

$$\Phi_g\{P(\vec k)\} \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\ \sum_{\vec k}\ \frac{1}{2\sqrt{A(\vec k)B(\vec k)}}\ P_i^2(\vec k)\right\}$$

רק חצי מישור

בגבול $k\to 0$ $\quad A(\vec k)B(\vec k) \longrightarrow \dfrac{|\vec k|^4}{(2\pi\tilde\phi)^2}$!

$$\Phi_g\{P(\vec k)\} \propto \exp\left\{-\frac{\pi\tilde\phi}{4}\sum_{\vec k}\frac{1}{|\vec k|^2}\,P(-\vec k)P(\vec k)\right\}$$

על כל המישור

כשהבדלנו עבור $\vec k$ בחצי המישור העליון:

$$P(\vec k) = P_1(\vec k) + iP_2(\vec k)$$
$$P(-\vec k) = P_1(\vec k) - iP_2(\vec k)$$

מכיון ש $\quad [\theta(\vec k), P(\vec k')] = 2i\,\delta_{\vec k,-\vec k'} \quad \Leftarrow \quad [\theta(\vec r), P(\vec r')] = 2i\,\delta(\vec r-\vec r')$

ומכיון ש $\quad [\theta(\vec r), \rho(\vec r')] = -i\,\delta(\vec r-\vec r')$ נקבל $\quad P(\vec r) = -2\rho(\vec r)$

ולכן $\quad \rho(\vec r) = \sum_{i=1}^{N}\delta(\vec r-\vec r_i) \Rightarrow \rho(\vec k) = \dfrac{1}{\sqrt{\text{Area}}}\sum_{i=1}^{N}e^{-i\vec k\cdot\vec r_i}$

$$\Phi_g(r_1\cdots r_N) \propto \exp\left\{-\pi\tilde\phi\sum_{\vec k}\frac{1}{|\vec k|^2}\,\rho(-\vec k)\rho(\vec k)\right\}$$

השתמשנו כבר כי $\quad \displaystyle\int d^2k\,\frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{|\vec k|^2} = 2\pi\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$ ולכן $\quad \displaystyle\frac{1}{|\vec k|^2} = \int\frac{d^2r}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)e^{-i\vec k\cdot\vec r}$

כדי לראות שמתרכזים הכולל N ב $\vec k=0$ קבוע המגע ב Φ_g נכפיל N ב ρ את צריך המשוואה:

$$-\pi\tilde\phi\sum_{\vec k}\frac{1}{|\vec k|^2}\rho(-\vec k)\rho(\vec k) \longrightarrow -\pi\tilde\phi\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\int d^2r\,d^2r'\,d^2r''\ \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{r_0}{|\vec r''|}\right)\times$$
$$\times\,[\rho(\vec r)-\bar\rho]\,[\rho(\vec r')-\bar\rho]\ e^{i\vec k(\vec r-\vec r'-\vec r'')}$$

$$= \frac{\tilde\phi}{2}\int d^2r\,d^2r'\ [\rho(\vec r)-\bar\rho]\ \ln\frac{|\vec r-\vec r'|}{r_0}\ [\rho(\vec r')-\bar\rho]$$

$$= \frac{\tilde\phi}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\ln|\vec r_i-\vec r_j| - \bar\rho\tilde\phi\sum_i\int d^2r\,\ln|\vec r-\vec r_i| + \text{const}$$

האינטגרל בסכום השני מתבדר וכדי לחשב נבודד ממנו את האיבר המתבדר שאינו תלוי ב $\vec{r}_i$:

$$\int d^2r \ln \frac{|\vec{r}-\vec{r}_i|}{|\vec{r}|} = \int_0^\infty r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r^2+r_i^2-2rr_i\cos\varphi}{r^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty r\,dr \cdot 2\pi \ln\left(\frac{r_i}{r}\right) \underbrace{\theta\left(\frac{r_i}{r}-1\right)}_{\text{פונקצית מדרגה}}$$

$$= 2\pi r_i^2 \int_0^1 x\,dx \ln\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\pi}{2} r_i^2$$

$$\Leftarrow \quad \Phi_g(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = C \prod_{i<j} |\vec{r}_i-\vec{r}_j|^{\frac{1}{\nu}} \, e^{-\frac{1}{4\ell^2}\sum_i |\vec{r}_i|^2}$$

לבסוף כדי לקבל את פונקצית הגל הנכונה עלינו להכפיל ב $U = e^{i\sum_{i<j} \frac{1}{\nu}\alpha_{ij}}$

בהגדרת המשתנה $z_i = x_i + iy_i$ יש לנו

$$z_i - z_j = |\vec{r}_i-\vec{r}_j| \, e^{i\alpha_{ij}}$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_i-\vec{r}_j| = |z_i-z_j|$$

$$i\alpha_{ij} = \ln\left(\frac{z_i-z_j}{|z_i-z_j|}\right)$$

כך שלבסוף

$$\Psi_g(z_1 \dots z_N) = C \prod_{i<j} (z_i-z_j)^{1/\nu} \, e^{-\frac{1}{4\ell^2}\sum_i |z_i|^2}$$

וזו מציין פונקצית Laughlin עבור השבר $\nu = \frac{1}{2k+1}$