נעבור כעת לדוגמה פשוטה של localized impurity ב spinless T-L model.

$$\mathcal{L}_0 = -i\partial_x\theta\,\partial_\tau\phi + \frac{v}{2}\left[K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2\right]$$ הבסיס מבנה

נניח כי ה impurity ממוקם ב $x=0$ ומעורר תהליך forward scattering $L\to L$ ו $R\to R$
בנוסף הוא גורם גם לתהליך backward scattering $L\to R$ ו $R\to L$ בעזרת רכיב $2k_F$ שלו.

$$\mathcal{L}_{imp} = \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(x)\Big\{\tilde{V}_f\left[\psi_R^\dagger(x+\varepsilon)\psi_R(x-\varepsilon) + \psi_L^\dagger(x+\varepsilon)\psi_L(x-\varepsilon)\right]$$
$$+ \tilde{V}_b\left[\psi_R^\dagger(x+\varepsilon)\psi_L(x-\varepsilon) + \psi_L^\dagger(x+\varepsilon)\psi_R(x-\varepsilon)\right]\Big\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(x)\left\{-\frac{\tilde{V}_f}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi + \frac{\tilde{V}_b}{2\pi\alpha}\left[e^{i\sqrt{\pi}(\phi(x+\varepsilon)+\phi(x-\varepsilon))} + h.c\right]\right\}$$

ניתן להיפטר מה forward scattering ע"י הגדרת השדה המוזז

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \frac{K}{2v}\frac{\tilde{V}_f}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sign}(x)$$

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{imp} = -i\partial_x\theta\partial_\tau\tilde{\phi} + \frac{v}{2}\left[K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\tilde{\phi})^2\right] + V_b\,\delta(x)\cos\left[2\sqrt{\pi}\tilde{\phi}(x)\right] + \text{c-number function}$$

כשבוחרים $F_R^\dagger F_L = 1$ מקבלים $V_b = \frac{\tilde{V}_b}{\pi\alpha}$ כאשר הוא מימד של אנרגיה.

נבצע אינטגרציה על θ לקבל

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{imp} = \frac{v}{8\pi K}\left[\left(\frac{\partial_\tau\phi}{v}\right)^2 + (\partial_x\phi)^2\right] + V_b\,\delta(x)\cos\phi$$

כשמגדירים $\phi = 2\sqrt{\pi}\tilde{\phi}$

מכיון שהצימוד הוא לשדה ב L ממוקם בנקודה $\phi(x=0)$ ניתן לבצע אינטגרציה על כל
השדות המוגדרים $\phi(x\neq 0)$ כדי לקבל פעולה אפקטיבית ל $\phi(x=0)$. דהיינו השדות $\phi(x\neq 0)$
משמשים מעין של אמבט חום

$$Z = \int D\phi(x,\tau)\, e^{-\int_0^\beta d\tau\, L}$$

$$= \int D\phi(x,\tau)\, D\varphi(\tau)\, \delta\left[\varphi(\tau) - \phi(0,\tau)\right] e^{-\int_0^\beta d\tau\, L}$$

$$= \int D\phi(x,\tau)\, D\varphi(\tau)\, D\lambda(\tau)\; e^{-\int_0^\beta d\tau \left[L + i\lambda(\tau)\left(\varphi(\tau) - \phi(0,\tau)\right)\right]}$$

$$\equiv \int D\varphi(\tau)\, e^{-S_{eff}[\varphi(\tau)]}$$

מכיון שהכנסנו את האילוץ $\delta[\varphi(\tau)-\phi(0,\tau)]$ ניתן להחליף את $\phi(0,\tau)$ בתוך L_{imp}
באמצעות $\varphi(\tau)$. לאחר שעושים את האינטגרל המלא על $\phi(0,\tau)$ הינו

$$\int_0^\beta d\tau \left[L_0 - i\lambda(\tau)\phi(0,\tau)\right]$$

$$= \sum_{\omega_n}\sum_q \left\{ \frac{\omega_n^2 + v^2 q^2}{8\pi K v} \phi(q,i\omega_n)\phi(-q,-i\omega_n) - \frac{i}{2\sqrt{L}}\left[\lambda(i\omega_n)\phi(-q,-i\omega_n) + \phi(q,i\omega_n)\lambda(-i\omega_n)\right]\right\}$$

כאשר $\phi(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{L\beta}} \sum_{q\omega_n} e^{i(qx-\omega_n\tau)}\phi(q,i\omega_n)$

$$= \frac{1}{L}\sum_{\omega_n}\sum_q \frac{2\pi K v}{\omega_n^2 + v^2 q^2}\lambda(i\omega_n)\lambda(-i\omega_n)$$

: integrating out ϕ

בגבול $L\to\infty$

$$\frac{1}{L}\sum_q \frac{2\pi K v}{\omega_n^2 + v^2q^2} \longrightarrow \int dq \frac{Kv}{\omega_n^2 + v^2q^2} = \frac{\pi K}{|\omega_n|}$$

(חישוב המדויק עבור L סופי נותן את הנוסח: $-\frac{2\pi K v}{L}\frac{1}{\omega^2}\tanh\left(\frac{\omega L}{\pi v}\right)$)

לכן האיבר בפעולה המכיל את λ הינו:

$$\sum_{\omega_n}\left\{\frac{\pi K}{|\omega_n|}\lambda(i\omega_n)\lambda(-i\omega_n) + \frac{i}{2}\left[\lambda(i\omega_n)\varphi(-i\omega_n) + \varphi(i\omega_n)\lambda(-i\omega_n)\right]\right\}$$

לבסוף לאחר האינטגרציה על ג נקבל את הפעולה האפקטיבית

$$S_{eff} = \sum_{\omega_n} \frac{|\omega_n|}{4\pi K} \varphi(i\omega_n)\varphi(-i\omega_n) + V_b \int_0^\beta d\tau \cos\varphi(\tau)$$

הצלחנו לכן להציג את הבעיה כבעיה של חלקיק נקודתי בפוטנציאל $V_b \cos\varphi$ בנוכחות דיסיפציה עם מקדם חיכוך $\eta = \frac{1}{4\pi K}$

נבצע כעת את הפעולה האפקטיבית בעזרת שימוש ב RG. התורה שלנו מוגדרת עם cutoff באנרגיה הניתן בקירוב ע"י $\Lambda \sim \frac{v}{\alpha}$. נתחיל בניתוח הבעיה בגבול הצימוד החלש $V_b \ll \Lambda$ בו נטפל באיבר הקוסינוס בצורה הפרטורבטיבית.

נגדיר

$$\varphi_<(i\omega_n) = \varphi(i\omega_n) \quad |\omega_n| < \Lambda - d\Lambda$$

$$\varphi_>(i\omega_n) = \varphi(i\omega_n) \quad \Lambda - d\Lambda < |\omega_n| < \Lambda$$

$$Z = \int D\varphi_< D\varphi_> e^{-S_{eff}(\varphi_<,\varphi_>)}$$

$$\simeq Z_> \int D\varphi_< e^{-\sum_{|\omega_n|<\Lambda-d\Lambda} \frac{|\omega_n|}{4\pi K} \varphi_<(i\omega_n)\varphi_<(-i\omega_n)}$$

$$\times \frac{1}{Z_>} \int D\varphi_> e^{-\sum_{\Lambda-d\Lambda<|\omega_n|<\Lambda} \frac{|\omega_n|}{4\pi K} \varphi_>(i\omega_n)\varphi_>(-i\omega_n)} \left[1 - V_b \int_0^\beta d\tau \cos(\varphi_< + \varphi_>)\right]$$

$$= Z_> \int D\varphi_< e^{-\sum_{|\omega_n|<\Lambda-d\Lambda} \frac{|\omega_n|}{4\pi K} \varphi_<(i\omega_n)\varphi_<(-i\omega_n)} \left[1 - \frac{V_b}{2} \int_0^\beta d\tau \left(e^{i\varphi_<(\tau)} \langle e^{i\varphi_>(\tau)} \rangle_> + e^{-i\varphi_<(\tau)} \langle e^{-i\varphi_>(\tau)} \rangle_>\right)\right]$$

$$= Z_> \int D\varphi_< e^{-\sum_{|\omega_n|<\Lambda-d\Lambda} \frac{|\omega_n|}{4\pi K} \varphi_<(i\omega_n)\varphi_<(-i\omega_n)} \left[1 - V_b \int_0^\beta d\tau \cos\varphi_<(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi_>^2(\tau) \rangle_>}\right]$$

מכיון ש $\langle \varphi_>^2(\tau) \rangle_> = 2K \frac{d\Lambda}{\Lambda}$ הרי שאם נגדיר את קבוע הצימוד חסר המימדים $y = \frac{V_b}{\Lambda}$

נקבל

$$V_b(\Lambda - d\Lambda) = V_b(\Lambda) e^{-K\frac{d\Lambda}{\Lambda}} \simeq V_b(\Lambda)\left(1 - K\frac{d\Lambda}{\Lambda}\right)$$

$\Leftarrow$ מכיון שאנו $d\Lambda = |d\Lambda|$

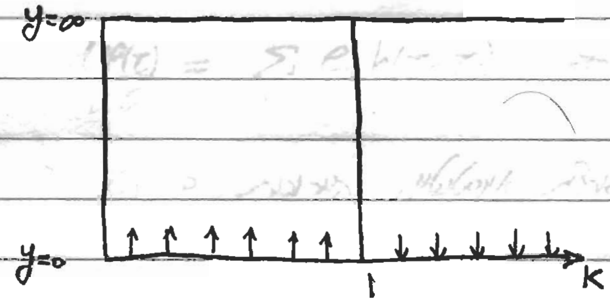
$$y(\Lambda - d\Lambda) = y(\Lambda)\left[1 + (1-K)\frac{d\Lambda}{\Lambda}\right]$$

נגדיר $\Lambda = \Lambda_0 e^{-l} \Leftarrow \frac{d\Lambda}{\Lambda} = dl$ נקבל

$$y(l + dl) = y(l)\left[1 + (1-K)dl\right]$$

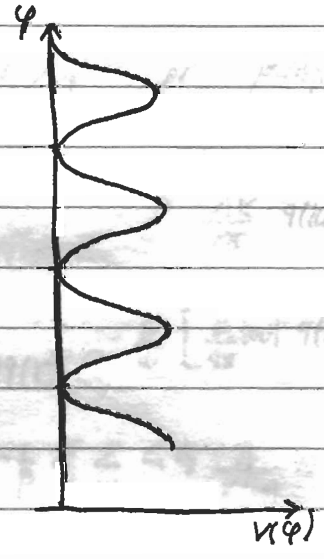
$$\frac{dy}{dl} = (1-K)y \quad \Leftarrow$$

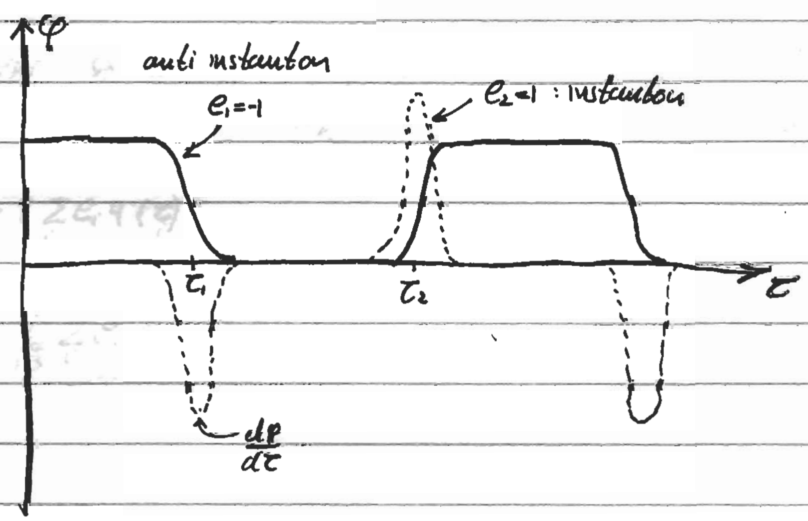
(בגבול של l גדול ה cutoff Λ קטן). אנו מגיעים לכן למסקנה כי הפוטנציאל המחזורי הופך לחשוב יותר באנרגיות נמוכות עבור $K<1$: אינטראקציה דוחה והיא רלוונטית עבור $K>1$: אינטראקציה מושכת



האם ניתן לומר דבר מה על גבול הצימוד החזק $\frac{V_0}{\Lambda} = y \gg 1$? התשובה היא חיובית ונוביל תשמש לנו כבסיס למושג הדואליות (duality)

בגבול $\Lambda \ll V_0$ φ כמעט תמיד ממוקם באחד מהמינימה של הפוטנציאל $\cos\varphi$. tunneling בין המינימום מתרחש בעזרת קפיצה מהירה $Z \propto e^{-S_{inst}}$ כאשר S_{inst} היא הפעולה של האינסטנטון (instanton). זהו פתרון למשוואות התנועה הקלאסיות בזמן מדומה המקבלות מינימום של S_{eff} המתאר מעבר בין שני מינימום שונים. (הפתרון הוא על S_{eff} בלי אבר הדינמיקה כך שכדי לקבל דינמיקה אבר מיוצג $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ צריך להוסיף ב S_{eff}). מכיוון שה instanton הינו פתרון של משוואות התנועה הוא מביא את הפעולה למינימום ולכן משקלו גדול בסכום כיוון. בהנחה שה instantons דלילים מספיק בזמן ניתן לבצע הערכה של המעבר כ tunneling ע"י gas של אינסטנטונים בלתי תלויים.





כעקרון הפתרון הוא לסכם על פני כל ההיסטוריות מאוזנות ה tunneling האפשריים:

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\{e_i\}} \int_0^{\beta} d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1\, e^{-S_{dissipation}}$$

כאשר τ_i הוא מיקומו בזמן של האינסטנטון ה i ו $e_i=\pm1$ מטענו הטופולוגי.
האיבר $e^{-S_{diss}}$ מציג אינטראקציה בין אינסטנטונים. מכיון שאנו יודעים כי הם דלתא בזמן נוכל לרשום

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}=\sum_i e_i h(\tau-\tau_i) \Rightarrow -i\omega\varphi(i\omega)=\sum_i e_i h(i\omega) e^{i\omega\tau_i}$$

כאשר $h(\tau-\tau_1)$ הוא הצורה המדויקת של קונפיגורציית אינסטנטון, הממורכזת ב τ_1
ו $h(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int d\tau\, e^{i\omega\tau} h(\tau)$

בגבול $\omega\to0$

$$h(i\omega)\to\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int d\tau\, h(\tau)=\frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}$$

ו

$$S_{diss}=\sum_{i\omega}\frac{|\omega|}{4\pi K}\frac{1}{\omega^2}\sum_{ij} e_i e_j h(i\omega)h(-i\omega)e^{i\omega(\tau_i-\tau_j)}$$

$$\xrightarrow{\text{small }\omega} \sum_{ij} F(\tau_i-\tau_j)\, e_i e_j$$

כאשר

$$F(\tau_i-\tau_j)=\frac{1}{\beta}\sum_{i\omega}\frac{\pi}{K}\frac{1}{|\omega|}e^{i\omega(\tau_i-\tau_j)} \xrightarrow{\tau_i\gg\tau_j} \sim \ln|\tau_i-\tau_j|$$

$$Z=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\{e_i\}} \int_0^{\beta} d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1\, e^{-\sum_{ij} e_i e_j F(\tau_i-\tau_j)}$$

זוהי ה grand-partition function של גז חלקיקים טעונים קלאסיים עם אינטראקציה לוגריתמית.
במקרה שלנו z= fugacity of the charges.

בצורה אחרת נשתמש בזהות

$$\int D\varphi(\tau)\, e^{-\sum_{\omega}\frac{|\omega|K}{4\pi}\varphi(i\omega)\varphi(-i\omega)+i\sum_i e_i\varphi(\tau_i)}$$

$$=\int D\varphi(\tau)\, e^{-\sum_{\omega}\left[\frac{K}{4\pi}|\omega|\varphi(i\omega)\varphi(-i\omega)+\frac{i}{\sqrt{\beta}}\sum_i e_i e^{-i\omega\tau_i}\varphi(i\omega)\right]}$$

$$=e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{ij}\sum_{\omega} e_i e_j \frac{\pi}{K|\omega|}e^{i\omega(\tau_i-\tau_j)}}$$

$$Z=\int Dq\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{\{e_i\}}\int_0^{\beta}d\tau_n\cdots\int_0^{\tau_2}d\tau_1\,e^{-\sum_\omega\frac{K}{4\pi}|\omega|\,q(i\omega)q(-i\omega)+i\sum_i e_i\,q(\tau_i)}$$ נקבל:

$$=\int Dq\,e^{-\sum_\omega\frac{K}{4\pi}|\omega|\,q(i\omega)\,q(-i\omega)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(2\int_0^{\beta}d\tau\cos q(\tau)\right)^n$$

$$=\int Dq\,e^{-\sum_\omega\frac{K}{4\pi}|\omega|\,q(i\omega)\,q(-i\omega)+2z\int_0^{\beta}d\tau\cos q(\tau)}$$

הגענו לכן כמעט של המודל למודל הפוך ל Self אבל קיבלנו בגבול הצימוד החזק את תמונת
הצמדים: duality

$\varphi(\tau)\rightarrow q(\tau)$ weak coupling $\leftrightarrow$ strong coupling

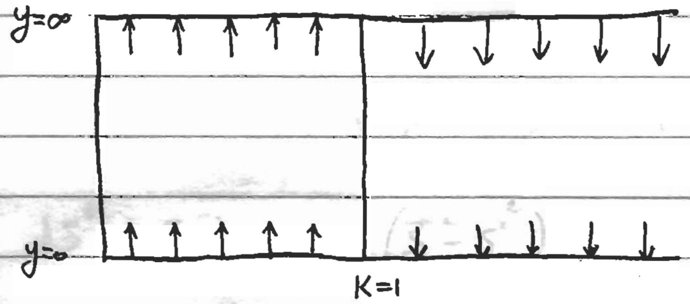
K גדול   K קטן

$K\rightarrow\frac{1}{K}$ large (small) dissipation $\leftrightarrow$ small (large) dissipation

$V_b\rightarrow 2z$ potential strength $\leftrightarrow$ tunneling probability

תוך שימוש בתוצאות נראה ה RG עבור צימוד חלש אנו מסיקים כי z רלוונטי עבור
$K>1$: אלגברי ה tunneling הופך רלוונטי יותר עבור אינטראקציות מושכות :
כלומר, V_b נעשה פחות רלוונטי.
עבור $K<1$ z הינו אי רלוונטי ומשמעות הדבר בתמונה הדואלית כי V_b גדל.

שילוב נתוני ה RG של הבעיה בגבול הצימוד החלש והחזק נותן לכן את תמונת
הזרימה הבאה:



נתבונן ב $S=\frac{1}{2}$ XXZ model שרשרת חד מימדית של ספינים

$$H = \sum_i J_{xy} \left(S_{i+1}^x S_i^x + S_{i+1}^y S_i^y \right) + J_z S_{i+1}^z S_i^z$$

כאשר $\vec{S}_i$ הינו אופרטור המתאר ספין 1/2 באתר ה i כאשר רכיביו מקיימים

ספינים על אתרים שונים מתחלפים זה עם זה:

$$\left[S_i^\alpha , S_j^\beta \right] = i \delta_{ij} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_i^\gamma$$

1. ניתן לראות בקלות כי הטרנספורמציה

$$S_i^x \rightarrow (-1)^i S_i^x$$
$$S_i^y \rightarrow (-1)^i S_i^y$$
$$S_i^z \rightarrow S_i^z$$

שומרת על יחסי החילוף של האופרטורים (היא קנונית) אך גוררת שינוי בסימן האיבר J_{xy} בהמילטוניאן, לכן אין משמעות לסימנו של J_{xy} ואנו נבחר אותו להיות סל J_{xy}.

2. במונחי אופרטורי ההעלאה וההורדה $S^\pm = S^x \pm i S^y$ (S^+ מעלה $\downarrow$ ל $\uparrow$ ו S^- $\uparrow$ ל $\downarrow$) ההמילטוניאן הינו

$$H = \frac{J_{xy}}{2} \sum_i \left(S_{i+1}^+ S_i^- + h.c \right) + J_z \sum_i S_{i+1}^z S_i^z$$

אם נחשוב על S_i^z כ"קואורדינטה" $S_i^\pm$ מבנה אזה דומה לבעיות תנע צמוד. לכן האיבר הפרופורציוני ל J_{xy} בודל כאיבר "אנרגיה קינטית" הגורם לפלקטואציות קוונטיות של S_i^z והאיבר הפרופורציוני ל J_z ממלא תפקיד של "אנרגיה פוטנציאלית" המבקשת לסדר את רכיבי z של הספינים.

3. עבור אופרטורי ספין 1/2 נקבל את יחסי האנטי קומוטציה הבאים על אותו אתר:

$$\left\{ S^+ , S^- \right\} = 2\left(\vec{S}^2 - S^{z^2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) = 1$$

$$\left\{ S^+ , S^z \right\} = 2\left(S^z - \frac{1}{2} \right) S^+ = 0$$

$$\left\{ S^- , S^z \right\} = 2\left(S^z + \frac{1}{2} \right) S^- = 0$$

עבור ספין 1/2 !

עובדה המצביעה על אנלוגיה בין אופרטורי יצירה וחיסול פרמיונים:

$$S_i^+ = c_i^+ \quad , \quad S_i^- = c_i \quad , \quad S_i^z = c_i^+ c_i - \frac{1}{2}$$

הבעיה עם הזהות הנ"ל היא העובדה שאופרטורי ספין על אתרים שונים מתחלפים זה עם זה בעוד שבמקרה הזה הם מקיימים יחסי <u>אנטי</u> קומוטציה. הפתרון לבעיה זו נמצא על ידי Jordan and Wigner שהציעו

$$S_i^+ = c_i^+ K_i = K_i c_i^+$$

$$S_i^- = K_i c_i = c_i K_i$$

$$S_i^z = c_i^+ c_i - \frac{1}{2}$$

כאשר K_i הינו אופרטור לא-לוקלי המוגדר כ:

$$K_i = K_i^+ = e^{i\pi \sum_{j=-\infty}^{i-1} c_j^+ c_j} = e^{i\pi \sum_{j=-\infty}^{i-1} \left(S_j^z + \frac{1}{2}\right)}$$

$$K_i^2 = 1 \quad , \quad [K_i, K_j] = 0$$

קל לראות כי K_i הוא string operator אשר משנה את סימן הפונקציה בין אופרטורי ספין על אתר אחר וכי כמו שציפינו

$$[S_i^+, S_j^z] = [S_i^-, S_j^z] = 0$$

אך עבור $i<j$:

$$[S_i^+, S_j^-] = c_i^+ K_i K_j c_j - K_j c_j c_i^+ K_i$$

$$\| $$

$$c_i^+ K_j K_i c_j$$

$$\|$$

מכיון ש $i<j$, c_j^+ לא מושפע ב K_i:

$$c_i^+ K_j c_j K_i$$

$$\|$$

יש לשלוף בין c_i^+ ל $e^{i\pi c_i^+ c_i}$ שב K_j עם המינוס:

$$- K_j c_i^+ c_j K_i$$

$$\|$$

$$K_j c_j c_i^+ K_i$$

וקיבלנו את יחסי הקומוטציה הנדרשים.

האופרטורים הפרמיוניים $c_i^+ = S_i^+ K_i$, $c_i = S_i^- K_i$ יוצרים לנו kinks בפונקציית הגל כך שכל אתר עם קו חוץ spin up משמאל לאתר ה-i הופך את סימנו, או לחילופין הם מסובבים ב-π ~~את הספינים~~ מסביב לציר z את כל הספינים משמאל לאתר ה-i $S^y \to -S^y$, $S^x \to -S^x$.

תוך שימוש בטרנספורמציית Jordan-Wigner נקבל

$$S_{i+1}^+ S_i^- = c_{i+1}^+ K_{i+1} K_i c_i = c_{i+1}^+ e^{i\pi c_{i+1}^+ c_{i+1}} c_i = c_{i+1}^+ c_i$$

פתח את האקספוננט

ולכן

$$H = \frac{J_{xy}}{2} \sum_i \left(c_{i+1}^+ c_i + h.c\right) + J_z \sum_i \left(c_{i+1}^+ c_{i+1} - \frac{1}{2}\right)\left(c_i^+ c_i - \frac{1}{2}\right)$$

כדי לקבל סימן מינוס יותר לאיבר הקינטי בתנועת הפרמיונים נבצע

$$c_i \to (-1)^i c_i$$

כך ש

$$H = -\frac{J_{xy}}{2} \sum_i \left(c_{i+1}^+ c_i + h.c\right) + J_z \sum_i \left(c_{i+1}^+ c_{i+1} - \frac{1}{2}\right)\left(c_i^+ c_i - \frac{1}{2}\right)$$

שרשרת הספינים שלנו אקוויוולנטית לשרשרת של פרמיונים חסרי ספין המדלגים בין אתרים שכנים עם אמפליטודה $t = \frac{J_{xy}}{2}$ ועוברים אינטראקציה בין אתרים שכנים עם חוזק $V = J_z$.

קל לראות כי במצב שלנו

$$\langle S^z \rangle = \left\langle c_i^+ c_i - \frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

זאת מכיוון שאם נבצע את הטרנספורמציה הקנונית (particle-hole)

$$c_i \to (-1)^i \tilde{c}_i^+$$

particle-hole symmetric

$$c_i^+ c_i - \frac{1}{2} \to -\tilde{c}_i^+ \tilde{c}_i + \frac{1}{2}$$

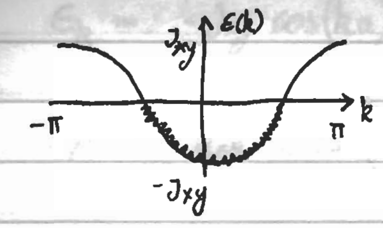
H לא ישתנה במונחי ה-$\tilde{c}_i$ לכן

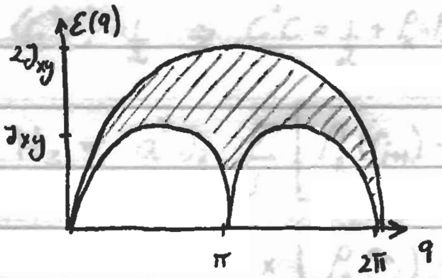
$$\left\langle c_i^+ c_i - \frac{1}{2} \right\rangle_H = -\left\langle \tilde{c}_i^+ \tilde{c}_i - \frac{1}{2} \right\rangle_H = 0$$

ולכן

כלומר הפס הפרמיוני: חצי מלא $\langle c_i^+ c_i \rangle = \frac{1}{2}$.

מיפוי Jordan-Wigner מאפשר לנו לפתור מיד את המקרה $J_z=0$ (ה- XY chain). שם
הוא מעתיק לפרמיונים חופשיים. מצב היסוד הינו ים פרמי המלא עד מומנט הפרמי.





העירורים הינם עירורים בעלי אופי פרמיוני (אלקטרון-חור)
דבר זה מפתיע מפני שמיחסי החילוף בין אופרטורי הספין
היינו יכולים לצפות לאופי בוזוני של העירורים.

מספר קורלציות ניתנות לחישוב באופן מידי. לדוגמא

$$\langle S_i^z S_j^z \rangle = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{1-(-1)^{i-j}}{(i-j)^2}$$

שכן $\langle S^z(x,t)\,S^z(0,0)\rangle = \langle \rho(x,t)\rho(0,0)\rangle$ ועבור פרמיונים חופשיים פונקצית קורלציה זו דועכת כ $\frac{1}{r^2}$.
לעומת זאת פונקציות קורלציה של S^+S^- מערבות את ה string operators ולכן קשות לחישוב.
נראה כיצד ניתן לחשב את התנהגותן האסימפטוטית שלהן על ידי בוזוניזציה של המודל.
לפני שעושים זאת, אציין שטרנספורמציית Jordan-Wigner ניתנת להכללה לממדים גבוהים יותר.
יש למצוא נתיב חד ממדי העובר דרך כל אתרי השריג באופן חד ערכי כדי להגדיר את ה string.
הבעיה היא כמובן שאופרטורים לוקליים במונחי הספינים המקוריים הופכים לא-לוקליים מכיוון
שבאופן כללי הם יערבו אופרטורי string - שני אתרים קרובים על השריג המקורי עלולים להיות
רחוקים על הנתיב החד-ממדי המגדיר את הטרנספורמציה.

לצורך בוזוניזציה נעבור את גבול הרצף באמצעות ההגדרה

$$S^+(x) = \frac{S_i^+}{\sqrt{a}}$$

$$S^z(x) = \frac{S_i^z}{\sqrt{a}}$$

כאשר a הינו קבוע השריג של המערכת.

ו- C כפרמיונים חופשיים

$$\Psi(r_j) = \frac{C_j}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{Na}}\sum_k e^{ikr_j} C_k$$

$r_j = ja \quad , \quad k\in\left[-\frac{\pi}{a},\frac{\pi}{a}\right]$

מספר האתרים בשריג

$$H_{XY} = \sum_k \epsilon_k C_k^\dagger C_k$$ החלק הקינטי מלמעלה:

$$\epsilon_k = -J_{xy}\cos(ka)$$ כאשר

$$v_F = J_{xy}\, a \sin(k_F a)$$ כך ש[illegible]

כאשר אנחנו $k_F = \dfrac{\pi}{2a}$. אבל האינטראקציה היא: נשתמש בגבול $\langle C^\dagger C\rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow C^\dagger C = \frac{1}{2} + \rho_R + \rho_L + \dots e$

$$H_z = a^2 J_z \sum_j \left[\rho_R(r_{j+1}) + \rho_L(r_{j+1}) + \left(e^{-2ik_F r_{j+1}}\psi_R^\dagger(r_{j+1})\psi_L(r_{j+1}) + h.c\right)\right]$$
$$\times\left[\rho_R(r_j) + \rho_L(r_j) + \left(e^{-2ik_F r_j}\psi_R^\dagger(r_j)\psi_L(r_j) + h.c\right)\right]$$
$$\longrightarrow a J_z \int dx \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi(x+a) + \left(e^{-2ik_F(x+a)}\frac{1}{2\pi\alpha}e^{2i\sqrt{\pi}\phi(x+a)} + h.c\right)\right]$$
$$\times\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi(x) + \left(e^{-2ik_F x}\frac{1}{2\pi\alpha}e^{2i\sqrt{\pi}\phi(x)} + h.c\right)\right]$$

כאשר $\alpha \simeq a$

נשתמש ב $$\partial_x\phi(x+a)\,\partial_x\phi(x) \simeq \left[\partial_x\phi(x)\right]^2$$

$$\frac{1}{(2\pi a)^2}e^{-2ik_F a}e^{2i\sqrt{\pi}[\phi(x+a)-\phi(x)]} \simeq \frac{e^{-2ik_F a}}{(2\pi a)^2}\left[1 + 2i\sqrt{\pi}a\,\partial_x\phi(x) - 2\pi a^2\left[\partial_x\phi(x)\right]^2\right]$$

שימו לב כי איבר ב מכיל מכפלות $\psi_R^\dagger(x+a)\psi_L(x+a)\psi_L^\dagger(x)\psi_R(x)$ קרוב לזה עם k הבודד

הולך שמשמעו $\xrightarrow{a\to 0} -\psi_R^\dagger(x)\psi_R(x)\psi_L^\dagger(x)\psi_L(x) = -\rho_R(x)\rho_L(x) = -\frac{1}{\pi}\left[(\partial_x\phi)^2 - \frac{1}{\pi}(\partial_x\Theta)^2\right]$

אין תשובה שאלה של [illegible] $(\partial_x\Theta)^2$. מכך שאנו האינטראקציה מלשון ההרמוניות אלו הקבועות

ההרמוניות, הוא לכתוב למחזור [illegible]. שכן שבשבצות [illegible] ~ מאחר המבט בה Θ [illegible]

לבלבל ב H_z. הבעיה היא שבאמת [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] $e^{\pm 2ik_F x}$ [illegible]

עובדים ב half-filling : $k_F = \frac{\pi}{2a}$ ולכן עבור $x = ja$ כך ש- $4k_F x = 2\pi j$

ולכן אנו לשמור האיבר הפרופורציונלי ל $e^{\pm 4ik_Fx}$ המתנדנד

$$\cos\left[2\sqrt{\pi}\left(\phi(x+a)+\phi(x)\right)\right] \approx \cos\left[4\sqrt{\pi}\phi(x)\right]$$

שים לב גם שהכרחי לשמור את התיקון $e^{\pm 2ik_Fa} = -1$ כדי לקבל את הסימן המינוס לאיבר זה.

נקבל לבסוף:

$$H_z = aJ_z \int dx \frac{1}{\pi}\left[1-\cos(2k_Fa)\right]\left[\partial_x\phi(x)\right]^2 - \frac{2}{(2\pi a)^2}\cos\left[4\sqrt{\pi}\phi(x)\right]$$

ולכן עבור ההמילטוניאן כולו

$$H_{xxz} = H_{TL} - \frac{2g_3}{(2\pi a)^2}\int dx \cos\left[4\sqrt{\pi}\phi(x)\right]$$

עם

$$vK = v_F = J_{xy}\, a \sin(k_Fa)$$

$$\frac{v}{K} = v_F\left[1 + \frac{2J_za}{\pi v_F}\left[1-\cos(2k_Fa)\right]\right]$$

$$g_3 = aJ_z$$

נוכל להביא את ההמילטוניאן הנ"ל לאותה צורה כמו אותה נקבל עבור סקטור הספין בנוכחות backward scattering ע"י הטרנספורמציה

$$\phi = \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \sqrt{2}\tilde{\theta}$$

$$K = \frac{\tilde{K}}{2}$$

מתוך הניתוח שערכנו לגבי Sine-Gordon אנו יודעים כי איבר ה umklapp אינו רלוונטי עבור $\tilde{K} > 1$ כלומר $K > \frac{1}{2}$. במקרה זה המערכת זורמת ל gapless TL model עם $J_z = 0$. מכיוון ש $K=1$ היא הנקודה חסרת האינטראקציה המתאימה למודל XY פאזת ה TL מתוארת לכן כמודל XY.

עבור $K < \frac{1}{2}$ איבר ה umklapp רלוונטי ומשרה gap בספקטרום שלו. במקרה זה האיבר הדומיננטי היה זה הפרופורציוני ל J_z ולכן הוא מתאים ל Ising phase בכיוון Z.

הביטויים שקיבלנו עבור v ו-K נכונים בתחום הפרטורבטיבי: J_z קטן. המעבר ל-T-L model נכון
לכל תחום בתחום זה. מכיוון שמודל הספין שלנו ניתן לפתרון מדויק בשיטת Bethe-ansatz
ניתן לקבל ביטויים לפרמטרים אלה גם עבור J_z גדול (למעשה v/K מציין הקומפרסביליות ו-vK
מציין spin stiffness):

$$\cos \pi\beta^2 = -\frac{J_z}{J_{xy}}$$

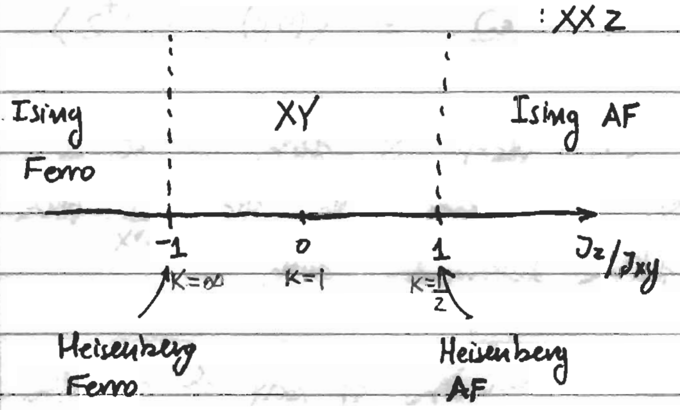
$$K = \frac{1}{2\beta^2} \quad , \quad v = \frac{1}{1-\beta^2} \sin\left[\pi(1-\beta^2)\right] \cdot \frac{J_{xy}}{2}$$

עבור $\frac{J_z}{J_{xy}} \ll 1$ אנו מקבלים את הביטויים שקיבלנו מתחילה בגלל הרצף שעשינו. ניתן לראות כי:

1. $K=\frac{1}{2}$ מתאים ל Heisenberg point: $J_{xy}=J_z$. זהו בדיוק הגבול בו אופרטור ה umklapp מרגינלי ומפריד בין פאזת ה XY ופאזת ה Ising כפי שראינו מקודם.

2. עבור הגבול של $J_z<0$ פרומגנטי: $J_z \to -J_{xy} < 0$: $K\to\infty$, $v \to 0$
הצד הפרומגנטי $J_z < -J_{xy}$ לכן אינו מודל ה-T-L. הדבר סביר מכיוון שבפרומגנט
מצבים לספקטרום עבור ספין של $\omega\sim k^2$ במקום היחס הליניארי אשר הונח במעבר ל-T-L.
ניתן לראות גם מהביטוי הפרטורבטיבי שקיבלנו שעבור $J_z<0$ וגדול מספיק קיימת אי יציבות: $\frac{v}{K}<0$.

קיבלנו לכן את דיאגרמת הפאזות הבאה לשרשרת XXZ:



מציאת הביטויים הבוזוניים ל S_z:

$$S_z = \rho - \frac{1}{2} = \rho_R + \rho_L + \left[e^{-2ik_F x}\psi_R^{\dagger}\psi_L + h.c\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi + \frac{1}{\pi a}\cos\left(2\sqrt{\pi}\phi - 2k_F x\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi + \frac{(-1)^x}{\pi a}\cos\left(2\sqrt{\pi}\phi\right) \qquad x=ja$$

ו S^+ צריך את פקטור לסימן ה string operator

$$e^{i\pi\sum_{j<i} c_j^\dagger c_j} = e^{i\pi\sum_{j<i}\frac{1}{2}+a\left[\rho_L(i)+\rho_R(i)\right]} = e^{i\frac{\pi}{2a}x}\, e^{i\pi\int_{-\infty}^{x}dx'\left[\rho_L(x')+\rho_R(x')\right]}$$

$$= e^{ik_F x}\, e^{-i\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{x}dx'\,\partial_{x'}\phi} = e^{ik_F x - i\sqrt{\pi}\phi(x)}$$

כשהזנחנו את $\phi(-\infty)$.

$$\Rightarrow S^+(x) = \left[e^{-ik_F x}\psi_R^\dagger(x) + e^{ik_F x}\psi_L^\dagger(x)\right]\cdot\frac{1}{2}\left[e^{ik_F x - i\sqrt{\pi}\phi(x)} + e^{-ik_F x + i\sqrt{\pi}\phi(x)}\right]$$

$$= \frac{e^{-i\sqrt{\pi}\theta(x)}}{\sqrt{2\pi a}}\left[1+(-1)^{\frac{x}{a}}\cos\left[2\sqrt{\pi}\phi(x)\right]\right]$$

כשהשתמשנו בצורה הסימטרית $\frac{1}{2}\left[e^{i\pi\sum_{j<i} c_j^\dagger c_j} + h.c\right]$ עבור ה string operator

בהצבת ביטויים אלה קל למצוא עבור ה LL : ה XY phase

$$\langle S^z(x,0)\, S^z(0,0)\rangle = \frac{C_1}{x^2} + C_2\frac{(-1)^x}{x^{2K}}$$

$$\langle S^+(x,0)\, S^-(0,0)\rangle = \frac{C_3}{x^{2K+\frac{1}{2K}}} + C_4\frac{(-1)^x}{x^{1/2K}}$$

במקרה XY הטהור $J_z=0$: $K=1$ ורכיבי $q=0$ ו $q=2k_F$ של קורלציות הספין בכיוון Z דועכים כ x^{-2}. לעומת זאת רכיב $q=2k_F$ של קורלציות הספין במישור דועך כ $\frac{1}{x^{1/2}}$ לעומת $\frac{1}{x^{3/2}}$ של רכיב $q=0$ $\Leftarrow$ לשלב XY קורלציות אנטיפרומגנטיות במישור.

עבור $K<1$ (דחייה בין הפרמיונים $J_z>0$) הקורלציות האנטיפרומגנטיות בין הספינים בכיוון Z גדלות ובנקודה האיזוטרופית $K=\frac{1}{2}$ הן דועכות כ x^{-1}. שים לב כי בנקודה זו פונקציות הקורלציה של רכיבי Z ו XY מתנהגות כנדרש.

עבור $K>1$ (משיכה בין הפרמיונים $J_z<0$) הרכיב הפרומגנטי ספין בכיוון Z הופך דומיננטי יותר.

כאשר $J_z > J_{xy}$: $K<\frac{1}{2}$ השדה ϕ מסודר כתוצאה מהפלקטואציות של אחד ה-[illegible].
כל הקורלציות במישור XY דועכות אקספוננציאלית מכיוון שהן תלויות ב- האופרטור θ והספין
לאורך ציר z מקבל את הערך הממוצע

$$\langle S^z \rangle = (-1)^x \langle \cos(2\sqrt{\pi}\phi) \rangle$$

סדר Ising זה של הספינים מתקיים כיוון שלשני המצבים יש אותה אנרגיה לכל שני אתרים:

$$\ldots \underset{\circ}{\uparrow} \downarrow \underset{\circ}{\uparrow} \downarrow \underset{\circ}{\uparrow} \ldots \quad \text{או} \quad \ldots \downarrow \underset{\circ}{\uparrow} \downarrow \underset{\circ}{\uparrow} \downarrow \ldots$$

שני המצבים מתאימים בהתאמה ל $\phi=0$ או $\phi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. המערכת שוברת סימטריה דיסקרטית
בדידה.

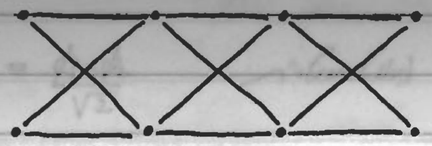
Haldane חקר בהגבלת ברבועות סמי-קלאסית של מודל סיגמא לא ליניארי את התנהגות של שרשראות
ספין שלם $n/2$. עוד לפנינו נעמוד השרשרת של $S=1$ בהגבלת הצגה של ספין 1
כסכום של שני ספין $1/2$ (Luther and Timonen 1985 Schulz 1986)

$$S_i = S_i^1 + S_i^2$$

ברור כי בהצגה כזו אנו מגדילים את מרחב ההילברט של הבעיה מכיוון שהוא מכיל שלושה
מצבי טריפלט עבור $S=1$ המקורי ואילו עבור סכום שני ספיני ה-$1/2$ אנו מקבלים מצב
סינגלט נוסף - רביעי מיותר. יחד עם זאת עבור השרשרת האנטיפרומגנטית

$$H = J \sum_i S_i \cdot S_{i+1}$$

אם $S_i=0$ (מצב סינגלט) השרשרת נקטעת למעשה לשתי שרשראות בלתי תלויות וזה
תואם אנרגטית של J. כתוצאה מכך המצב המישורי המוגדש מצגת הצגת הספין המקורי
כסכום של שני ספיני $1/2$ מצבים נפרדים בעלי אנרגיה מסדר גודל J ולכן עבור הרבה תכונות
המערכת לאנרגיות הנמוכות בהרבה מ-J ההצגה הזו רלוונטית. קושרת הצגה זו
אנו מקבלים כי בגבול האנרגיות הנמוכות שרשרת $S=1$ אנטיפרומגנטית אקוויוולנטית לסולם דו
רגלי של $S=1/2$ עם אינטראקציה אנטיפרומגנטית כמתואר לעיל:



מנמא סולם זה ניתן להראות כי מצב היסוד מורכב כולו ממצבי טריפלט מהצורה $\uparrow \; \downarrow \; \uparrow \; \downarrow$

וכי המצב המעורר הראשון מופרד ממנו על ידי פער מסדר גודל J. $\uparrow \; \downarrow \; \uparrow \; \downarrow$

ניתן להראות כי באופן כללי שרשרת ספינים חצי שלמים בנקודה האנטיפרומגנטית האיזוטרופית שלה תהיה gapless ואילו התואמת שרשרת ספין שלם תהא gapped

אנו נתבונן כעת בסולם דו-רגלי של ספינים $S=1/2$ עם ההמילטוניאן:

$$H = \sum_{\alpha=1,2} H_\alpha + J_\perp^{xy} \sum_j \left(S_{j1}^x S_{j2}^x + S_{j1}^y \cdot S_{j2}^y \right) + J_\perp^z \sum_j S_{j1}^z S_{j2}^z$$

כאשר H_α מתאר את כל אחת מהשרשראות המרכיבות את הסולם. לאחר שימוש בטרנספורמצית Jordan-Wigner לספינים על כל שרשרת בנפרד נקבל כי אברי האינטראקציה בין השרשראות הינם מהצורה

$$H_{int} = \int dx \; \frac{2g_1}{(2\pi a)^2} \cos\left[\sqrt{\pi}(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{2g_2}{(2\pi a)^2} \cos\left[2\sqrt{\pi}(\phi_1 - \phi_2)\right] + \frac{2g_3}{(2\pi a)^2} \cos\left[2\sqrt{\pi}(\phi_1 + \phi_2)\right]$$

$$+ \frac{J_\perp^z a}{\pi} \int dx \; \partial_x \phi_1 \, \partial_x \phi_2$$

כאשר ל H_α כבר מצאנו בעבר תיאור דמוי Hamiltonian TL ואברי אינטראקציה מהצורה $\cos\left[4\sqrt{\pi}\phi_{1,2}\right]$.

כאן

$$g_1 = \pi J_\perp^{xy} a$$

$$g_2 = g_3 = J_\perp^z a$$

למעשה מופיע ב H_{int} איבר נוסף מהצורה $\cos\left[\sqrt{\pi}(\theta_1 - \theta_2)\right] \cos\left[2\sqrt{\pi}\phi_1\right] \cos\left[2\sqrt{\pi}\phi_2\right]$

שבגלל מרגינליות אנו מוותרים על הוספתו שהצגנו לעיל.

על ידי מעבר לקומבינציות הסימטריות $\phi_s = \frac{\phi_1+\phi_2}{\sqrt{2}}$ והאנטיסימטריות $\phi_a = \frac{\phi_1-\phi_2}{\sqrt{2}}$

ההמילטוניאן ניתן לכתיבה כ:

$$H = H_s + H_a$$

$$H_s = \int dx\, \frac{v_s}{2}\left[K_s(\partial_x\theta_s)^2 + \frac{1}{K_s}(\partial_x\phi_s)^2\right] + \frac{2g_2}{(2\pi a)^2}\int dx\, \cos\left(\sqrt{8\pi}\phi_s\right)$$

$$H_a = \int dx\, \frac{v_a}{2}\left[K_a(\partial_x\theta_a)^2 + \frac{1}{K_a}(\partial_x\phi_a)^2\right] + \frac{2g_3}{(2\pi a)^2}\int dx\, \cos\left(\sqrt{8\pi}\phi_a\right) + \frac{2g_1}{(2\pi a)^2}\int dx\, \cos\left(\sqrt{2\pi}\theta_a\right)$$

$$v_{\substack{s\\a}} = v\left(1 \pm \frac{KJ_\perp^2 a}{2\pi v}\right)$$

עם עבור $J_\perp a \ll \frac{v}{K}$

$$K_{\substack{s\\a}} = K\left(1 \mp \frac{KJ_\perp^2 a}{2\pi v}\right)$$

כאשר v ו- K הגדלים המתארים את השרשראות הנפרדות.

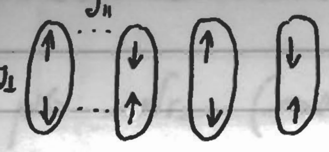
בהמילטוניאן הנ"ל השתמשנו מהצימוד $\cos\left(4\sqrt{\pi}\phi_{1,2}\right) = \cos\left[\sqrt{8\pi}(\phi_s \pm \phi_a)\right]$ המופיע בהמילטוניאן המתאר את השרשראות הנפרדות. שכן ניתן לראות שאין בכלל צימוד בין החלקים ב H_s+H_a.

החלק הסימטרי בהמילטוניאן נהפך להיות ה spin-Sine Gordon שקיבלנו לעיל והוא gapped עבור $K_s<1$. בנקודה האיזוטרופית (היינו אנטי פרומגנטית) $K_s=\frac{1}{2}$ והחלק הסימטרי מסדי (הביטוי הנ"ל ל $K_{s,a}$ נכון רק לסדר הראשון. הביטוי המדויק נותן כי $K_s=\frac{1}{2}$ אכן בנקודה האיזוטרופית).

החלק האנטי סימטרי מסובך יותר שכן הצימודים $\cos(\sqrt{2\pi}\theta_a)$ ו $\cos(\sqrt{8\pi}\phi_a)$ מתחרים זה בזה בנסיון לעשות pinning של שדות צמודים. $\cos(\sqrt{8\pi}\phi_a)$ רלוונטי עבור $K_a<1$ אולם $\cos(\sqrt{2\pi}\theta_a)$ רלוונטי עבור $K_a>\frac{1}{4}$. שני הצימודים רלוונטיים לכן בנקודה האיזוטרופית $K=\frac{1}{2}$. האיבר הרלוונטי יותר הוא זה המגיע לאחד הצימודים הגדול ראשון תחת RG והוא זה שיקבע את איזה שדה (ϕ או θ) יקבע. בכל מקרה החלק האנטי סימטרי יהיה gapped ולכן גם ההמילטוניאן כולו יהיה gapped לכל $J_\perp$ קטן כרצוננו.

באופן דומה למצב של Haldane עבור שרשראות הבין ניתן להראות כי סולמות עם מספר זוגי של רגליים יהיו gapped וסולמות עם מספר אי-זוגי של רגליים gapless.

ניתן להבין מדוע זה בגלל הזוגיות השונה בין הסולמות הזוגיים והאי-זוגיים בגבול הצימוד:



בסולם האנטיפרומגנטי הדו רגלי כל זוג ספינים נוטה ליצור סינגלט. עבור כל מצב זה עירור בהכרח הפרת אחד הסינגלטים לטריפלט עם תשלום אנרגיה של $J_\perp$

בסולם האנטיפרומגנטי התלת רגלי אחד הספינים על כל שלב של הסולם נשאר תמיד חופשי בעוד השניים האחרים יוצרים סינגלט והתמונה אקוויוולנטית לשרשרת אנטיפרומגנטית של ספין $1/2$ שהיא כידוע gapless.