נרצה כעת להכליל ספין במודל T-L. ה-left ו-right moving fermions יהיו כעת עם שני רכיבי ספין: ↑,↓. הדרך שנוכל לנצל היא להשתמש בבוזוניזציה לכל אחד מהם ונקבל עבור האופרטורים הפרמיוניים את ההצגה הבאה

$$\Psi_{\eta\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_{\eta\sigma} e^{i\eta(k_F + \frac{2\pi}{L}\hat{N}_{\eta\sigma})x} e^{-i\sqrt{\pi}[\eta\phi_\sigma(x) - \theta_\sigma(x)]} \qquad \sigma = \begin{cases} \uparrow, & 1 \\ \downarrow & -1 \end{cases}$$

כאשר ϕ_σ ו-θ_σ מוגדרים כבעבר דומה, עבור כל רכיב ספין, לכן הם תלויים במודל הספין.
נראה כי הפיסיקה הופכת לפשוטה יותר במונחי שדות חדשים המתארים את דרגות החופש הקשורות למטען ולספין בנפרד. נגדיר:

$$\phi_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_\uparrow(x) + \phi_\downarrow(x)\right] \qquad \theta_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\theta_\uparrow(x) + \theta_\downarrow(x)\right]$$

$$\phi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_\uparrow(x) - \phi_\downarrow(x)\right]. \qquad \theta_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\theta_\uparrow(x) - \theta_\downarrow(x)\right]$$

מתוך יחסי החילוף של ϕ_σ ו-θ_σ קל לבדוק ש

$$[\phi_c(x), \partial_{x'}\theta_c(x')] = [\phi_s(x), \partial_{x'}\theta_s(x')] = i\delta(x'-x)$$

$$[\phi_c(x), \partial_x\theta_s(x')] = [\phi_s(x), \partial_{x'}\phi_c(x')] = 0$$

במונחי השדות החדשים

$$\Psi_{\eta\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_{\eta\sigma} e^{i\eta(k_F + \frac{2\pi}{L}\hat{N}_{\eta\sigma})x} e^{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\theta_c - \eta\phi_c + \sigma(\theta_s - \eta\phi_s)](x)}$$

והמשמעות מתבררת אם נשים לב כי צפיפות המטען הכוללת וצפיפות רכיב z של הספין נתונות ע"י

$$\rho(x) = \rho_\uparrow(x) + \rho_\downarrow(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi_\uparrow + \partial_x\phi_\downarrow) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\partial_x\phi_c(x)$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\rho_\uparrow(x) - \rho_\downarrow(x)\right) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi_\uparrow - \partial_x\phi_\downarrow) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\partial_x\phi_s(x)$$

באופן דומה נמצא כי ההמילטוניאן החופשי נתון ע"י

$$H = \int dx \sum_{\sigma=\uparrow\downarrow} \frac{v_F}{2}\left[(\partial_x\theta_\sigma)^2 + (\partial_x\phi_\sigma)^2\right] = \int dx \sum_{\alpha=c,s} \frac{v_F}{2}\left[(\partial_x\theta_\alpha)^2 + (\partial_x\phi_\alpha)^2\right]$$

שימו לב כי ההמילטוניאן החופשי נפרד לשני חלקים בלתי תלויים המערבים את דרגות החופש של מטען וספין:

נראה כי תכונה זו של הפרדת מטען-ספין : spin-charge separation מתקיימת במודל T-L גם כאשר נכלל בו אינטראקציות.

נבדוק כל אינטראקציה לעירבול המצב אלקטרונים בעלי ספין דומה (∥) או הפוך (⊥). המוטיבציה: לאחר תיאור המצב כאשר מטריצת הספין נשמרת.

התהליכים מסוג g_4 הינם מתפצלים

$$\int dx \sum_{\eta\sigma}\left[\frac{g_{4\parallel}}{2}\rho_{\eta\sigma}(x)\rho_{\eta\sigma}(x) + \frac{g_{4\perp}}{2}\rho_{\eta\sigma}(x)\rho_{\eta-\sigma}(x)\right]$$

$$= \int dx \sum_{\sigma}\frac{g_{4\parallel}}{4\pi}\left[(\partial_x\theta_\sigma)^2+(\partial_x\phi_\sigma)^2\right] + \frac{g_{4\perp}}{4\pi}\left[\partial_x\theta_\sigma\,\partial_x\theta_{-\sigma}+\partial_x\phi_\sigma\,\partial_x\phi_{-\sigma}\right]$$

$$= \int dx\ \frac{g_{4\parallel}}{4\pi}\left[(\partial_x\theta_c)^2+(\partial_x\phi_c)^2+(\partial_x\theta_s)^2+(\partial_x\phi_s)^2\right] + \frac{g_{4\perp}}{4\pi}\left[(\partial_x\theta_c)^2-(\partial_x\theta_s)^2+(\partial_x\phi_c)^2-(\partial_x\phi_s)^2\right]$$

$$= \int dx\left\{\frac{g_{4\parallel}+g_{4\perp}}{4\pi}\left[(\partial_x\theta_c)^2+(\partial_x\phi_c)^2\right] + \frac{g_{4\parallel}-g_{4\perp}}{4\pi}\left[(\partial_x\theta_s)^2+(\partial_x\phi_s)^2\right]\right\}$$

באופן תהליכים מסוג g_2 מתפצלים לאחר אינטראקציה מפוצלת

$$\int dx \sum_{\sigma}\left[g_{2\parallel}\rho_{R\sigma}(x)\rho_{L\sigma}(x) + g_{2\perp}\rho_{R\sigma}(x)\rho_{L-\sigma}(x)\right]$$

$$= \int dx\left\{\frac{g_{2\parallel}+g_{2\perp}}{4\pi}\left[(\partial_x\phi_c)^2-(\partial_x\theta_c)^2\right] + \frac{g_{2\parallel}-g_{2\perp}}{4\pi}\left[(\partial_x\phi_s)^2-(\partial_x\theta_s)^2\right]\right\}$$

כשנכנסות ספין אפשריים תהליכי אינטראקציה, שבהם קיימת ממול ללא ספין, ושבהם אלקטרונים בעלי ספין הפוך מחליפים מסבב עקב הכנס את לנקודה הנגדית:

$$\int dx \sum_{\sigma}\left[g_{1\parallel}\psi^{\dagger}_{L\sigma}\psi^{\dagger}_{R\sigma}\psi_{L\sigma}\psi_{R\sigma} + g_{1\perp}\psi^{\dagger}_{L\sigma}\psi^{\dagger}_{R-\sigma}\psi_{L-\sigma}\psi_{R\sigma}\right]$$

$$= \int dx \sum_{\sigma}\left[-g_{1\parallel}\rho_{R\sigma}(x)\rho_{L\sigma}(x) + g_{1\perp}\psi^{\dagger}_{L\sigma}\psi_{R\sigma}\psi^{\dagger}_{R-\sigma}\psi_{L-\sigma}\right]$$

$$= \int dx\left\{\sum_{\sigma} -g_{1\parallel}\rho_{R\sigma}(x)\rho_{L\sigma}(x) + \frac{g_{1\perp}}{(2\pi\alpha)^2}\left[F^{\dagger}_{L\uparrow}F_{R\uparrow}F^{\dagger}_{R\downarrow}F_{L\downarrow}\,e^{-i\sqrt{8\pi}\phi_s(x)} + F^{\dagger}_{L\downarrow}F_{R\downarrow}F^{\dagger}_{R\uparrow}F_{L\uparrow}\,e^{i\sqrt{8\pi}\phi_s(x)}\right]\right\}$$

שימו לב כי התהליך מסוג $g_{1\parallel}$ זהה לתהליך $g_{2\parallel}$ אך עם סימן מינוס. כמו כן:

במערכת עם סימטרית סיבוב SU(2) בספין : $g_{1\parallel}=g_{1\perp}$, $g_{2\parallel}=g_{2\perp}$, $g_{4\parallel}=g_{4\perp}$

נניח לשם נוחות להזניח את $g_{1\perp}$ ונקבל עבור זאת המילטוניאן

$$H=\int dx \sum_{\alpha=c,s} \frac{v_\alpha}{2}\left[K_\alpha(\partial_x\theta_\alpha)^2+\frac{1}{K_\alpha}(\partial_x\phi_\alpha)^2\right]$$

כאשר

$$v_c = v_F\sqrt{\left(1+\frac{g_{4\parallel}+g_{4\perp}}{2\pi v_F}\right)^2-\left(\frac{g_{2\parallel}+g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}\right)^2}$$

$$K_c=\left[\frac{1+\frac{g_{4\parallel}+g_{4\perp}}{2\pi v_F}-\frac{g_{2\parallel}+g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}}{1+\frac{g_{4\parallel}+g_{4\perp}}{2\pi v_F}+\frac{g_{2\parallel}+g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}}\right]^{1/2}$$

$$v_s = v_F\sqrt{\left(1+\frac{g_{4\parallel}-g_{4\perp}}{2\pi v_F}\right)^2-\left(\frac{g_{2\parallel}-g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}\right)^2}$$

$$K_s=\left[\frac{1+\frac{g_{4\parallel}-g_{4\perp}}{2\pi v_F}-\frac{g_{2\parallel}-g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}}{1+\frac{g_{4\parallel}-g_{4\perp}}{2\pi v_F}+\frac{g_{2\parallel}-g_{2\perp}-g_{1\parallel}}{2\pi v_F}}\right]^{1/2}$$

שימו לב שעבור אינטראקציה דוחה $K_c<1\ ,\ K_s>1$

ועבור אינטראקציה מושכת $K_c>1\ ,\ K_s<1$

קיבלנו כי גם בנוכחות אינטראקציה במודל T-L קיימת הפרדה מוחלטת בין דרגות החופש של המטען והספין. העירורים האלמנטריים של המערכת הינם גלי צפיפות מטען וגלי צפיפות ספין: כל אחד מעלי ההמילטוניאן. נשאר בשפה הבוזונית המילטוניאן ריבועי באופרטורי השדות הללו. - בניגוד לפרספקטיבה הפרמיונית ישנה ההפרדה מושלמת זו.

כמו במקרה חסר הספין התרמודינמיקה של המערכת אינה שונה באופן מהותי מזו של גז האלקטרונים החופשי.

דוגמא לגודל שנמדד באופן קל

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mu} = \frac{2K_c}{\pi v_c}$$

הקומפרסביליות נקבעת ע"י תנועת סקטור המטען (פקטור 2 עבור משני רכיבי הספין)

תגובת המערכת לשדה מגנטי אחיד נקבעת ע"י סוספטביליות הספין: $\langle S(q,\omega)\,S(-q,-\omega)\rangle \xrightarrow[\omega\to 0]{q\to 0} \frac{K_s}{2\pi v_s}$

המגנטיות יחסית לסוספטביליות כאלו $\mu_B^2\, g(E_F)$

כאן תלויות K_s ו v_s באינטראקציה. צפיפות המצבים ברמת פרמי. עבור אלקטרון חופשי: $\frac{2}{\pi v_F}$

כדי לקשר את הסוספטביליות והספין לגודל סוספטביליות כאלו יש להכפיל ב $(g_0\mu_B)^2$ פקטור גירומגנטי $\simeq 2$.

כאן עבור המודל תחת הספין הסוספטביליות התרמודינמיות של המודל בעזרת אינטראקציה נמדדת סופית עם עוצמת המגנטיזם ע"י האינטראקציות.

כאן עבור המודל תחת הספין גם אלו בוזוניזציה הקורלציה, בזמן אלו עם $q\sim 2k_F$, שנשאר ראשון הרבה כיום את השפעות האינטראקציה.

נתבונן ב CDW order parameter

$$O_{CDW}(x) = \psi^\dagger_{R\uparrow}\psi_{L\uparrow} + \psi^\dagger_{R\downarrow}\psi_{L\downarrow} = \frac{e^{-2ik_Fx}}{2\pi\alpha}\, e^{i\sqrt{2\pi}\phi_c(x)}\left[F^\dagger_{R\uparrow}F_{L\uparrow}e^{i\sqrt{2\pi}\phi_s(x)} + F^\dagger_{R\downarrow}F_{L\downarrow}e^{-i\sqrt{2\pi}\phi_s(x)}\right]$$

אם אנו עוסקים במקרה בו מספרי החלקיקים $N_{L,R}$ קבועים canonical ensemble
נקבל כי ממוצעים מהצורה $\langle F^\dagger_{L\uparrow}F_{L\uparrow}F^\dagger_{L\downarrow}F_{R\downarrow}\rangle$ מתאפסים ולפונקצית הקורלציה $\langle O^\dagger_{CDW}(x,\tau)O_{CDW}(0,0)\rangle$
נשאר רק

$$\langle O^\dagger_{CDW}(x,\tau)O_{CDW}(0,0)\rangle = \frac{e^{2ik_Fx}}{(2\pi\alpha)^2}\left\langle e^{-i\sqrt{2\pi}[\phi_c(x,\tau)-\phi_c(0,0)]}\right\rangle \times\left\langle e^{-i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)-\phi_s(0,0)]} + e^{i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)-\phi_s(0,0)]}\right\rangle$$

בהשתמש בכך שהממוצעים על חלקי המטען והספין אינם תלויים זה בזה.

$$= \frac{e^{2ik_Fx}}{2(\pi\alpha)^2}\, e^{-\pi F_{1c}(x,\tau)}\, e^{-\pi F_{1s}(x,\tau)}$$

$$= \frac{e^{2ik_Fx}}{2(\pi\alpha)^2}\left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{K_c}\left(\frac{\alpha}{r_s}\right)^{K_s} \qquad r_\alpha = \sqrt{x^2 + (v_\alpha|\tau| + \alpha)^2}$$

שימו לב כי גם K_c וגם K_s מופיעים בפונקציית הקורלציה.

לסיכום, נראה במקרה בו מספרי החלקיקים אינם קבועים: grand canonical ensemble. קל לבדוק כי

$$[K_1,K_2] = [K_1,K_2^+] = [K_1,K_1^+] = [K_2,K_2^+] = 0 \qquad K_1 = F_{R\uparrow}^+ F_{L\uparrow}\,,\quad K_2 = F_{R\downarrow}^+ F_{L\downarrow}$$

ומכיוון שבגבול התרמודינמי H אינו מכיל את $N_{\sigma\rho}$ (האבר התלוי בהם פרופורציוני ל L^{-1}) נקבל

$$[K_1,H] = [K_2,H] = 0$$

וניתן ללכסן את כל האופרטורים הללו סימולטנית. מכיוון ש $K_1^+K_1 = K_2^+K_2 = 1$
הערכים העצמיים של K_1, K_2 הינם מהצורה $C = e^{i\alpha}$. נתבונן בסקטור מרחב הילברט בו $C=1$:
המצבים העצמיים של H מאופיינים ע"י האנרגיה, שהם והמספר הכולל שלהם ביחס ל K_1 ו K_2 שונים כי
הינו 1. שים לב כי מצבים עצמיים של H שהינם גם מצבים עצמיים של K_1 ו K_2 מערבים מצבים
עם מספרי חלקיקים שונים (N מ $-\infty$ ל ∞): לדוגמא $\sum_{N_{R\uparrow}, N_{L\uparrow}} |E, N_{L\uparrow}, N_{R\uparrow}\rangle$
הינו מצב עצמי של K_1 עם ערך עצמי 1 כשהסכימה מתבצעת כהלכה
שבגבול התרמודינמי כל זוג $N_{\sigma\rho}$ סופי יש לנו מצבים עצמיים עם אותה אנרגיה עבור מספרי חלקיקים
שונים (רק שמספר הסכום הולך לאינסוף באשר $L \sim N$).
בסקטור זה של מרחב הילברט מתקיים

$$O_{CDW}(x) = \frac{e^{-2ik_Fx}}{\pi\alpha}\, e^{i\sqrt{2\pi}\,\phi_c(x)} \cos\left(\sqrt{2\pi}\,\phi_s(x)\right)$$

$$\langle O_{CDW}^+(x,\tau)\, O_{CDW}(0,0)\rangle = \frac{e^{2ik_Fx}}{(2\pi\alpha)^2} \left\langle e^{-i\sqrt{2\pi}[\phi_c(x,\tau)-\phi_c(0,0)]} \right\rangle \times$$

$$\times \left\langle e^{-i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)-\phi_s(0,0)]} + e^{i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)-\phi_s(0,0)]} + e^{-i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)+\phi_s(0,0)]} + e^{i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)+\phi_s(0,0)]} \right\rangle$$

שני האיברים הראשונים בממוצע על דרגת החופש של הספין נותנים לנו את התוצאה שקיבלנו בנוסחה הקודמת.
נתבונן בממוצע

$$\left\langle e^{i\sqrt{2\pi}[\phi_s(x,\tau)+\phi_s(0,0)]} \right\rangle = e^{-\pi\langle[\phi_s(x,\tau)+\phi_s(0,0)]^2\rangle}$$

$$= e^{-2\pi\left[\langle\phi_s(x,\tau)\phi_s(0,0)\rangle + \langle\phi_s^2(0,0)\rangle\right]}$$

$$= \left[\frac{2\pi\sqrt{x^2+(v_s|\tau|+\alpha)^2}}{L} \cdot \frac{2\pi\alpha}{L}\right]^{K_s} \xrightarrow{L\to\infty} 0$$

ולכן בגבול התרמודינמי ממוצעים מהצורה $\left\langle e^{\sum_j a_j \phi(r_j)} \right\rangle$ שורדים רק בתנאי ש $\sum_j a_j = 0$.
כתוצאה מכך פונקצית הקורלציה בגבול התרמודינמי נהיה לאוניברסלי ועקבי והגבוה קטני.

באותה מידה היינו יכולים להתבונן בסקטור מרחב הילברט בו $K_1 = 1$ ו $K_2 = -1$. בסקטור זה

$$O_{CDW}(x) = \frac{i}{\pi\alpha} e^{-2ik_F x} e^{i\sqrt{2\pi}\phi_c(x)} \sin\left(\sqrt{2\pi}\phi_s(x)\right)$$

קל לראות כי בגבול התרמודינמי פונקצית הקורלציה תהיה זהה לזו שחישבנו לעיל.

כשנכלול את האבר בוזוני בהמילטוניאן נוכל לכלול גם בו את קומוטציות ה Klein factors בתוך התוצאות שלהם. יחד עם זאת זה יותר להשתמש באופן הנוכחי לשני ערכי תוצאות ואלו הבאים לכתוב ביטויים לפרמטר סדר שונים. עלינו לעבוד באופן קונסיסטנטי בסקטור מרחב הילברט שבחרנו.

נתבונן כעת ב SDW order parameter

$$O^i_{SDW}(x) = \sum_{\sigma\sigma'} \psi^+_{R\sigma}(x)\, \sigma^i_{\sigma\sigma'}\, \psi_{L\sigma'}(x)$$

כאשר σ^i הינה מטריצת פאולי $i = x, y, z$
בסקטור הילברט בו כל קומוטציות פקטורי קליין המופיעים ב O_{SDW} שקולים ערך עצמי 1 נקבל

$$O^x_{SDW}(x) = \frac{e^{-2ik_F x}}{\pi\alpha} e^{i\sqrt{2\pi}\phi_c(x)} \cos\left(\sqrt{2\pi}\theta_s(x)\right)$$

$$O^y_{SDW}(x) = -\frac{e^{-2ik_F x}}{\pi\alpha} e^{i\sqrt{2\pi}\phi_c(x)} \sin\left(\sqrt{2\pi}\theta_s(x)\right)$$

$$O^z_{SDW}(x) = i\frac{e^{-2ik_F x}}{\pi\alpha} e^{i\sqrt{2\pi}\phi_c(x)} \sin\left(\sqrt{2\pi}\phi_s(x)\right)$$

ובדומה

$$\langle O^{x+}_{SDW}(x,\tau)\, O^x_{SDW}(0,0)\rangle = \frac{e^{2ik_F x}}{2(\pi\alpha)^2} \left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{K_c} \left(\frac{\alpha}{r_s}\right)^{1/K_s}$$

$$\langle O^{y+}_{SDW}(x,\tau)\, O^y_{SDW}(0,0)\rangle = \frac{e^{2ik_F x}}{2(\pi\alpha)^2} \left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{K_c} \left(\frac{\alpha}{r_s}\right)^{1/K_s}$$

$$\langle O^{z+}_{SDW}(x,\tau)\, O^z_{SDW}(0,0)\rangle = \frac{e^{2ik_F x}}{2(\pi\alpha)^2} \left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{K_c} \left(\frac{\alpha}{r_s}\right)^{K_s}$$

עבור חלקיקים ללא אינטראקציות $K_c = K_s = 1$ כל פונקציות הקורלציה הולכות דועכות כמו r^{-2} בהתאם לצפוי מגז פרמי. בנוכחות אינטראקציות הדעיכה תלויה ב K_c ו K_s המשנים את חוק הדעיכה שלה.

שימו לב כי $K_s \neq 1$ שובר את סימטרית הסיבוב של הספין בין מישור x-y וכיוון Z כפי שניתן לראות מפונקציות הקורלציה של O_{SDW}. הסיבה לכך שהוא שונה נובע כי אנו עובדים במקרה בו $g_{1\perp}=0$. המערכת עם סימטרית סיבוב ספין מקיים במקרה זה $g_{1\parallel}=0$ גם כן כתוצאה מכך, כפי שניתן לראות מהביטוי ל K_s, $K_s=1$ (הסימטריה הנ"ל גם מבטיחה $g_{4\parallel}=g_{4\perp}, g_{2\parallel}=g_{2\perp}$). לכן עבור $g_{1\perp}=0$, $K_s \neq 1$ משמעו כי סימטרית הסיבוב של ספין אינה קיימת ומכאן ההבדל בין רכיבי פונקציות הקורלציה של O_{SDW}.

באופן דומה נוכל להתבונן בפונקציות הקורלציה של פרמטרי הסדר המתארים pairing:

$$O_{SS}(x) = \sum_{\sigma} \sigma \, \psi^{+}_{R\sigma}(x) \, \psi^{+}_{L-\sigma}(x) \qquad \text{singlet pairing}$$

$$O^{i}_{TS}(x) = \sum_{\sigma\sigma'} \sigma \, \psi^{+}_{R\sigma}(x) \, \sigma^{i}_{\sigma\sigma'} \, \psi^{+}_{L-\sigma'}(x)$$

מכיוון שאם נזניח את קומוטציות ה Klein factor כיוון ונציב שלהם ונניח כי הללו מקבלים ערך 1 מקבלים

$$O_{SS}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_c(x)} \cos\left(\sqrt{2\pi}\phi_s(x)\right)$$

$$O^{x}_{TS}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_c(x)} \cos\left(\sqrt{2\pi}\theta_s(x)\right)$$

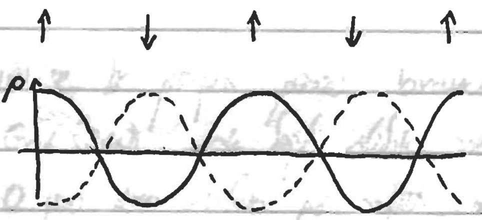
$$O^{y}_{TS}(x) = -\frac{1}{\pi\alpha} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_c(x)} \sin\left(\sqrt{2\pi}\theta_s(x)\right)$$

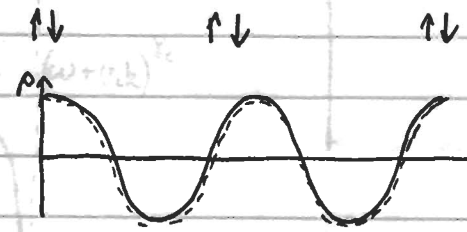
$$O^{z}_{TS}(x) = \frac{1}{\pi\alpha} e^{-i\sqrt{2\pi}\theta_c(x)} \sin\left(\sqrt{2\pi}\phi_s(x)\right)$$

פונקציות הקורלציה שלהם מתקבלות מפונקציות הקורלציה שחישבנו ל O_{CDW} ו O_{SDW} ע"י ההחלפה $K_c \to \frac{1}{K_c}$ מכיוון ש ϕ_c מוחלף ב θ_c בהגדרת ה order parameters.

קיבלנו כי עבור מערכת עם סימטרית סיבוב ספין ($K_s=1$ באופן $g_{1\perp}=0$) הקורלציות המשמעותיות עבור אינטראקציות דוחות ($K_c<1$) הינן אלה של CDW או SDW ואילו עבור אינטראקציות מושכות ($K_c>1$) יהיו אלה ה singlet ו triplet pairing.

אינטואיטיבית מכיון שב SDW צפיפות האלקטרונים אחידה ומורכבת משני גלי צפיפות של אלקטרונים עם ספינים הפוכים המוזזים זה ביחס לזה





לעומת גל הצפיפות ב CDW

אנו מצפים כי עבור אינטראקציות דוחות סדר מסוג SDW יועדף על סדר מסוג CDW. פונקציית הקורלציה שחישבנו עבור המקרה $g_{1\perp}=0$ דועכת באותו אופן עבור שני הפרמטרי סדר אלה. אנו נראה כי עבור $g_{1\perp}>0$, שיגרור עבור מערכת עם סימטרית SU(2) ספין $K_s>1$, סדר מסוג SDW אכן מועדף. באופן דומה נמצא כי במקרה זה עבור אינטראקציות דוחות ($K_c>1$) ו $g_{1\perp}>0$ triplet pairing רלוונטי יותר מ singlet pairing.

נחשב כעת באמצעות הבוזוניזציה את ה single-particle Green function

$$\mathcal{G}_{R\uparrow}(x,\tau) = -\langle T_\tau\, \psi_{R\uparrow}(x,\tau)\,\psi^\dagger_{R\uparrow}(0,0)\rangle$$

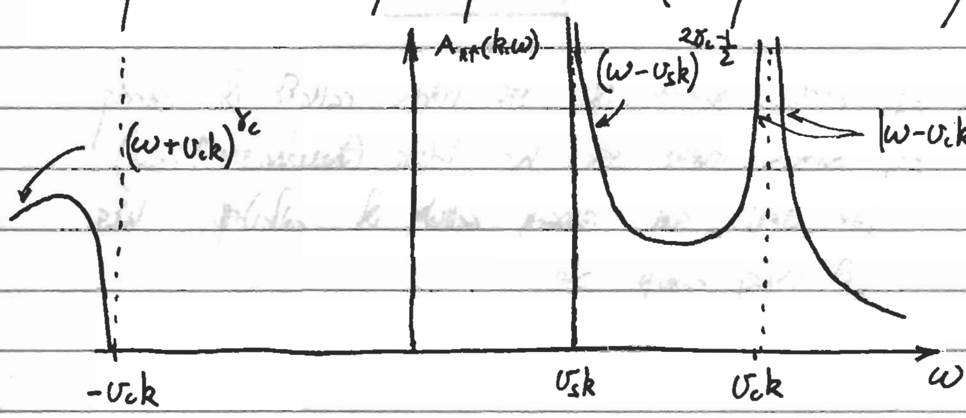
$$= -\frac{e^{ik_F x}}{2\pi\alpha}\left\langle T_\tau\, e^{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\theta_c-\phi_c+\theta_s-\phi_s)(x,\tau)}\, e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\theta_c-\phi_c+\theta_s-\phi_s)(0,0)}\right\rangle$$

$$= -\frac{e^{ik_F x}}{2\pi\alpha}\prod_{\nu=c,s} e^{-\frac{\pi}{4}(K_\nu+K_\nu^{-1})F_{1\nu}(x,\tau)-\frac{\pi}{2}\left[F_{2\nu}(x,\tau)-F_{2\nu}(0,0)\right]}$$

$$\gamma_\nu = \frac{1}{8}\left(K_\nu + K_\nu^{-1} - 2\right) \qquad \nu = c,s \quad \text{נגדיר}$$

$$= -\frac{e^{ik_F x}}{2\pi} \prod_{\nu=c,s} \alpha^{2\gamma_\nu} \frac{1}{\left(v_\nu \tau + s\alpha + ix\right)^{\gamma_\nu}} \frac{1}{\left(v_\nu \tau + s\alpha - ix\right)^{\gamma_\nu + \frac{1}{2}}}$$

אנו רואים כי כעת ה Green function מכילה branch cuts הנקבעים על ידי מהירות המטען ומהירות הספין. טרנספורם פוריה של התוצאה הנ"ל והעברה אנליטית לקבל את $G_{ret}(k,\omega)$ יתן (למרות שביצוע האינטגרל אינו פשוט בכלל) עבור המקרה עם סימטרית סיבוב ספין: $\gamma_s \equiv 0$ את התוצאה הבאה:



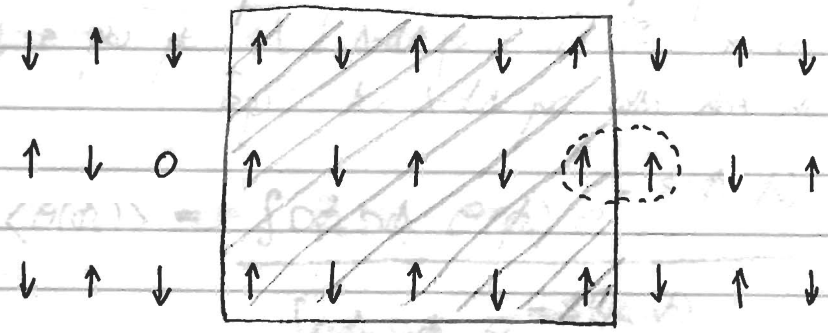
(מניח $v_c > v_s$)

אנו רואים כי עתה הפונקציה הספקטרלית מכילה שני שיאים המתפזרים בהפרדה עם מהירויות שונות: v_c ו v_s. הראשון מתאים לעירור הנושא את המטען של האלקטרון והשני לעירור הנושא את הספין. האלקטרון המוכנס לתוך המערכת מתפרק להולון holon - נושא המטען ולספינון spinon נושא הספין המתקדמים במהירויות v_c ו v_s בהתאמה, והולכים בלתי תלוי זה בזה. ניתן לקבל תמונה סמי-קלאסית פשוטה של התופעה זו אם נבחן מערכת חד מימדית עם אינטראקציות דוחות, עבורה קורלציות SDW הינן המשמעותיות ביותר. אם נסיר אלקטרון ממערכת זו נוצר kinks ב ϕ_c וב ϕ_s הנעים במהירויות בלתי תלויים. אם נקבע את הגלים כרקע של הקורלציות האנטי-פרומגנטיות נקבל:

$$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\,\circ\,\uparrow\downarrow\uparrow \quad \Longrightarrow \quad \uparrow\downarrow\circ\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow$$

	holon	spinon
ביחס למצב היסוד המקורי	מטען 1	מטען 0
	ספין 0	ספין 1/2
	kink in ϕ_c	kink in ϕ_s

במימד גבוה יותר, אם נצמיד מספר שרשראות כאלה, נבחין כי בין ה holon ל spinon מצטברת שרשרת של ספינים המצביעים בכיוון מקביל לספינים על שרשראות שכנות ולכן עולה האנרגיה exchange האנטיפרומגנטית.



שרשרת הספינים המקבילים גורמת לכך בקבל שהאנרגיה שלו גדלה לינארית כפונקציה של המרחק בין ה holon ל spinon ולכן נגרמת במימד גבוה יותר כליאה (confinement) של שתי האקסיטציות הללו למצב קשור שהוא - בעל המספרים הקוונטים של האלקטרון. מצב קשור זה יהיה בעל quasi-particle weight סופי.

עד כה התעלמנו מקיומו של איבר האינטראקציה $g_{1\parallel}$. בסקטור זה קומבינציות ה Klein factors המופיעות באיבר זה $K = F^{+}_{L\uparrow} F_{R\uparrow} F^{+}_{R\downarrow} F_{L\downarrow}$ ו K^{+} מתחלפות ומקבלות ערך עצמי 1. סקטור הספין של הבעיה מתואר ע"י המילטוניאן sine Gordon (כאשר נשמיט את הציון s מהשדות ומהפרמטרים השונים)

$$H = \int dx \left\{ \frac{u}{2}\left[K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2\right] + \frac{g_{1\parallel}}{2(\pi\alpha)^2}\cos\left[\sqrt{8\pi}\,\phi(x)\right]\right\}$$

האפקט של איבר אינטראקציה זה ברור. בניגוד לחלק הריבועי בהמילטוניאן הגורם לפלקטואציות ב ϕ בכדי למקסם את האיבר "הקינטי" $K(\partial_x\theta)^2$ איבר האינטראקציה רוצה לנעול את ϕ באחד ~~מהמינימום~~ מערכי המינימום של הקוסינוס. קיימת לכן תחרות בין האפקטים הללו. כדי לראות איזה אפקט שולט בפיסיקה עבור אנרגיות נמוכות נפנה לכלי נבחר במסגרת שימוש בחבורת הרנורמליזציה: Renormalization Group.

לפני של כיוון תהליך הרנורמליזציה הינו דילול דרגות חופש. נניח כי קיימת תורה לשדה ϕ המוגדרת
על ידי רכיבי הפורייה של $\phi(k)$ ו cut off : Λ, כי אנו מוגבלים באינטגרציה על תנעים
תורה זו בדרך כלל הקטן מאוד מ Λ. במקום כזה נחפש תורה המתארת רק את
דרגות החופש בהן אנו מעוניינים ושנותנת אותן אותן תוצאות כמו התורה המקורית. נעשה זאת
על ידי אינטגרציה בחלקים של דרגות החופש לגבי ה cut-off בין $\Lambda-d\Lambda$ ל Λ. אם נסמן ב $\phi_>$
את דרגות החופש הגבוהות וב $\phi_<$ את דרגות החופש עם $k<\Lambda-d\Lambda$ נקבל

$$\langle O(\phi_<)\rangle = \frac{\int D\phi_< D\phi_> \, O(\phi_<)\, e^{-S(\phi_<,\phi_>)}}{\int D\phi_< D\phi_>\, e^{-S(\phi_<,\phi_>)}} \equiv \frac{\int D\phi_<\, O(\phi_<)\, e^{-S_{eff}(\phi_<)}}{\int D\phi_<\, e^{-S_{eff}(\phi_<)}}$$

בתהליך זה אנו מבצעים "integrating out" של דרגות החופש לגבי ה cut-off הולך וקטן
S_{eff} משתנה, ובאופן כללי יופיעו בו כל האופרטורים האפשריים תחת הסימטריות הקיימות
בבעיה. מקדמי הצימוד של חלק מאופרטורים אלה יגדלו תחת תהליך ה RG - אלו הם האופרטורים
הרלוונטיים. חלקם יקטנו - אלו הם האופרטורים הלא רלוונטיים, וחלקם ישארו קבועים - האופרטורים השוליים
(marginal). תהליך ה RG הינו כלי חשוב אך בגבול בו ה cut off קטן מאוד ...
לעיתים התורה המתקבלת פשוטה יותר מהתורה המקורית, וניתן להבין ממנה ...
הקרוב מאוד. לדוגמא, מכיון שה cut off קטן ואם קבועי הצימוד נשארים קטנים תורת
ההפרעות בהם תהיה טובה יותר ויותר.

אנו משתמשים בסכמת RG בה נבצע אינטגרציה שונה על דרגות החופש עם תנע k שלא במרחב
כשמתבוננים בבעיה של מעבר ... Luttinger. כאן נשתמש בסכמת RG שונה ... בה
נמצא את האופן בו S_{eff} משתנה מתוך הדרישה שפונקציות הקורלציה

$$R(x-x', \tau-\tau') = \langle T_\tau \underbrace{e^{ic\phi(x,\tau)}\, e^{-ic\phi(x',\tau')}}_{O} \rangle \qquad \text{קבוע } c:$$

עבור $x-x', v(\tau-\tau') \gg \alpha$ לא תהיה רגישות לשינוי ב $\underbrace{\alpha \text{ cut off}}^{\text{real space}}$, אולם ...
ניתן לחשוב על הבעיה כתלויה על שינוי עם קבוע α ובתהליך ה RG אנו מגדילים את השינוי.

אקשן

$$S = S_0 + S_1$$

כאשר

$$S_0 = \int d\tau dx \left[-i\,\partial_x\theta\,\partial_\tau\phi + \frac{v}{2} K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2 \right]$$

$$S_1 = \int d\tau dx \frac{g_{11}}{2(\pi\alpha)^2} \cos(\sqrt{8\pi}\phi)$$

נרצה לחשב

$$\langle \theta \rangle_{S_0+S_1} = \frac{\frac{1}{Z_0}\int D\phi D\theta\, \theta\, e^{-(S_0+S_1)}}{\frac{1}{Z_0}\int D\phi D\theta\, e^{-(S_0+S_1)}}$$

כאשר $Z_0 = \int D\phi D\theta\, e^{-S_0}$. נפתח עד סדר שני ב g_{11} = סדר שני ב S_1 ונקבל

$$\simeq \frac{\langle\theta\rangle - \langle\theta S_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\theta S_1^2\rangle}{1 - \langle S_1\rangle + \frac{1}{2}\langle S_1^2\rangle} \simeq \langle\theta\rangle - \langle\theta S_1\rangle + \langle\theta\rangle\langle S_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\theta S_1^2\rangle - \langle\theta S_1\rangle\langle S_1\rangle - \frac{1}{2}\langle\theta\rangle\langle S_1^2\rangle + \langle\theta\rangle\langle S_1\rangle^2$$

כשהמדרה $\langle\ \rangle$ מתאים לממוצע ביחס ל S_0. מכיון ש $S_1 \sim e^{i\sqrt{8\pi}\phi} + e^{-i\sqrt{8\pi}\phi}$
ומכיון שהראנו כי בגבול התרמודינמי ממוצע מהצורה $\langle e^{\sum_j a_j\phi(r_j)}\rangle$ שונה רק אם $\sum a_j = 0$ נקבל
כי בגבול זה $\langle S_1\rangle = 0$ ועבור! $C \neq \pm 8\pi$ $\langle\theta S_1\rangle = 0$ ולכן

$$R(r-r') = \langle\theta\rangle + \frac{1}{2}\left[\langle\theta S_1^2\rangle - \langle\theta\rangle\langle S_1^2\rangle\right] \qquad r = (x, v\tau)$$

כשאנו יודעים ש

$$\langle\theta\rangle = e^{-\frac{c^2}{2}K F_1(r-r')}$$

$$\langle \cos[\sqrt{8\pi}\phi(x,\tau)] \cos[\sqrt{8\pi}\phi(x',\tau')] \rangle = \frac{1}{2} e^{-4\pi K F_1(r-r')}$$

$$\left\langle e^{ic\phi(x,\tau)}\, e^{-ic(x',\tau')}\, \cos\left[\sqrt{8\pi}\,\phi(x_1\tau_1)\right] \cos\left[\sqrt{8\pi}\,\phi(x_2\tau_2)\right]\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\epsilon_1\epsilon_2=\pm1} \left\langle e^{i\left[c\phi(x,\tau)-c\phi(x'\tau')+\epsilon_1\sqrt{8\pi}\,\phi(x_1\tau_1)+\epsilon_2\sqrt{8\pi}\,\phi(x_2\tau_2)\right]}\right\rangle$$

אך, בגלל ש $\left\langle e^{\sum a_i\phi(r_i)}\right\rangle$ שונה רק אם $\sum a_i=0$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\epsilon=\pm1} \left\langle e^{i\left[c\phi(x,\tau)-c\phi(x'\tau')+\epsilon\sqrt{8\pi}\left(\phi(x_1\tau_1)-\phi(x_2\tau_2)\right)\right]}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\, e^{-\frac{c^2}{2}KF_1(r-r')-4\pi K F_1(r_1-r_2)} \sum_{\epsilon} e^{\epsilon c\sqrt{2\pi}K\left[F_1(r-r_1)-F_1(r-r_2)-F_1(r'-r_1)+F_1(r'-r_2)\right]}$$

$$R(r-r') = e^{-\frac{c^2}{2}KF_1(r-r')}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{g_{12}^2}{(2\pi\alpha)^4}\sum_{\epsilon=\pm1}\int dx_1 d\tau_1 dx_2 d\tau_2\, e^{-4\pi K F_1(r_1-r_2)} \times\left[e^{\epsilon c\sqrt{2\pi}K\left[F_1(r-r_1)-F_1(r-r_2)-F_1(r'-r_1)+F_1(r'-r_2)\right]}-1\right]\right. \quad \Leftarrow$$

מכיון שהאינטגרל כולל את המקטע $e^{-4\pi K F_1(r_1-r_2)} \sim \left(\frac{\alpha}{r_1-r_2}\right)^{2K}$ עבור c קטן מספיק התרומה
העיקרית שלו תבוא מתחומים בו r_1-r_2 קטן. נשנה לכן

$$\vec{R} = (X,Y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{v(\tau_1+\tau_2)}{2}\right)$$

$$\vec{\tilde{r}} = (\tilde{x},\tilde{y}) = \left(x_1-x_2,\ v(\tau_1-\tau_2)\right)$$

$$dx_1 d\tau_1 dx_2 d\tau_2 = \frac{1}{v^2}\, d^2R\, d^2\tilde{r}$$

$$e^{\epsilon c\sqrt{2\pi}K\left[F_1(r-r_1)-F_1(r-r_2)-F_1(r'-r_1)+F_1(r'-r_2)\right]}-1$$ [illegible]

$$\simeq e^{\epsilon c\sqrt{2\pi}K\,\vec{\tilde{r}}\cdot\vec{\nabla}_R\left[F_1(\vec{r}-\vec{R})-F(\vec{r}'-\vec{R})\right]}-1$$

$$\simeq \epsilon c\sqrt{2\pi}K\,\vec{\tilde{r}}\cdot\vec{\nabla}_R\left[F_1(\vec{r}-\vec{R})-F_1(\vec{r}'-\vec{R})\right]+\pi c^2K^2\sum_{i,j=x,y}\tilde{r}_i\tilde{r}_j\,\nabla_{R_i}\left[F_1(\vec{r}-\vec{R})-F_1(\vec{r}'-\vec{R})\right]\nabla_{R_j}\left[F_1(\vec{r}-\vec{R})-F_1(\vec{r}'-\vec{R})\right]$$

האבר הראשון יעלם לאחר הסכום על ϵ. בגלל האינטגרציה על $\vec{\tilde{r}}$ האבר השני מתאפס אלא אם כן $i=j$

$$R(r-r') = e^{-\frac{c^2}{2}KF_1(r-r')}\left\{1-\frac{g_{1\perp}^2}{(2\pi\alpha)^4}\frac{\pi(cK)^2}{v^2}\int d^2R\,d^2\tilde r\, e^{-4\pi K F_1(\tilde r)}\left[F_1(r-R)-F_1(r'-R)\right]\left(\tilde x^2\nabla_X^2+\tilde y^2\nabla_Y^2\right)\left[F_1(r-R)-F_1(r'-R)\right]\right\}$$

$$= e^{-\frac{c^2}{2}KF_1(r-r')}\left\{1-\frac{g_{1\perp}^2}{(2\pi\alpha)^4}\left(\frac{\pi cK}{v}\right)^2\int d^2R\int_\alpha^\infty d\tilde r\,\tilde r^3\left(\frac{\tilde r}{\alpha}\right)^{-4K}\left[F_1(r-R)-F(r'-R)\right]\left(\nabla_X^2+\nabla_Y^2\right)\left[F_1(r-R)-F_1(r'-R)\right]\right\}$$

כשמשתמשים בהנחה ש r_1 ו r_2 גדולה קצת רק עד כדי ה cutoff α

$$\left(\nabla_X^2+\nabla_Y^2\right)\ln R = 2\pi\,\delta(R)$$

ומשתמשים ?

נקבל

$$\int d^2R\left[F_1(r-R)-F_1(r'-R)\right]\left(\nabla_X^2+\nabla_Y^2\right)\left[F_1(r-R)-F_1(r'-R)\right]$$

$$=\int d^2R\,\frac{1}{\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y+\alpha)^2}}{\alpha}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{(x'-X)^2+(y'-Y+\alpha)^2}}{\alpha}\right)\right]2\pi\left[\delta(\vec R-\vec r)-\delta(\vec R-\vec r')\right]$$

$$=-\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{(x-x')^2+(y-y'+\alpha)^2}{\alpha}\right) = -4F_1(r-r')$$

נגדיר $y=\frac{g_{1\perp}}{\pi v}$ ונמצא לסדר המשולבים בקירוב לאינטגרל כדי למצוא

$$R(r-r') = e^{-\frac{c^2}{2}K_{eff}F_1(r-r')}$$

$$K_{eff}(K) = K-\frac{1}{2}y^2K^2\int_\alpha^\infty\frac{dr}{\alpha}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{3-4K}$$

כך

אינטגרל זה הוא שווה על התרומות הסינגולריות של המרחב וכך כל המשתנים כאשר
משנים את ה cutoff מ α ל $\alpha+d\alpha$ נקבל כך

$$K_{eff}(\alpha) = K(\alpha)-\frac{1}{2}y^2(\alpha)K^2(\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{\alpha}-\frac{1}{2}y^2(\alpha)K^2(\alpha)\left(\frac{\alpha+d\alpha}{\alpha}\right)^{4-4K(\alpha)}\int_{\alpha+d\alpha}^\infty\frac{dr}{\alpha+d\alpha}\left(\frac{r}{\alpha+d\alpha}\right)^{3-4K(\alpha)}$$

$$K_{eff}(\alpha+d\alpha) = K(\alpha+d\alpha)-\frac{1}{2}y^2(\alpha+d\alpha)K^2(\alpha+d\alpha)\int_{\alpha+d\alpha}^\infty\frac{dr}{\alpha+d\alpha}\left(\frac{r}{\alpha+d\alpha}\right)^{3-4K(\alpha+d\alpha)}$$

נקבל בסדר זה את הצורה

$$K(\alpha+d\alpha) = K(\alpha)-\frac{1}{2}y^2(\alpha)K^2(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$y^2(\alpha+d\alpha) = y^2(\alpha)\left[1+\left(4-4K(\alpha)\right)\frac{d\alpha}{\alpha}\right]$$

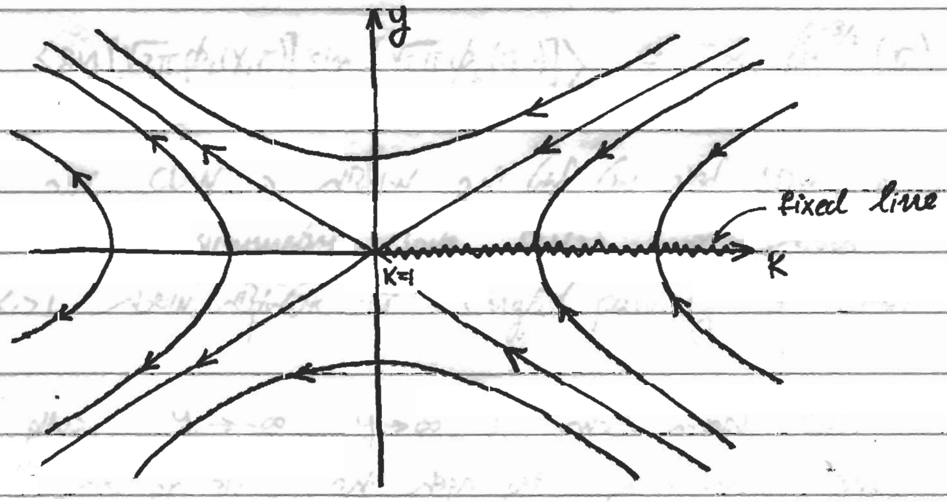
נגדיר $\alpha=\alpha_0 e^l$ $\Leftarrow$ $dl=\frac{d\alpha}{\alpha}$ לקבל את משוואות הזרימה

$$\frac{dK}{dl}=-\frac{1}{2}y^2K^2$$

$$\frac{dy}{dl}=2(1-K)y$$

שים לב כי משוואות אלה מקורבות ב y אך מדויקות ב K.
אנו רואים כי עבור y אינפיניטסימלי אזי ה backward scattering רלוונטי עבור $K<1$ ולא רלוונטי עבור $K>1$.

ביאור ה RG זהה לזה של מעבר XY: Kosterlitz Thouless transition.



ליד $K=1$ הגל נעלם

ליד $K=1$ נוכל לכתוב $K_s \simeq 1+\frac{y_\parallel}{2}$ כאשר $y_\parallel=\frac{g_{\parallel}}{\pi v_s}$ ונקבל
ו $g_{4\parallel}=g_{4\perp}$ ו $g_{2\parallel}=g_{2\perp}$ לקבל

$$\frac{dy_\parallel}{dl}=-y^2$$

$$\Rightarrow A^2=y_\parallel^2-y^2 \text{ - constant of motion}$$

$$\frac{dy}{dl}=-y_\parallel y$$

ננה מאוד מעל $y>0$
עבור $y_\parallel>0$ $(K>1)$ ו $y_\parallel>y^2$ הנקודות אנו מקבלים המערכת זורמות לנקודה
שבה $y^*=0$ ו $K^*=1+\frac{y_\parallel^*}{2}$ על ה fixed line $y=0$, $K>1$.

$$\frac{dy_\parallel}{dl}=0$$

קרוב לנקודה השבת $(y\sim 0)$ הזרימה נראית לקבל כ:

$$\frac{dy}{dl}=2(1-K^*)y$$

כלומר הוא במקום אחר: K במקום ואינו משתנה ונשאר לערכו בנקודת השבת K^*. בקירוב ראשון ניתן לכן לחשב את פונקציות הקורלציה באנרגיות נמוכות ע"י שימוש בהמילטוניאן הריבועי (כי $y^*=0$) עם הפרמטר המנורמל K_s^*.

כאשר $y_\parallel = y$ הקפלינג היה marginally irrelevant הזרימה היא לאורך האלכסון $y=y_\parallel$, כלומר אם אנו מתחילים ממערכת שהיא אינווריאנטית תחת סיבובי ספין סימטריה זו נשמרת על ידי צעדי ה RG כצפוי. נקודת השבת במקרה זה היא $y_\parallel^*=y^*=0$ כלומר $K^*=1$. מכיוון שהקפלינג במקרה זה אינו אובד עבור y קטן היא מושרה תיקונים לוגריתמיים ביחס לתוצאות המתקבלות משימוש בהמילטוניאן הריבועי עם $K^*=1$. לדוגמה

$$\langle \cos[\sqrt{2\pi}\phi_s(x,\tau)] \cos[\sqrt{2\pi}\phi_s(0,0)]\rangle \simeq \frac{\alpha}{r_s} \ln^{1/2}\left(\frac{r_s}{\alpha}\right)$$

$$\langle \sin[\sqrt{2\pi}\phi_s(x,\tau)] \sin[\sqrt{2\pi}\phi_s(0,0)]\rangle \simeq \frac{\alpha}{r_s} \ln^{-3/2}\left(\frac{r_s}{\alpha}\right)$$

תיקונים אלה גורמים לקורלציות ה SDW לדעוך מעט לאט יותר מקורלציות ה CDW עבור אינטראקציות דוחות $K_c<1$ במערכת עם $SU(2)$ spin symmetry. גם ל triplet pairing לעומת singlet pairing עבור אינטראקציות מושכות $K_c>1$.

עבור $y>y_\parallel$ הקפלינג הלוקלי המתאר צורם ל $y\to\infty$, $y_\parallel\to-\infty$. בתחום זה משוואות הרנורמליזציה שפיתחנו הפרמטר ב y אינן תקפות יותר. יחד עם זאת ניתן לשער ולזהות את אופי הפאזה המתקבלת בגבול זה של strong coupling $y\to\infty$! $K_s\to 0$. אז ה backward scattering

$$\frac{y v_s}{2\pi\alpha^2}\int dx \cos\left(\sqrt{8\pi}\phi_s\right)$$

רוצה למלא את ϕ_s כאחד מהמינימום של הקוסינוס. אם $y\to\infty$ אזי מתקרבות התנודות היא $\bar{\phi}_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$. אם נפתח את ϕ_s $\phi_s = \bar{\phi}_s + \delta\phi_s$ נמצא כי סקלר הפעולה נתון ע"י

$$S_s = \beta L \frac{v_s}{2K_s}\sum_{k\omega_n}\left(k^2 + \frac{\omega_n^2}{v_s^2} + \frac{4K_s y}{\alpha^2}\right)\delta\phi_s(k\omega_n)\,\delta\phi_s(-k,-\omega_n)$$

כלומר גם ב $k=0$ הערכים עולים מערבה מינימלית: gap של $M=\sqrt{\frac{4K_s y v_s^2}{\alpha^2}}$

הערכה מדויקת יותר לערכו של הפער ניתנת להשגה על ידי שלוב RG עם האנליזה הנ״ל בגבול הצימוד החזק. אנו מעוניינים להעריך את גודלו של הפער עבור ההמילטוניאן המקורי שבו y אינו בהכרח גדול. כדי לעשות זאת נשקול אחרי המערכת לאורך זרימת ה RG עד לנקודה l^* בה $y(l^*)\sim 1$. בנקודה זו נשתמש בקירוב לתנודות קטנות סביב המינימום של הקוסינוס כפי שחישבנו לעיל

$$\Delta_s \sim \frac{v_s}{\alpha(l^*)} y^{1/2}(l^*) \sim \frac{v_s}{\alpha_0} e^{-l^*}$$

עבור הבעיה המקורית הזרימה הינה מהצורה הבאה

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK}{dl} &= 0 \\ \frac{dy}{dl} &= 2(1-K)y \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(l) = y_0 e^{2(1-K)l}$$

$\Leftarrow$ l^* עבורו $y(l^*)=1$ מקיים

$$e^{-l^*} = y_0^{\frac{1}{2(1-K)}}$$

ולכן

$$\Delta_s \sim \frac{v_s}{\alpha_0} y_0^{\frac{1}{2(1-K)}}$$

הפער האנליטי היות לכן ראינו חזקה בקבוע הצימוד של ה bare Hamiltonian. ככל שאנו מתקרבים לנקודה הקריטית $K=1$ הפער הולך וקטן, זכרו כי $y_0 \ll 1$.

הנקודה המיוחדת נקראת גם Luther-Emery liquid. השניים מצאו פתרון מדויק לבעיה בתחום המסיבי עבור הנקודה המיוחדת $K=\frac{1}{2}$. נציג פתרון זה:

מכיוון ש

$$[\phi(x), \theta(x')] = \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(x'-x)$$

אם נגדיר את השדות

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\theta + 2\phi)$$

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\theta - 2\phi)$$

הם יקיימו

$$[\phi_1(x), \phi_1(x')] = \pi\Big([\theta(x), \phi(x')] + [\phi(x), \theta(x')]\Big)$$

$$= \pi\left(-\frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(x-x') + \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(x'-x)\right) = \pi i\,\mathrm{sign}(x'-x)$$

ובאופן דומה

$$[\phi_2(x), \phi_2(x')] = -\pi i \, \mathrm{sign}(x'-x)$$

!

$$[\phi_1(x), \phi_2(x')] = \pi\left(-[\theta(x), \phi(x')] + [\phi(x), \theta(x')]\right)$$

$$= \pi\left(\frac{i}{2}\mathrm{sign}(x-x') + \frac{i}{2}\mathrm{sign}(x'-x)\right) = 0$$

קיבלנו לכן כי ϕ_1 ו ϕ_2 מקיימים את יחסי הקומוטציה הנדרשים משדות הבוזונים המתאימים ל left ו right (בהתאמה) spinless fermions. נוכל לכן להגדיר פרמיונים חדשים שאינם האלקטרונים המקוריים !:

$$\Psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_L \, e^{-i\phi_1(x)}$$

: refermionization

$$\Psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_R \, e^{-i\phi_2(x)}$$

כדי שנבדוק עבור אלקטרונים ללא ספין

$$\int dx :\left[\Psi_L^+(x)\, i\partial_x \Psi_L(x) + \Psi_R^+(x)(-i\partial_x)\Psi_R(x)\right]:$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int dx \, [\partial_x \phi_1(x)]^2 + [\partial_x \phi_2(x)]^2 + O\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int dx \, (\partial_x \theta + 2\partial_x \phi)^2 + (\partial_x \theta - 2\partial_x \phi)^2 + O\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$= \int dx \left[\frac{1}{4}(\partial_x \theta)^2 + (\partial_x \phi)^2\right] + O\left(\frac{1}{L}\right)$$

מכאן ש

$$:\Psi_L^+(x)\Psi_L(x): = \frac{1}{2\pi}\partial_x \phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\partial_x \theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x \phi$$

$$:\Psi_R^+(x)\Psi_R(x): = \frac{-1}{2\pi}\partial_x \phi_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\partial_x \theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_x \phi$$

$$\Psi_L^+(x)\Psi_R^+(x)\Psi_R(x)\Psi_L(x) = -\frac{1}{8\pi}(\partial_x \theta)^2 + \frac{1}{2\pi}(\partial_x \phi)^2$$

$$v\left(K+\frac{1}{4K}\right)\left[\Psi_L^{\dagger}(x)\, i\partial_x \Psi_L(x) + \Psi_R^{\dagger}(x)(-i\partial_x)\Psi_R(x)\right] + 2\pi v\left(\frac{1}{4K}-K\right)\Psi_L^{+}(x)\Psi_R^{+}(x)\Psi_R(x)\Psi_L(x)$$ ולכן

$$= v\left(K+\frac{1}{4K}\right)\left[\frac{1}{4}(\partial_x\theta)^2+(\partial_x\phi)^2\right] + 2\pi v\left(\frac{1}{4K}-K\right)\left[-\frac{1}{8\pi}(\partial_x\theta)^2+\frac{1}{2\pi}(\partial_x\phi)^2\right]$$

$$= \frac{v}{2}\left[K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2\right]$$

קשר

$$\Psi_L^{+}(x)\,\Psi_R(x) = \frac{1}{2\pi\alpha} F_L^{+}F_R\, e^{i[\phi_1(x)-\phi_2(x)]}$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha} F_L^{+}F_R\, e^{i\sqrt{8\pi}\,\phi(x)}$$

ובסקטור בו $F_L^{+}F_R=1$ נקבל לכן

$$\frac{g_{1\perp}}{2\pi\alpha}\left[\Psi_L^{+}(x)\Psi_R(x) + \Psi_R^{+}(x)\Psi_L(x)\right] = \frac{g_{1\perp}}{2(\pi\alpha)^2}\cos\left[\sqrt{8\pi}\,\phi(x)\right]$$

ומכאן ההמילטוניאן בסקטור הספין שלנו ניתן להצגה במונחי הפרמיונים החדשים כ

$$H=\int dx\left\{ v\left(\frac{1}{4K}+K\right)\left[\Psi_L^{\dagger}\, i\partial_x\Psi_L + \Psi_R^{+}(-i\partial_x)\Psi_R\right] + \frac{g_{1\perp}}{2\pi\alpha}\left[\Psi_L^{+}\Psi_R + \Psi_R^{+}\Psi_L\right] + 2\pi v\left(\frac{1}{4K}-K\right)\Psi_L^{+}\Psi_R^{+}\Psi_R\Psi_L \right\}$$

אנו רואים כי עבור הערך המיוחד $K=\frac{1}{2}$ הבעיה אקוויוולנטית לבעיה בפרמיונים חופשיים ל
Dirac fermions

$$H=\int dx\left[v\left(\Psi_L^{+} i\partial_x\Psi_L + \Psi_R^{+}(-i\partial_x)\Psi_R\right) + \frac{yv}{2\alpha}\left(\Psi_L^{+}\Psi_R + \Psi_R^{+}\Psi_L\right)\right]$$

$$= \sum_k\left[vk\left(C_{Rk}^{+}C_{Rk} - C_{Lk}^{+}C_{Lk}\right) + \frac{yv}{2\alpha}\left(C_{Lk}^{+}C_{Rk} + C_{Rk}^{+}C_{Lk}\right)\right] \quad : \quad \Psi(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k C_k e^{ikx}$$

הבעיה פתירה בעזרת Bogoliubov transformation

$$C_{1k}^{+} = \alpha_k C_{Rk}^{+} + \beta_k C_{Lk}^{+}$$

$$C_{2k}^{+} = -\beta_k C_{Rk}^{+} + \alpha_k C_{Lk}^{+}$$

$$\alpha_k = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{vk}{E(k)}\right)\right]^{1/2} \quad , \quad \beta_k = \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{vk}{E(k)}\right)\right]^{1/2}$$ כאשר

$$E(k) = \sqrt{(vk)^2+\Delta^2} \quad , \quad \Delta = \frac{yv}{2\alpha}$$

$$H = \sum_k E(k)\left[C_{1k}^{+}C_{1k} - C_{2k}^{+}C_{2k}\right]$$

ואמנם קיבלנו תוצאה המשופרת עם ההערכה שהשגנו תוך שימוש ב RG עבור $K=\frac{1}{2}$

שימו לב כי דווקא הספקטרום במקרה זה מתקבל באופן פשוט ומדויק מהמעבר לתאור בשפת הפרמיונים. הבעיה תישא בפונקציות קורלציה אלקטרוניות עבור המקרה הנ"ל שאר היה קשה מאוד שלפונקציות החלק תלוי הספין של האלקטרון המקוריים הינו Ψ_L:

$$\sim e^{i\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\theta_s+\phi_s)(x)} = \Psi_L^{+}(x)\, e^{-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\phi_s(x)}$$

$$= \Psi_L^{+}(x)\, e^{-i\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{x} dx'\left[\Psi_L^{+}(x')\Psi_L(x') + \Psi_R^{+}(x')\Psi_R(x')\right]}$$

שכן הקורלציות עבור גם במקרה בו Ψ_L ! Ψ_R חופשיים הינן קשה.

עבור מערכת איזוטרופית תחת סקלינג $y_{\parallel} = y$ על הקו הזה באזור של העקומה לזרימה תחת: $y<0$ נקבל:

$$y(l) = \frac{y_0}{1+y_0 l}$$

$$l^* = 1-\frac{1}{y_0} \simeq -\frac{1}{y_0}$$

ולכן

$$\Delta_s \sim \frac{v_s}{\alpha_0} e^{-\frac{1}{|y_0|}}$$

הפער הינו אקספוננציאלי קטן בקבוע הצימוד.

בקרבת הספרטריקס $y = y_{\parallel}$ נוכל להשתמש בתוצאה האנליטית של משוואת ה RG

$$\arctan\left(\frac{y_{\parallel 0}}{\sqrt{y_0^2 - y_{\parallel 0}^2}}\right) - \arctan\left(\frac{y_{\parallel}}{\sqrt{y_0^2 - y_{\parallel 0}^2}}\right) = \sqrt{y_0^2 - y_{\parallel 0}^2}\; l$$

לכן עבור $y_0 \simeq y_{\parallel 0}$ בתחום זה הגורם לזמן l $y_0 \to -\infty$ כי

$$l^* \sim \frac{\pi}{\sqrt{y_0^2 - y_{0\parallel}^2}} \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2 y_{0\parallel}(y_0 - y_{0\parallel})}}$$

עבור זמן אקספוננציאלי קטן כשנוגע המרחק למספר המוגדר על ידי ה seperatrix.

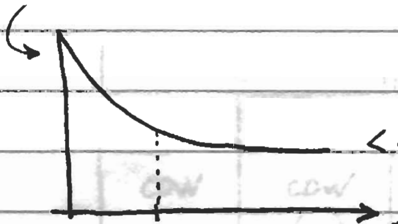
בתחום המסדר האנרגיה הפוטנציאלי $g_{\perp}\int dx \cos(\sqrt{8\pi}\phi_s)$ אזי vacuum expectation value ל ϕ_s:

$$\phi_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + 2n\sqrt{\frac{\pi}{8}} \qquad g_{\perp} > 0$$

$$\phi_s = 0 + 2n\sqrt{\frac{\pi}{8}} \qquad g_{\perp} < 0$$

למעשה ϕ_s כלוא במינימום של הפוטנציאל. המספר שבחר בוחן סימטרי את הסימטריה $\phi_s \to -\phi_s$. אין שום סתירה למשפט Mermin Wager מכיון שזו סימטריה גלובלית <u>בדידה</u> ולא רציפה. מכיון ש ϕ_s מסדר פונקציות קורלציה המגולמות שדה זה דועכות אקספוננציאלית לערך הנקבע על ידי ערך התצפית של האופרטור המכיל את ϕ_s

$$\langle f(\phi_s(r))\, f(\phi_s(r'))\rangle \xrightarrow{r-r' \to \infty} \langle f(\phi_s(r))\rangle \langle f(\phi_s(r'))\rangle = \langle f(\phi_s(r))\rangle^2$$



סופר

$$\begin{matrix}\langle \cos(\sqrt{2\pi}\phi_s)\rangle \\ \langle \sin(\sqrt{2\pi}\phi_s)\rangle\end{matrix} = \begin{cases} \begin{matrix}0 \\ C_s\end{matrix} & g_{\perp} > 0 \\ \begin{matrix}C_s \\ 0\end{matrix} & g_{\perp} < 0 \end{cases}$$

בנוסף, מכיון ש ϕ_s מוגדר השדה הצמוד לו θ_s לא מוגדר לחלוטין ומקיים

$$\langle \cos(a\theta_s)\rangle = \langle \sin(a\theta_s)\rangle = 0$$

כתוצאה מכך הדעיכה המעריכית הקורלציות של רכיבי x,y של ה SDW ו TS דועכות אקספוננציאלית.

עבור מערכת עם סימטריה סיבובית לספין והפסה המטרי $g_{\parallel}<0$ ולכן גם $g_{\perp}<0$. במקרה זה גם הקורלציות של רכיב z של ה SDW ו TS דועכות אקספוננציאלית. שכן הן פרופורציוניות ל $\sin\sqrt{2\pi}\phi_s$ שווה. לעומת הפונקציות הקורלציה של ה CDW ו SS חלק הספין הפרופורציוני ל $\cos(\sqrt{2\pi}\phi_s)$ ניתן להחליף מתוך אופרטורים על ידי ה VEV שלו C_s: ונקבל

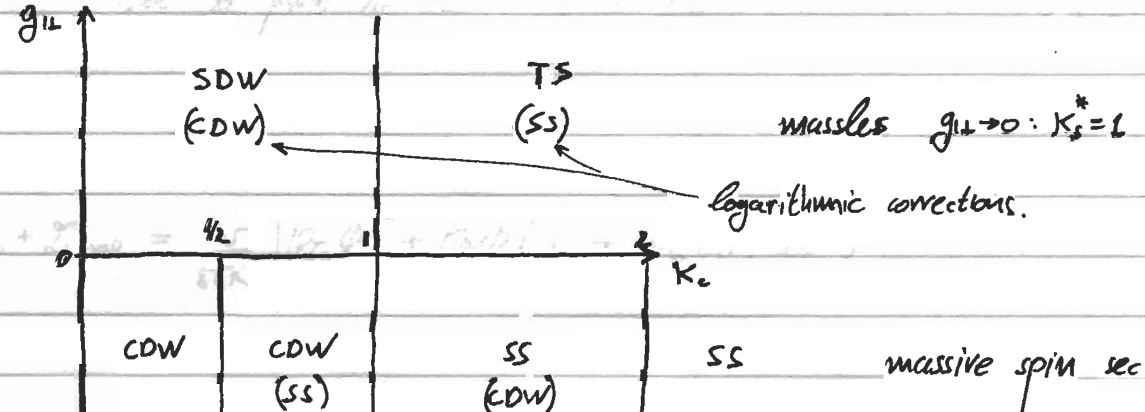
$$\langle \theta^{+}_{CDW}(r)\,\theta_{CDW}(0)\rangle \sim C_s^2\left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{K_c} \qquad \chi_{CDW} \sim \omega^{K_c-2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle \theta^{+}_{SS}(r)\,\theta_{SS}(0)\rangle \sim C_s^2\left(\frac{\alpha}{r_c}\right)^{1/K_c} \qquad \chi_{SS} \sim \omega^{K_c^{-1}-2}$$

בזמן שמערכת כזו סקטור הספין אינו משפיע הקורלציות דועכות לאט יותר ובתוצאה מכך <u>שתי</u> הפלוקטואציות יכולות להתבטא בו נאות בתחום $K_c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ כאשר χ_{CDW} מתבדרת מהר יותר עבור אינטראקציות דוחות $K_c<1$ ו χ_{SS} מתבדרת מהר יותר עבור אינטראקציות דוחות $K_c>1$.

קיבלנו לכן את "דיאגרמת הפאזות" הבאה למערכת חד מימדית עם ספין עם סימטריית ספין $SU(2)$:



( ) : subdominant correlations