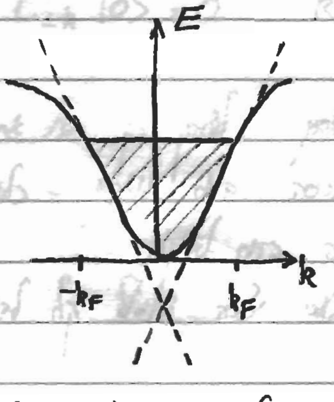
קיבלנו לכן כי כל עוד צורת הדיספרסיה נשמרת, שיפוע מעט קרוב לפרמי $v_F > 0$:

א. האנרגיה הממוצעת של זוגות אלקטרון-חור תלויה רק בתנע q.
ב. הרוחב של $\delta E(q)$ שואף לאפס עבור q קטן הרבה יותר מהר מהאנרגיה הממוצעת $E(q)$.

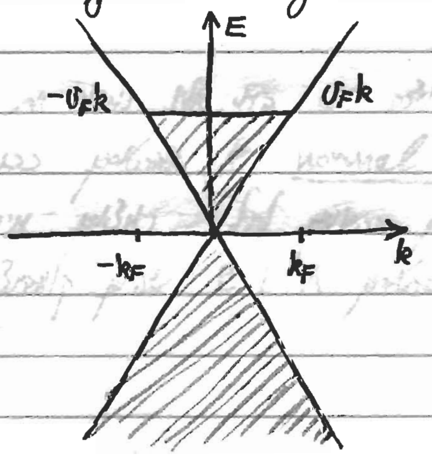
תנודות אלה מתנהגות כמו quasi-particles במודל פרמי. כתוצאה מכך במצב אחד זוגות אלקטרון-חור מתנהגים כ"חלקיקים" מוגדרים היטב. מכיוון שהם מורכבים משני אופרטורים פרמיוניים (יצירה והריסה) הם בוזונים בטבעם. זוגות אלה עומדים בבסיס של שיטת ה bosonization שמאפשרת לנו לתאר את התנהגות של מערכות חד-ממדיות בנוכחות אינטראקציות.

כדי להפוך התנודות הנ"ל למדויקות לא רק עבור q אינפיניטסימלי נחליף את המודל של אלקטרונים עם דיספרסיה ריבועית בזה של אלקטרונים עם דיספרסיה ליניארית. כדי לקבל אי תלות של אנרגיית זוגות אלקטרון-חור בתנע המקורי k עבור q כלשהו ולא רק q קטן נמשיך את הספקטרום ל $-\infty$.



המודל המקורי (אלקטרונים עם פיזור ריבועי)

Tomonaga - Luttinger Model

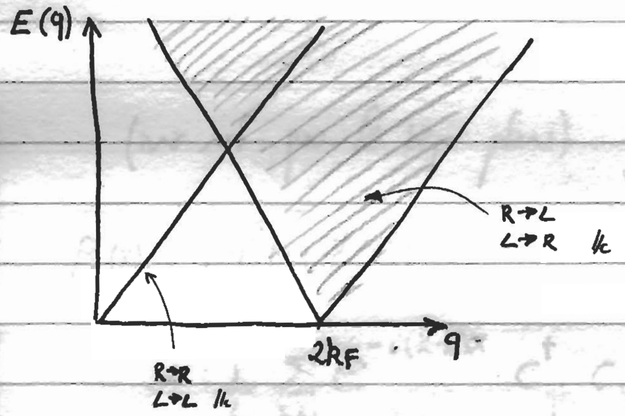


כל עוד אנו מתעניינים בתנודות המערכת השקולות עבור אנרגיות הקטנות מאוד מ E_F נצפה כי המודל הליניארי יהיה קירוב מספק.

במודל Tomonaga - Luttinger נוח לכן להציג שני סוגי פרמיונים: right and left movers עם המילטוניאן

$$H_0 = \sum_{\substack{\eta = L=-1,\, R=1 \\ k}} v_F(\eta k - k_F)\, c^\dagger_{\eta k} c_{\eta k}$$

נניח תנאי שפה מחזוריים על אורך L : $k = \frac{2\pi}{L} n$



ספקטרום עירורי אלקטרון חור במודל T-M הינו

מכיון שהוצגנו במודל T-M מספר אינסופי של מצבים מאוכלסים עלינו להיות זהירים בהגדרת ממוצעים של אופרטורים כגון אופרטור הצפיפות כדי להמנע מאינסופים. לשם כך נגדיר את:

<u>מצב הואקום</u> (ים פרמי): $|0\rangle$

$$C_{Rk}|0\rangle = 0 \qquad k > k_F$$
$$C^{\dagger}_{Rk}|0\rangle = 0 \qquad k \leq k_F$$

$$C_{Lk}|0\rangle = 0 \qquad k < -k_F$$
$$C^{\dagger}_{Lk}|0\rangle = 0 \qquad k \geq -k_F$$

מצב זה מהווה מצב הייחוס בעזרתו אנו נמדוד את ערכי התצפית של האופרטורים. לשם כך נגדיר את ה-<u>normal ordering</u> של אופרטורים כצורה בה כל אופרטורי ההריסה קודם לואקום - כלומר אופרטורים הרשומים לעיל, נמצאים מימין לכל אופרטורי היצירה בצד לואקום.
עבור שני אופרטורים A ו-B שהינם קומבינציות ליניאריות של אופרטורי יצירה והריסה קל להראות ש

$$:AB: = AB - \langle 0|AB|0\rangle$$

נגדיר גם את ה-<u>N particle ground state</u> כמצב בו מאוכלסות N הרמות המינימליות ביותר הפנויות מעל $|0\rangle$ או חסרות N הרמות העליונות המאוכלסות ב $|0\rangle$.
מכיון שאצלנו קיימים שני סוגי פרמיונים עלינו להגדיר את המצב הנ"ל בהינתן N_L, N_R מספר החלקיקים הנוספים או החסרים בצד לענף השמאלי והימני בהתאמה. נסמן מצב זה ב: $|N_L, N_R\rangle$.

בעזרת מוסכמות אלה נגדיר כעת את <u>אופרטור הצפיפות</u> : (נתעלם מקיומו של ספין לשם נוחות)

$$\rho_\eta(x) = :\psi^\dagger_\eta(x)\,\psi_\eta(x):$$

$$= :\frac{1}{L}\sum_{kk'} e^{-i(k-k')x}\, c^\dagger_{\eta k}\, c_{\eta k'}: \qquad\qquad \psi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k e^{ikx} c_{\eta k}$$

ואת האופרטור הנ"ל בהצגת התנע

$$\rho^\dagger_\eta(q) = \int_0^L dx\, e^{iqx}\, \rho_\eta(x)$$

$$= \begin{cases} \sum_k c^\dagger_{\eta,k+q}\, c_{\eta,k} & q\neq 0 \\ \sum_k \left[c^\dagger_{\eta,k}\, c_{\eta k} - \langle 0| c^\dagger_{\eta k}\, c_{\eta k} |0\rangle \right] \equiv \hat{N}_\eta & q=0 \end{cases}$$

כאשר המקרה $q=0$ מגדיר את <u>אופרטורי המספר ביחס לואקום</u>: $\hat{N}_\eta$

בגלל מכיון ש $\rho_\eta(x)$ הרמיטי $\rho^\dagger_\eta(q)=\rho_\eta(-q)$.

נבחן את יחסי הקומוטציה של אופרטורי הצפיפות. מכיון ש $\{c_{\eta k}, c^\dagger_{\eta' k'}\}=\delta_{kk'}\delta_{\eta\eta'}$ ברור ש

$$\left[\rho^\dagger_\eta(q), \rho^\dagger_{\eta'}(q')\right] = 0 \qquad \eta\neq\eta' \text{ עבור}$$

עבור אופרטורי צפיפות של אותו ענף (נבחן גם את $q=0$ או $q'=0$ כי אז נקבל קומוטטור עם קבוע)

$$\left[\rho^\dagger_\eta(q), \rho^\dagger_\eta(-q')\right] = \sum_{k_1 k_2}\left[c^\dagger_{\eta k_1+q}\, c_{\eta k_1},\; c^\dagger_{\eta k_2-q'}\, c_{\eta k_2}\right]$$

$$= \sum_{k_1 k_2} c^\dagger_{\eta k_1+q}\, c_{\eta k_2}\, \delta_{k_1, k_2-q'} - c^\dagger_{\eta k_2-q'}\, c_{\eta k_1}\, \delta_{k_1+q, k_2}$$

$$= \sum_k c^\dagger_{\eta k+q-q'}\, c_{\eta k} - c^\dagger_{\eta k-q'}\, c_{\eta k-q}$$

נשים לב, על ידי שינוי משתנה הסכימה באבר השני $k \to k+q$ היינו מגיעים למסקנה כי הקומוטטור זה מתאפס. הבעיה בטענה כזו נעוצה בעובדה שעבור $q=q'$ האופרטורים המופיעים בסכום אינם מסודרים נורמלית ואנו מתעסקים למעשה בשני אינסופים. נכתוב לכן את הקומוטטור כ:

$$= \sum_k :C^+_{\eta\, k+q-q'} C_{\eta k}: - :C^+_{\eta\, k-q'} C_{\eta\, k-q}:$$

$$+ \sum_k \langle 0| C^+_{\eta, k+q-q'} C_{\eta, k} |0\rangle - \langle 0| C^+_{\eta\, k-q'} C_{\eta\, k-q} |0\rangle$$

בסכום הראשון נוכל לבצע את החלפת המשתנים שהזכרנו לעיל מכיון שהאופרטורים מסודרים נורמלית - כל אלמנטי המטריצה שלהם סופיים. כתוצאה מכך נשאר עם הסכום השני הנותן

$$= \delta_{q,q'} \sum_k \langle 0| C^+_{\eta k} C_{\eta k} |0\rangle - \langle 0| C^+_{\eta\, k-q} C_{\eta\, k-q} |0\rangle$$

$$= \delta_{qq'} \begin{cases} \sum\limits_{k=-k_F}^{\infty} 1 - \sum\limits_{k=-k_F+q}^{\infty} 1 & \eta = L \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{k_F} 1 - \sum\limits_{k=-\infty}^{k_F+q} 1 & \eta = R \end{cases} = -\delta_{\eta\eta'} \delta_{qq'}\, \eta \frac{qL}{2\pi} \quad \text{(anomaly)}$$

התוצאה הנ"ל חשובה ביותר ומבטאת את העובדה כי בגלל העובדה של אינסוף מצבים מאוכלסים אופרטורי הצפיפות מקיימים יחס חילוף שזה כמו קשר שמתקיים אצל בוזונים.

בנוסף לכך מכיון ש

$$\rho^+_L(q>0)|0\rangle = 0$$

$$\rho^+_R(q<0)|0\rangle = 0$$

אנו מסוגלים לרשום את אופרטורי היצירה וההשמדה הבוזונים הבאים כדלקמן

$$b_q = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \rho^+_L(-q)$$ עבור $q<0$

$$b^+_q = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \rho^+_L(q)$$

$$b_q = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \rho^+_R(-q)$$ עבור $q>0$

$$b^+_q = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \rho^+_R(q)$$

כמו כן ברור מהחישוב שהוביל לתוצאה זו שאופרטורי הצפיפות עבור $q \neq 0$: אופרטורי המספר $\hat{N}_L, \hat{N}_R$ מתחלפים עם האופרטורים הבוזוניים הנ"ל

$$[b_q, \hat{N}_\eta] = [b_q^\dagger, \hat{N}_\eta] = 0$$

ניתן להראות (ראו התרגיל בספר של Giamarchi) כי מרחב הפוק של N חלקיקים המתקבל מהפעלות קומבינציות של $c_{\eta k}, c_{\eta k}^\dagger$ על הואקום $|0\rangle$ זהה למרחב הנפרש ע"י הפעלת קומבינציות של $b_q^\dagger\, b_q$ על מצב היסוד ה-N חלקיקי $|N\rangle$.

ברור מתוך הגדרת מצב היסוד ה-N חלקיקי כי

$$:H_{TL}: |N_L, N_R\rangle = \sum_{\eta = L,R} \begin{cases} \frac{2\pi}{L} v_F \sum_{m=1}^{N_\eta} m \; |N_L, N_R\rangle & N_\eta \geq 0 \\ -\frac{2\pi}{L} v_F \sum_{m=N_\eta+1}^{0} m \; |N_L, N_R\rangle & N_\eta < 0 \end{cases} = \frac{\pi v_F}{L} \sum_\eta N_\eta (N_\eta + 1) \, |N_L, N_R\rangle$$

עבור N_η קבוע אלו הם מצבים בעלי האנרגיה המינימלית עבור כל מצב. הם צריכים להיות חלק עבור מערכת סופית ובהגבלות כמות אנרגיה C/L — הם גם משנים את אנרגיית היסוד של המערכת.

נעבור כעת לחשב את (עבור $q>0$)

$$[b_q, H_{TL}] = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \sum_{\eta k} \left[\rho_R^\dagger(-q),\, v_F(\eta k - k_F)\, c_{\eta k}^\dagger c_{\eta k}\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \sum_{k k_1} v_F (k - k_F) \left(c_{R\, k_1-q}^\dagger c_{Rk}\, \delta_{k_1,k} - c_{Rk}^\dagger c_{R k_1}\, \delta_{k_1-q,k} \right)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \sum_{k} v_F (k - k_F) \left(c_{R\, k-q}^\dagger c_{Rk} - c_{Rk}^\dagger c_{R\, k+q} \right)$$

מכיוון ש $q>0$ אזי זה היה n.o
אנו יכולים להזיז את משתנה הסכימה

$$= \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \sum_{k} \left[v_F (k - k_F)\, c_{R\, k-q}^\dagger c_{Rk} - v_F(k-q-k_F)\, c_{R\, k-q}^\dagger c_{Rk} \right]$$

$$= v_F q \cdot \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \sum_k c_{R\,k-q}^\dagger c_{Rk}$$

$$= v_F |q|\, b_q$$

$$[H_{TL}, b_q^\dagger] = v_F |q|\, b_q^\dagger$$

באופן דומה ניתן להראות זאת גם עבור המקרה $q<0$. וגם קיבלנו $[b_q, H] = v_F |q| b_q$

$$H b_q^+ |E\rangle = \left(E + v_F|q|\right) b_q^+ |E\rangle \quad \Leftarrow$$

מכיון ש $|N\rangle$ היא מצב עצמי של H ומכיון שלמעשה המרחב הנפרש על ידי אופרטורי הצפיפות ו-N $|N\rangle$ זהה למרחב ~~הנפרש~~ המצבים בעלי N חלקיקים המתקבלים מהפעלת C^+, C על $|0\rangle$ נקבל כי:

$$H_{TL} = \sum_{q\neq 0} v_F |q|\, b_q^+ b_q + \frac{\pi v_F}{L} \sum_{\eta} \hat{N}_\eta (\hat{N}_\eta + 1)$$

נשים לב מכאן כי האנרגיה הקינטית, שבאופן רגיל היא ריבועית באופרטורים הפרמיונים, יכולה להיות מבוטאת גם באופן קוורטי באופרטורים הפרמיונים - כלומר באופן ריבועי באופרטורי הצפיפות. עובדה זו תגרום לכך שההמילטוניאן ישאר ריבועי באופרטורי הצפיפות גם בנוכחות אינטראקציה.

מכיון שאופרטורי הצפיפות b_q, b_q^+ אינם משנים את מספר החלקיקים במערכת עלינו להגדיר מרכיב נוסף במודל שיעשה זאת. אלו הם ה <u>Klein Factors</u>. הללו מוגדרים בעזרת הקומוטטורים הבאים

$$[F_\eta, b_q] = [F_\eta^+, b_q] = 0$$

ובפעולתם על מצב N חלקיקים כללי מהצורה $f(b^+)|N\rangle$:

$$F_\eta^+ f(b^+)|N\rangle \equiv f(b^+)\, C^+_{\eta, N_\eta+1} |N\rangle$$

$$F_\eta f(b^+)|N\rangle \equiv f(b^+)\, C_{\eta, N_\eta} |N\rangle$$

מכיון שהספקטרום של $\hat{N}$ אינו חסום מלמעלה או מלמטה מתקיים

$$F_\eta^{-1} = F_\eta^+$$

וגם כן קל להראות ש

תנאי זה יבוא לאנטי-קומוטציה בין סוגי פרמיונים שונים : עבור $\eta \neq \eta'$

$$\{F_\eta, F_{\eta'}\} = 0$$

ועם זאת שימו לב כי $F_\eta^2 \neq 0$

$$\{F_\eta, F_{\eta'}^+\} = 2\delta_{\eta\eta'}$$

$$[F_\eta, \hat{N}_{\eta'}] = \delta_{\eta\eta'} F_\eta$$

אנו מעוניינים כעת למצוא ביטוי לאופרטור הפרמיוני $\Psi_{L,R}(x)$ במונחי אופרטורי הצפיפות הבוזוניים.
לצורך כך נשים לב כי עבור $q<0$

$$[b_q, \Psi_L(x)] = \left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{kk_1} \left[C^+_{Lk-q} C_{Lk},\ e^{ik_1x} C_{Lk_1} \right]$$

$$= -\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{kk_1} e^{ik_1x} C_{Lk}\, \delta_{k-q,k_1}$$

$$= \underbrace{-\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-iqx}}_{\alpha^*_q(x)} \Psi_L(x)$$

$$b_q \Psi_L(x)|N\rangle = \Psi_L(x) \underbrace{b_q|N\rangle}_{0} + \alpha^*_q(x) \Psi_L(x)|N\rangle = \alpha^*_q(x) \Psi_L(x)|N\rangle \quad \Leftarrow$$

קיבלנו לכן כי $\Psi_L(x)|N\rangle$ הינו מצב קוהרנטי: מצב עצמי של $b_{q<0}$ עם ערך עצמי $\alpha_{q<0}(x)$.
ידועה לנו לכן הצגה של מצב קוהרנטי:

$$\Psi_L(x)|N\rangle = F_L \lambda_L(x) e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} |N\rangle$$

כאשר F_L נדרש מכיוון ש Ψ_L מוריד חלקיק אחד מהמערכת ו $\lambda_L(x)$ הינו פקטור פאזה אותו נוכל לחשב מתוך:

$$\langle N| F^+_L \Psi_L(x) |N\rangle = \langle N| F^+_L F_L \lambda_L(x) e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} |N\rangle \qquad \Leftarrow F^+_L F_L = 1$$

$$= \langle N| e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} \lambda_L(x) |N\rangle$$

$$= \langle N| \lambda_L(x) |N\rangle = \lambda_L(x)$$

מצד שני

$$\langle N| F^+_L \Psi_L(x) |N\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} \langle N| F^+_L C_{Lk} |N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\left(k_F + \frac{2\pi N_L}{L}\right)x}$$

מכיוון ש F_L הורס את המצב העליון המאוכלס ב $|N\rangle$:

נבדוק את הביטוי אליו הגענו:

$$b_q F_L \lambda_L(x) e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} |N\rangle = F_L \lambda_L(x) b_q e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} |N\rangle$$

$$= F_L \lambda_L(x) e^{\sum_{q<0} \alpha^*_q(x) b^+_q} \left(b_q + \alpha^*_q(x)\right) |N\rangle$$

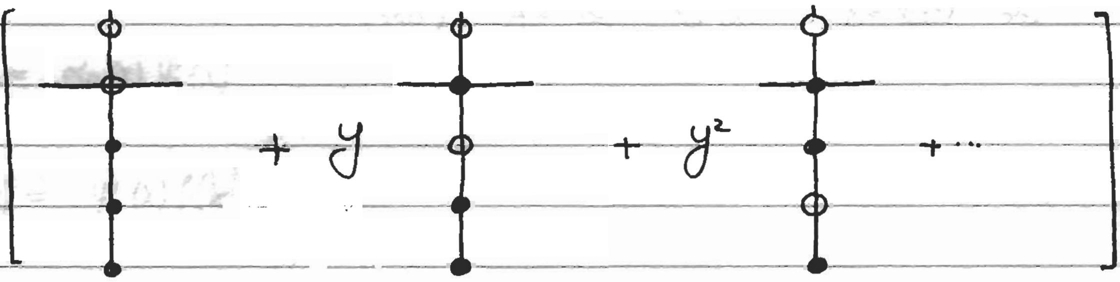
נשתמש ב $Ae^B = e^B(A+C)$
כאשר A ו B מתחלפים עם $C=[A,B]$
ואנו מקבלים מה שצריך מכיוון ש $b_q|N\rangle=0$.

העובדה כי ל $\langle N|\Psi_L(x)$ הצגה של מצב קוהרנטי באופני $b_{q<0}$ מוצג על כך שפעולת $\Psi_L(x)$ על $\langle N|$ ניתנת לביטוי בשתי דרכים שונות:

$$\Psi_L(X) \propto e^{-ik_FX} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^n c_n \qquad y = e^{\frac{2\pi}{L} iX}$$

$$\Leftarrow \quad \Psi_L(X)|0\rangle \propto e^{-ik_FX} \sum_{n=0}^{\infty} y^n c_n|0\rangle$$

$= e^{-ik_FX}$



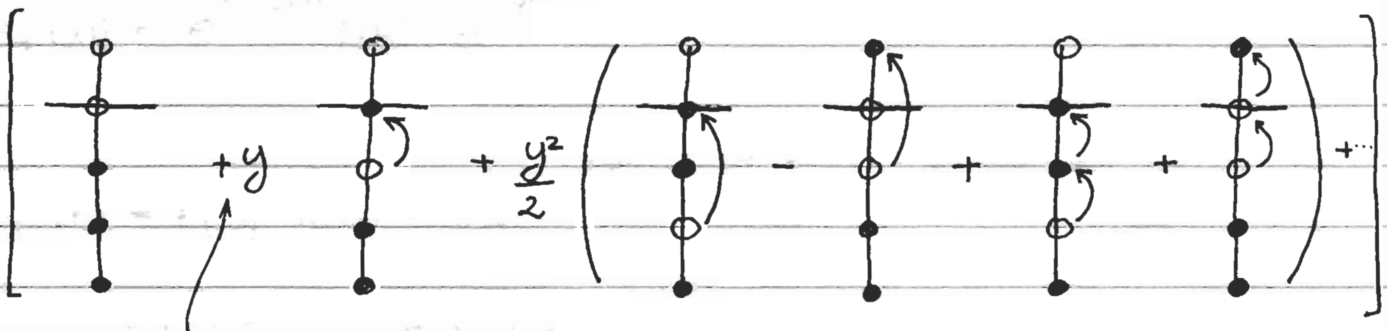
ומצד שני

$$e^{\sum_{q<0} \alpha_q^*(x) b_q^+} = e^{-\sum_{q<0} \frac{2\pi}{L|q|} e^{-iqx} \sum_k c_{k+q}^+ c_k}$$

$$= e^{-\sum_{n>0} \frac{1}{n} y^n \sum_m c_{m-n}^+ c_m}$$

$$\Leftarrow \quad e^{-ik_FX} e^{\sum_{q<0} \alpha_q^*(x) b_q^+} F_L|0\rangle = e^{-ik_FX} e^{-\sum_{n>0} \frac{1}{n} y^n \sum_m c_{m-n}^+ c_m}$$

$= e^{-ik_FX}$



$-y\, c_0^+ c_1 \cdot c_0|0\rangle$ עבור N
$= y\, c_1|0\rangle$

אנו רואים כי הצגה הקודמת מקיימת התבטלויות בין אמפליטודות חלקים שונים המרכבים מסכום שונים של אופרטורי צפיפות.

נבדוק כעת את הפעולה של $\Psi_L(x)$ על מצב כללי עם N אלקטרונים.
לצורך העניין נשתמש בזהויות הבאות:

א. אם $[A,B] = DB$ ו- $[A,D]=[B,D]=0$ אזי $AB = B(A+D) \Rightarrow A^n B = B(A+D)^n$

$$\Rightarrow f(A)B = Bf(A+D)$$

עבור $B = \Psi_L(x)$, $A = b_q^+ - \alpha_q(x)$ $(q<0)$

$$[A,B] = [b_q^+, \Psi_L(x)] = \underbrace{\alpha_q(x)}_{D}\Psi_L(x)$$

$$\Leftarrow \quad f(b_q^+ - \alpha_q(x))\Psi_L(x) = \Psi_L(x) f(b_q^+)$$

ב. אם $[A,B] = C$ ו- $[A,C]=[B,C]=0$

$$e^{-B} f(A) e^{B} = f(A+C)$$

נגדיר

$$\varphi_L^+(x) = i\sum_{q<0} \alpha_q^*(x) b_q^+$$

$$\varphi_L(x) = -i\sum_{q<0} \alpha_q(x) b_q$$

נשתמש בזהות הנ"ל עבור $A = b_q^+$, $B = i\varphi_L(x)$

$$[A,B] = -\alpha_q(x)$$

$$\Leftarrow \quad f(b_q^+ - \alpha_q(x)) = e^{-i\varphi_L(x)} f(b_q^+) e^{i\varphi_L(x)}$$

נמצא את $\Psi_L(x)$ על מצב כללי עם N אלקטרונים:
שימוש ב א.

$$\Psi_L(x) f(b_{q<0}^+)|N\rangle = f(b_q^+ - \alpha_q(x))\Psi_L(x)|N\rangle$$

$$= f(b_q^+ - \alpha_q(x)) F_L \lambda_L(x) e^{-i\varphi_L^+(x)}|N\rangle$$

$$= F_L \lambda_L(x) e^{-i\varphi_L^+(x)} f(b_q^+ - \alpha_q(x))|N\rangle \qquad : [F, b^+] = [\varphi^+, b^+] = 0$$

$$= F_L \lambda_L(x) e^{-i\varphi_L^+(x)} e^{-i\varphi_L(x)} f(b_q^+) e^{i\varphi_L(x)}|N\rangle \qquad \text{שימוש ב ב.}$$

$$= F_L \lambda_L(x) e^{-i\varphi_L^+(x)} e^{-i\varphi_L(x)} f(b_q^+)|N\rangle \qquad ; b|N\rangle = 0$$

$$\psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} F_L\, e^{-i\left(k_F + \frac{2\pi N_L}{L}\right)x}\, e^{-i\varphi_L^{+}(x)}\, e^{-i\varphi_L(x)}$$ נקבל לכן את הצגת האלקטרונים

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{C}{2}}$$ נוכל לאחד את שני האקספוננטים רק משום ש

כאשר $C=[A,B]$ ומתקיים $[A,C]=[B,C]=0$

$$[\varphi_L^{+}(x), \varphi_L(x')] = -\sum_{q<0} \alpha_q^{*}(x)\,\alpha_q(x')$$

$$= -\sum_{q<0} \frac{2\pi}{L|q|} e^{iq(x'-x)}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{2\pi}{L}\left(i(x-x')+\alpha\right)\cdot n}$$ נבצע סכום הטור ההנדסי

$$= +\ln\left[1-e^{-\frac{2\pi}{L}[i(x-x')+\alpha]}\right] \xrightarrow{L\to\infty} +\ln\left[\frac{2\pi i}{L}(x-x'-i\alpha)\right]$$

$$\psi_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_L\, e^{-i\left(k_F + \frac{2\pi \hat{N}_L}{L}\right)x}\, e^{-i\phi_L(x)} \quad \Leftarrow$$

$$\phi_L(x) = \varphi_L(x) + \varphi_L^{+}(x)$$ כאשר

$$= i\sum_{q<0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2}\left(e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b_q^{+}\right)$$

$$= i\sum_{q<0} \frac{2\pi}{L|q|}\left(e^{iqx}\rho_L^{+}(-q) - e^{-iqx}\rho_L(q)\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{L}\sum_{q\neq0}' \frac{1}{q} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\rho_L^{+}(q)$$

$$\psi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_R\, e^{i\left(k_F + \frac{2\pi \hat{N}_R}{L}\right)x}\, e^{-i\phi_R(x)}$$ באופן דומה נקבל עבור ה right moving field

$$\phi_R(x) = \varphi_R(x) + \varphi_R^{+}(x)$$ כאשר

$$= i\sum_{q>0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2}\left(e^{iqx} b_q - e^{-iqx} b_q^{+}\right)$$

$$= -\frac{2\pi i}{L}\sum_{q\neq0} \frac{1}{q} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\rho_R^{+}(q)$$

נכתוב את השדה

$$\phi(x) = -i\sum_{q\neq 0}\left(\frac{|q|}{2L}\right)^{1/2}\frac{1}{q}\,e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(b_q^+ + b_{-q}\right)$$

$$\theta(x) = i\sum_{q\neq 0}\left(\frac{|q|}{2L}\right)^{1/2}\frac{1}{|q|}\,e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(b_q^+ - b_{-q}\right)$$

שינוי לפי
סדר מאמר

$$-\sqrt{\pi}\left(\phi(x)+\theta(x)\right) = -i\sum_{q<0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\,b_q^+ + i\sum_{q>0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\,b_{-q}$$

$$= i\sum_{q<0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(e^{iqx}b_q - e^{-iqx}b_q^+\right) = \phi_L(x)$$

$$\sqrt{\pi}\left(\phi(x)-\theta(x)\right) = i\sum_{q<0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\,b_{-q} - i\sum_{q>0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\,b_q^+$$

$$= i\sum_{q>0}\left(\frac{2\pi}{L|q|}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(e^{iqx}b_q - e^{-iqx}b_q^+\right) = \phi_R(x)$$

$$\psi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}F_\eta\, e^{i\eta\left(k_F+\frac{2\pi}{L}\hat{N}_\eta\right)x}\; e^{-i\sqrt{\pi}\left[\eta\phi(x)-\theta(x)\right]}$$

כש

השדות ϕ ו θ מקיימים יחסי חילוף מעורבים:

$$[\phi(x),\theta(x')] = \frac{1}{L}\sum_{q\neq 0}\frac{1}{q}\,e^{iq(x'-x)-\alpha|q|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[e^{-\frac{2\pi}{L}\left[i(x-x')+\alpha\right]n} - e^{-\frac{2\pi}{L}\left[i(x'-x)+\alpha\right]n}\right]$$

$$\xrightarrow{L\to\infty} -\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left[\frac{2\pi i}{L}\left(x-x'-i\alpha\right)\right] - \ln\left[\frac{2\pi i}{L}\left(x'-x-i\alpha\right)\right]\right]$$

$$= \frac{i}{2}\,\mathrm{sign}(x'-x)$$

ל $\ln(z)$ branch cut על ציר z השלילי:

$$\left[\phi(x),\partial_{x'}\theta(x')\right] = i\,\delta(x'-x)$$

מכאן נקבל ש

כלומר $\partial_x\theta$ הינו התנע הצמוד ל ϕ.

נמצא גם פרוש פיזיקלי ל $\partial_x\phi$, $\partial_x\theta$:

$$\partial_x\phi = -\sum_{q\neq 0}\left(\frac{|q|}{2L}\right)^{1/2} e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(b_q^+ + b_{-q}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{L}\sum_{q\neq 0} e^{-iqx}\left[\rho_L^+(q)+\rho_R^+(q)\right] = -\sqrt{\pi}\left[\rho_L(x)+\rho_R(x)\right]$$

$$\partial_x\theta = \sum_{q\neq 0}\left(\frac{|q|}{2L}\right)^{1/2}\mathrm{sign}(q)\, e^{-iqx-\frac{\alpha}{2}|q|}\left(b_q^+ - b_{-q}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{L}\sum_{q\neq 0} e^{-iqx}\left[\rho_R^+(q)-\rho_L^+(q)\right] = \sqrt{\pi}\left[\rho_R(x)-\rho_L(x)\right]$$

לכן $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi$ היא החלק $q\neq 0$ של הצפיפות בנקודה X

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\theta$ סופר את ההפרש בין צפיפות האלקטרונים הנעים ימינה וצפיפות האלקטרונים הנעים שמאלה ולכן מתאר את אופרטור הזרם (עד כדי v_F) במודל החד מימדי שלנו.

אנו קיבלנו את הביטויים הנ"ל מתוך הביטוי לשדות ϕ ו θ. נראה גם כי ניתן להגיע לאותה המסקנה תוך שימוש בשיטה הדומה שמציגה לאופרטורים הפרמיוניים. נתבונן לדוגמא בצפיפות ה left movers $\psi_L^+(x)\psi_L(x)$. אופרטור זה אינו normal ordered וצריך לדרוש אינסוף מכיוון שאנו מחשבים את מכפלת האופרטורים באותה נקודה. כדי להמנע מכך נשתמש במושג ה point splitting : נגדיר:

$$\lim_{x'\to x} :\psi_L^+(x')\psi_L(x):$$

$$= \lim_{x'\to x}\frac{1}{L} : e^{i\varphi_L^+(x')}\, e^{i\varphi_L(x')}\, e^{-i\varphi_L^+(x)}\, e^{-i\varphi_L(x)} :$$

נשתמש ב $e^A e^B = e^B e^A e^C$ וב $[\varphi_L(x'),\varphi_L^+(x)] = -\ln\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{L}(x'-x-i\alpha)}\right)$

$$= \lim_{x'\to x}\frac{1}{L}\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi i}{L}(x'-x-i\alpha)}} : e^{i\left[\varphi_L^+(x')-\varphi_L^+(x)\right]}\, e^{i\left[\varphi_L(x')-\varphi_L(x)\right]} : \qquad [\varphi(x'),\varphi(x)]=0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{L}\frac{1}{\frac{2\pi i}{L}(x'-x)} : e^{i(x'-x)\partial_x\varphi_L^+}\, e^{i(x'-x)\partial_x\varphi_L} :$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x'-x}\; :\left[1+i(x'-x)\,\partial_x\varphi_L^{+}\right]\left[1+i(x'-x)\,\partial_x\varphi_L\right]:$$

$$\xrightarrow{x'\to x} \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{x'-x}\; :\left[1+i(x'-x)\,\partial_x\phi_L\right]: \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\partial_x\phi_L$$

באופן דומה תוך שימוש ב $[\varphi_R(x'),\varphi_R^{+}(x)] = -\ln\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{L}(x-x'-i\alpha)}\right)$ נקבל ש

$$\lim_{x'\to x} :\Psi_R^{+}(x')\Psi_R(x): \;=\; -\frac{1}{2\pi}\,\partial_x\phi_R$$

$$\Leftarrow\quad :\Psi_L^{+}(x)\Psi_L(x) + \Psi_R^{+}(x)\Psi_R(x): \;=\; \frac{1}{2\pi}\left(\partial_x\phi_L - \partial_x\phi_R\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\sqrt{\pi}\,\partial_x(\phi+\theta) - \sqrt{\pi}\,\partial_x(\phi-\theta)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\partial_x\phi$$

תוצאה זו והקשר הקנוני בין ϕ ו θ מאפשרת לנו למצוא ביטוי הפוך לאופרטורי השדה הפרמיוניים מנקודת מבט נוספת:

מכיון ש $\quad \Psi_\eta^{+}(x) \quad e^{i\sqrt{\pi}\,[\eta\phi(x)-\theta(x)]}$

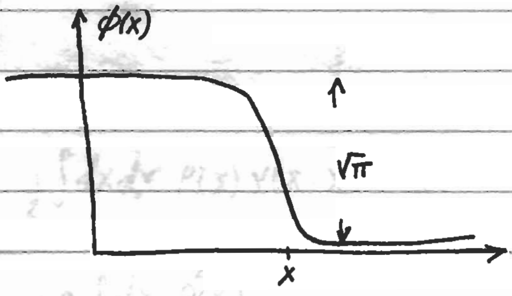
$$= e^{-i\sqrt{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x} dx'\,\Pi(x') - \eta\phi(x)\right]}$$

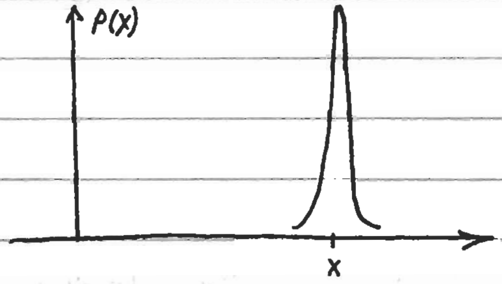
$\Pi(x) = \partial_x\theta$ והם הצמוד ל ϕ

ומכיון שעבור שני משתנים צמודים קנוניים $[X,P]=i$ $\quad e^{-iaP}$ הינו אופרטור ההזזה ב X:

$$X e^{-iaP} = e^{-iaP}(X+a)$$

אנו רואים כי החלק $e^{-i\sqrt{\pi}\theta}$ ב Ψ_η^{+} יוצר kink בגובה $\sqrt{\pi}$ בשדה ϕ מ $-\infty$ עד X:
מזיז את הקונפיגורציה הקלאסית של ϕ ב $\sqrt{\pi}$ משמאל לנקודה X





מכיון ש $\rho(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi$ חלק זה ב $\psi^+_\eta(x)$ יוצר לכן מטען מרוכז (עם מטען יחידה) בנקודה x.

הפקטור $e^{i\sqrt{\pi}\eta\phi(x)}$ ב $\psi^+_\eta(x)$ אחראי לקבלת יחסי האנטי קומוטציה בין $\psi^+_\eta(x)$ ו $\psi^+_\eta(x')$ בנקודות שונות. לדוגמא:

$$\psi^+_L(x)\,\psi^+_L(x') = e^{-i\sqrt{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x} d\tilde{x}\,\pi(\tilde{x}) + \phi(x)\right]}\, e^{-i\sqrt{\pi}\left[\int_{-\infty}^{x'} d\tilde{x}\,\pi(\tilde{x}) + \phi(x')\right]}$$

משתמשים בכלל ב $e^A e^B = e^B e^A e^C$ עם

$$C = -\pi\left\{\left[\int_{-\infty}^{x} d\tilde{x}\,\pi(\tilde{x}), \phi(x')\right] + \left[\phi(x), \int_{-\infty}^{x'} d\tilde{x}\,\pi(\tilde{x})\right]\right\}$$

$$= -i\pi\left[-\theta(x-x') + \theta(x'-x)\right] = i\pi\left[2\theta(x-x') - 1\right]$$

נקבל:

$$= -\psi^+_L(x')\,\psi_L(x)$$

נבנה כעת הרמילטוניאן $H = \sum_q v_F |q|\, b^+_q b_q$ קל לבדוק שמתקיים ש:

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{2|q|L}}\int dx\, e^{-iqx}\left(\frac{\partial_x\theta}{\mathrm{sign}(q)} - \partial_x\phi\right)$$

$$b^+_q = \frac{1}{\sqrt{2|q|L}}\int dx\, e^{iqx}\left(\frac{\partial_x\theta}{\mathrm{sign}(q)} - \partial_x\phi\right)$$

$$H = \int dx\, \frac{v_F}{2}\left[(\partial_x\theta)^2 + (\partial_x\phi)^2\right]$$

ניתן להגיע לתוצאה זו גם תוך שימוש בטכניקת ה point splitting תוך שימוש בהגדרה ש H ניתן לכתיבה גם כ:

$$:H: = \int dx \sum_\eta (-i\eta) :\psi^+_\eta\, \partial_x \psi_\eta:$$

אני משאיר זאת כתרגיל, ומציג את תשובה לנוכח כי במקרה זה יש צורך לפתח האקספוננטים עד סדר שני ב $x-x'$.

עד כה עסקנו במעבר בין התאור הפרמיוני והבוזוני של המודל החד-ממדי. נבנה כעת לכלול אינטראקציות במודל ונראה כיצד, בלשון הבוזונית, ניתן לפתור את המודל באופן מדויק גם בנוכחותן. נניח כי האינטראקציה היא מהצורה

$$\frac{1}{2}\int dx\,dx'\,\rho(x)\,V(x-x')\,\rho(x')$$

ובפרט עבור אינטראקציה קצרת טווח $V(x-x') = g\,\delta(x-x')$

$$\frac{1}{2}g\int dx\,\rho^2(x)$$

למעשה אנו מחליפים לאינטראקציה עם טווח סופי a כך ש- $g\psi^\dagger(x)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x) \overset{a\to 0}{\simeq} g\,\psi^\dagger(x+a)\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi(x+a)$

את האופרטור הפרמיוני

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k e^{ikx} c_k$$

נוכל לקרב כ:

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{V}}\left[\sum_{-\Lambda<k+k_F<\Lambda} e^{ikx} c_k + \sum_{-\Lambda<k-k_F<\Lambda} e^{ikx} c_k\right]$$

$$\equiv \psi_L(x) + \psi_R(x)$$

כאשר Λ הינו cut off מסדר גודל של $\frac{E_F}{v_F}$ כך שהסכום הראשון מתאר את תנועת ה left movers ליד $k\simeq -k_F$ והסכום השני את תנועת ה right movers ליד $k\simeq k_F$.

נקבל:

$$\psi^\dagger(x)\psi(x) = \psi_L^\dagger(x)\psi_L(x) + \psi_R^\dagger(x)\psi_R(x) + \underbrace{\psi_L^\dagger(x)\psi_R(x)}_{\sim e^{-2ik_Fx}} + \underbrace{\psi_R^\dagger(x)\psi_L(x)}_{\sim e^{2ik_Fx}}$$

שני האיברים הראשונים בביטוי זה מתארים את הרכיב $q\sim 0$ של הצפיפות בו זוגות אלקטרון-חור מתרכזים בסביבת נקודות פרמי השמאלית או הימנית. שני האיברים האחרונים מתאימים לרכיב $q\sim \pm 2k_F$ של הצפיפות בהם חלקיק מועבר מצד אחד של משטח פרמי החד מימדי לצידו השני.

כתוצאה מפירוק זה נקבל כי עבור חלקיקים חסרי ספין עלינו להתחשב בתהליכים הבאים:

א. אינטראקציה בין חלקיקים ליד אותה נקודת פרמי: נהוג לסמן את האמפליטודה שלה ב g_4

$$\frac{1}{2}g_4\,\psi_L^\dagger(x)\psi_L(x)\psi_L^\dagger(x)\psi_L(x)$$

$$= \frac{g_4}{2}\rho_L^2(x) = \frac{g_4}{2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi + \partial_x\theta)\right]^2$$

ובאופן דומה

$$\frac{1}{2}g_4\,\psi_R^\dagger(x)\psi_R(x)\psi_R^\dagger(x)\psi_R(x)$$

$$= \frac{g_4}{2}\rho_R^2(x) = \frac{g_4}{2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi - \partial_x\theta)\right]^2$$

כך שסוכמים אברים אלה ואין לכפול ב:

$$\int dx\, \frac{g_4}{4\pi}\left[(\partial_x\theta)^2 + (\partial_x\phi)^2\right]$$

אם נוסיף אינטראקציה זו להמילטוניאן הרגיל נראה כי תלוי g_4 רק מרנרמל את מהירות הסאונד שהגדרנו:

$$v = v_F\left(1 + \frac{g_4}{2\pi v_F}\right)$$

ב. אינטראקציה בין חלקיקים של נקודות פרמי שונות : נהוג לסמנה ב g_2:

$$g_2\, \psi_L^+(x)\psi_L(x)\psi_R^+(x)\psi_R(x) = g_2\, \rho_L(x)\rho_R(x)$$

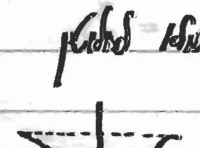
$$= g_2\left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi + \partial_x\theta)\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\partial_x\phi - \partial_x\theta)\right]$$

$$= \frac{g_2}{4\pi}\left[(\partial_x\phi)^2 - (\partial_x\theta)^2\right]$$

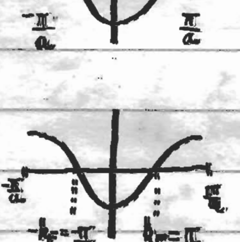
בקשר ה $\frac{1}{2}$ לפני האינטראקציה מגיע מכך שבאמר $\frac{1}{2}(\rho_L+\rho_R)^2 \sim \rho_L\rho_R$. שים לב שיש עוד דבר כי אנו חלקיקים יכולים לעבור בין האזור $q\sim 2k_F$ והאזור $q\sim -2k_F$ ב ρ ניתן תרומה דומה עם סימן שלילי. אנו נראה כי אנו עוסקים במודל TL עם אינטראקציה מהסוג $\frac{g_4}{2}(\rho_L\rho_L + \rho_R\rho_R) + g_2\rho_L\rho_R$

אברים מסדרים גבוהים היו פרופורציונים ל $e^{\pm 2ik_Fx}$ או $e^{\pm 4ik_Fx}$ ואז האינטגרל התנודות נמחקות לרוב במודל הרציף שלנו. אברים אלה יכולים להיות חשובים אם המודל מגיע ממודל בדיד על שריג כך ששומר התנע הוא עד כדי וקטור שריג הפוך: G - נובע ממשפט בלוך:

$$\psi(x) = \sum_k \psi_k(x) = \sum_k\sum_G C_{k-G}\, e^{i(k-G)x}$$



המקרה $G = 2k_F$ הבדל בין שתי נקודות אלו אשר גם ארוך ממולא לחלוטין ואינו יכולים לפזר חלקיקים מנקודת פרמי אחת לשניה.



המקרה $G = 4k_F$ מתאים עבור הבדל בין למשל half filling ב
במצב כזה האברים

$$e^{-4ik_Fx}\, \psi_L^+(x)\psi_L^+(x)\psi_R(x)\psi_R(x) + h.c$$

נקראים Umklapp processes.

אנו רואים כי ההמילטוניאן נשאר ריבועי גם בנוכחות אינטראקציות. הביטוי לחלקי g_4 שרק משנה את המהירות, חלקי g_2 משנה את המשקל היחסי בין איברי ה $\partial_x\theta$ ו $\partial_x\phi$ בהמילטוניאן. נוכל לכן לרשום את ההמילטוניאן בצורה הבאה:

$$H = \int dx\, \frac{v}{2}\left[K(\partial_x\theta)^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\phi)^2\right]$$

$$v = v_F\sqrt{\left(1+\frac{g_4}{2\pi v_F}\right)^2 - \left(\frac{g_2}{2\pi v_F}\right)^2}$$ כאשר v היא המהירות המנורמלת

$$K = \sqrt{\frac{1+\frac{g_4}{2\pi v_F}-\frac{g_2}{2\pi v_F}}{1+\frac{g_4}{2\pi v_F}+\frac{g_2}{2\pi v_F}}}$$! K הינו פרמטר (Luttinger) חסר מימדים

שימו לב כי עבור אינטראקציה דוחה $(g_2>0)$ $K<1$

ועבור אינטראקציה מושכת $(g_2<0)$ $K>1$

המערכת בעלת אינטראקציה ממופה לבעיה מקבילה על ידי אותה של בוזונים חופשיים! ע"י הגדרת $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{K}}$ $\tilde{\theta} = \sqrt{K}\theta$ (רק ש $\partial_x\tilde{\theta}$ הוא עדיין התנע הצמוד ל $\tilde{\phi}$) אנו מקבלים לבסוף המילטוניאן חופשי אלא ש v_F מוחלף במהירות המנורמלת v. מכאן אנו יודעים שהספקטרום נתון ע"י

$$\epsilon(p) = v|p| = v\frac{2\pi}{L}\cdot|m|$$

כתוצאה מכך התכונות התרמודינמיות של המערכת בעלת אינטראקציה דומות לאלה של המערכת החופשית. לדוגמה החום הסגולי של הגז החופשי הוא:

$$C_v^0 = \frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}\Big[\underset{\uparrow\ \text{right + left}}{2}\underbrace{\sum_p v_F p\, f_F(v_F p)}_{\text{right movers האנרגיה של}}\Big] = \frac{L}{\pi v_F}\beta^2\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon\,\frac{\epsilon^2}{4\cosh^2\left(\frac{\beta\epsilon}{2}\right)} = \frac{T}{v_F}\left(\frac{L\pi}{3}\right)$$

$$C_v = \frac{d}{dT}\sum_{p\neq 0} v|p|\, f_B(v|p|)$$ עבור המערכת בנוכחות אינטראקציה

$$= \frac{v^2}{4T^2}\sum_{p\neq 0}\frac{p^2}{\sinh^2\left(\frac{\beta v p}{2}\right)} = \frac{T}{v}\left(\frac{L\pi}{3}\right)$$

⇐ החום הסגולי ממשיך להיות לינארי בטמפרטורה ועובר רק מקדם רנורמליזציה $\frac{C_v}{C_v^0} = \frac{v_F}{v}$

שים לב גם לעובדה כי הגודל שקיבלנו מהפונקציה הזהה לגודל המקביל מהחישוב ההרמוני בגבול החופשי מעיד על כך שאת החישוב ניתן לעשות מהמודל הלינארי במקום מהמודל ההרמוני לבוזונים.

הקומפרסיביליות של הגז מוגדרת ב: $\kappa = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}$

נחשב בגבול $\frac{\partial\rho}{\partial\mu}$ אותו נוכל לחשב מתוך תגובת הצפיפות המוגדרת לצימוד מהצורה $\int dx\, \mu(x,t)\rho(x)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mu} = \lim_{k\to0}\lim_{\omega\to0}\left[\beta L\,\langle \rho(k,i\omega_n)\,\rho(-k,-i\omega_n)\rangle_{i\omega_n\to\omega+i\delta}\right]$$

כאשר הגבול $\omega\to0$: בפוטנציאל כמו סטטי כדי לקבל תשובה תרמודינמית נקח לבסוף הגבול $k\to0$: בפוטנציאל אחיד.

מכיון שאנו מעוניינים בגבול $k\sim0$ של הצפיפות נוכל להזניח את האיבר המתנודד ב $\pm 2k_F$:

$$\rho = \rho_L + \rho_R = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi$$

$$\Leftarrow\quad \frac{\partial\rho}{\partial\mu} = \lim_{k\to0}\lim_{\omega\to0}\frac{\beta L}{\pi}k^2\langle\phi(k,i\omega_n)\,\phi(-k,-i\omega_n)\rangle_{i\omega_n\to\omega+i\delta}$$

נחשב את פונקציית הקורלציה הזו תוך שימוש ב path integral בזמן מדומה $\tau=it$

$$Z = \int D\phi D\theta\, e^{-S}$$

האיבר הטופולוגי $\partial\phi$ ב $Z=e^{iS}$: $\int dx dt\, \partial_x\theta\partial_t\phi$

הופך תחת $\tau=it$; ל $Z=e^{-S}$: $\int dx d\tau\, -i\partial_x\theta\partial_\tau\phi$

$$S = \int_0^\beta d\tau\int_0^L dx\left[-i\,\partial_x\theta\,\partial_\tau\phi + H(\theta,\phi)\right]$$

$$= \beta L\sum_{k,\omega_n} ik\omega_n\,\theta(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n) + \frac{v}{2}\left[K k^2\theta(k,\omega_n)\theta(-k,-\omega_n) + \frac{k^2}{K}\phi(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n)\right]$$

$$\langle\phi(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n)\rangle = \frac{1}{Z}\int D\theta D\phi\,\phi(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n)\,e^{-S}$$

אינטגרציה על θ:

$$= \frac{1}{Z_\phi}\int D\phi\,\phi(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n)\cdot e^{-\frac{\beta L v}{2K}\sum_{k,\omega_n}\left(k^2+\frac{\omega_n^2}{v^2}\right)\phi(k,\omega_n)\phi(-k,-\omega_n)} = \frac{K}{\beta L v}\frac{1}{k^2+\frac{\omega_n^2}{v^2}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\mu} = \lim_{k\to 0}\lim_{\omega\to 0}\frac{K}{\pi v}\,\frac{k^2}{k^2-\frac{\omega^2}{v^2}} = \frac{K}{\pi v} \quad \Leftarrow$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)\Big/\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_0 = \frac{v_F}{v}\cdot K \quad \Leftarrow$$

נבנה כעת לחשב פונקצית הקורלציה של המערכת החד-מימדית בנוכחות אינטראקציה. כפי שנראה, בניגוד לתוצאות התרמודינמיות, פונקצית הקורלציה משתנה באופן דרמטי יחסית למערכת החופשית. פתחנו את הקורס בכך ששמנו לב כי במימד אחד, כתוצאה מ nesting, רכיב ה $2k_F$ של ה density-density corr. fun. במערכת החופשית מתבדר לוגריתמית. כתוצאה מכך תוצאות ה RPA למערכת בנוכחות אינטראקציה אינה מתאימה, כמובן מכיון שהיא מובילה למעבר פאזה שאינו יכול להתרחש במימד אחד. נראה כעת כיצד טכניקת הבוזוניזציה אשר פותחה בשיעורים האחרונים מספקת לנו תשובה לגבי פונקצית קורלציה זו במדויק.

ראינו כי
$$\rho(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_x\phi(x,t) + \frac{1}{2\pi\alpha}\left[e^{2ik_Fx}e^{-2i\sqrt{\pi}\phi(x,t)} + h.c\right]$$

נחשב את פונקצית הקורלציה בזמן מדומה:
$$\langle T_\tau\rho(x,\tau)\rho(0,0)\rangle = \frac{1}{\pi}\langle T_\tau\,\partial_x\phi(x,\tau)\,\partial_x\phi(0,0)\rangle$$
$$+\frac{1}{(2\pi\alpha)^2}\left[e^{2ik_Fx}\left\langle T_\tau e^{-2i\sqrt{\pi}[\phi(x,\tau)-\phi(0,0)]}\right\rangle + h.c\right]$$

מכיון שהמודל שלנו סימטרי תחת שיקוף ואינווריאנטי להזזות
$$\langle\phi(x)e^{-i\phi(x')}\rangle = \langle\phi(x')e^{-i\phi(x)}\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\partial_x\phi(x)e^{-i\phi(x')}\rangle = \partial_x\langle\phi(x')e^{-i\phi(x)}\rangle = -\partial_{x'}\langle\phi(x')e^{-i\phi(x)}\rangle$$

ולכן מתאפס האיבר המעורב מתאפס:
$$\langle\partial_x\phi(x)e^{-i\phi(x)} + \partial_x\phi(x')e^{-i\phi(x)}\rangle = 0$$

מכיון שהבעיה בלשון הבוזונים נראית ריבועית גם בנוכחות אינטראקציה חישוב ממוצע מהצורה המופיעה בביטוי ל $\langle\rho\rho\rangle$ הינו עניין פשוט.

$$S = \frac{\beta L}{2} \sum_{k,\omega_n} \left(\theta^*(k,i\omega_n), \phi^*(k,i\omega_n)\right) M^{-1} \begin{pmatrix} \theta(k,i\omega_n) \\ \phi(k,i\omega_n) \end{pmatrix}$$ במרחב פורייה ובניסוח מרוכב

כאשר $\phi^*(k,i\omega_n) = \phi(-k,-i\omega_n)$ וכנ"ל לגבי θ ובהתאמה

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} vKk^2 & ik\omega_n \\ ik\omega_n & \frac{v}{K}k^2 \end{pmatrix}$$

מכיון שעבור משתנים גאוסיים

$$\langle u_i^* u_j \rangle = \frac{\prod_i \int \frac{du_i^* du_i}{2\pi i} u_i^* u_j \, e^{-\sum_{ij} u_i^* A_{ij} u_j}}{\prod_i \int \frac{du_i^* du_i}{2\pi i} e^{-\sum_{ij} u_i^* A_{ij} u_j}} = (A^{-1})_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \langle \theta^*(k,i\omega_n)\,\theta(k,i\omega_n)\rangle & \langle \theta^*(k,i\omega_n)\,\phi(k,i\omega_n)\rangle \\ \langle \phi^*(k,i\omega_n)\,\theta(k,i\omega_n)\rangle & \langle \phi^*(k,i\omega_n)\,\phi(k,i\omega_n)\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta L}\frac{1}{k^2(v^2k^2+\omega_n^2)} \begin{pmatrix} \frac{v}{K}k^2 & -ik\omega_n \\ -ik\omega_n & vKk^2 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי תרומת הסכום של k,ω_n אדיבה עם k,ω_n ! $-k,-\omega_n$ נותנת את אותו. זהו המקור לפקטור 2 בתשובה למשוואות עבור לביטוי המופיע בסופה.

$$\langle T\phi(x,\tau)\,\phi(0,0)\rangle = \sum_{\substack{k\omega \\ k'\omega'}} e^{i(kx-\omega\tau)} \langle \phi(k,\omega)\,\phi(k'\omega')\rangle$$ $\Leftarrow$

$$= \frac{vK}{\beta L} \sum_{k\omega_n} \frac{e^{i(kx-\omega_n\tau)}}{v^2k^2+\omega_n^2}$$

$$\rightarrow \frac{vK}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk\,d\omega \, \frac{e^{i(kx-\omega\tau)}}{v^2k^2+\omega^2}$$ מעבר לגבול הרצף: $T\to 0$, $\beta\to\infty$, $L\to\infty$

$$= \frac{K}{4\pi} \int_0^{\infty} dk \, \frac{e^{ik(x+iv|\tau|)}}{k} + hc$$

כדי לטפל בהתבדרות הלוגריתמית ב סכום נזכור כי עבור L סופי k המינימלי הוא $\frac{2\pi}{L}$. כמו כן נגביל פקטור המקטין ומבטיח ב k גבוהים $e^{-\alpha k}$ במקרה ש $|\tau|=0$.

$$= \frac{K}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\infty} dk\, \frac{e^{ik(x+i(v|\tau|+\alpha))}}{k} + h.c$$

$$= \frac{K}{4\pi}\left[\underbrace{\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\infty} dk\, \frac{e^{-\alpha k}}{k}}_{\xrightarrow{\alpha\to 0}\ \Gamma\left(\frac{2\pi\alpha}{L}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[i(x+iv|\tau|)\right]^n}{n!}\int_0^{\infty} dk\, k^{n-1} e^{-\alpha k}\right] + h.c$$

בחלק זה אין צורך יותר ברגולריזציה ב-k קטנים

$$= \frac{K}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{L}{2\pi\alpha}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{i(x+iv|\tau|)}{\alpha}\right]^n\right] + h.c$$

$$= \frac{K}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{L}{2\pi\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{i(x+iv|\tau|)}{\alpha}\right)\right] + h.c$$

$$= \frac{K}{4\pi}\ln\left[-\frac{2\pi i}{L}\left(x+i(v|\tau|+\alpha)\right)\right] + h.c$$

$$\left\langle T_\tau\left[\phi(x,\tau)-\phi(0,0)\right]^2\right\rangle = \frac{K}{2\pi}\ln\left(\frac{x^2+(v|\tau|+\alpha)^2}{\alpha^2}\right) \equiv K F_1(x,\tau) \quad \Leftarrow$$

$$\left\langle T_\tau\left[\theta(x,\tau)-\theta(0,0)\right]^2\right\rangle = \frac{1}{K}F_1(x,\tau)$$

באופן דומה מקבל

בגבול $L,\beta\to\infty$

$$\langle T_\tau\phi(x,\tau)\,\theta(0,0)\rangle = \frac{-i}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,d\omega\, \frac{\omega}{k}\,\frac{e^{i(kx-\omega\tau)}}{v^2k^2+\omega^2}$$

$$= -\frac{s}{4\pi}\int_{\frac{2\pi}{L}}^{\infty} dk\,\frac{e^{ik(x+i(v|\tau|+\alpha))}}{k} - h.c \qquad s = \text{sign}(\tau)$$

$$= \frac{-is}{2\pi}\arctan\left(\frac{x}{v|\tau|+\alpha}\right)$$

אנו מעוניינים בפונקציות קורלציה פרמיוניות

כדי שנוכל בהמשך גם יש להוסיף לפונקציה זו $\frac{1}{2}\theta(-\tau)\,\text{sign}(x)$, כדי לקבל פונקציות קורלציה המתאימות ל fermionic time ordering ולא ב bosonic time ordering הנ"ל. במקרה זה

$$\langle T_\tau\,\phi(x,\tau)\,\theta(0,0)\rangle = \frac{-i}{2\pi}\,\text{Arg}\left(v\tau+s\alpha+ix\right) \equiv F_2(x,\tau)$$

עבור המילטוניאן ריבועי מתקיים

$$\left\langle e^{\sum_j [a_j\phi(r_j) + b_j\theta(r_j)]}\right\rangle = e^{\frac{1}{2}\left\langle\left[\sum_j a_j\phi(r_j) + b_j\theta(r_j)\right]^2\right\rangle}$$

כפי שניתן להוכיח בקלות בעזרת path integrals. נקבל לכן

$$\langle T_\tau \rho(x,\tau)\rho(0,0)\rangle = \frac{K}{2\pi^2}\frac{(v|\tau|+\alpha)^2 - x^2}{\left[x^2+(v|\tau|+\alpha)^2\right]^2} + \left[\frac{e^{2ik_Fx}}{(2\pi\alpha)^2} e^{-2\pi F_1(x,\tau)} + h.c.\right]$$

$$= \frac{K}{2\pi^2}\frac{(v|\tau|+\alpha)^2 - x^2}{\left[x^2+(v|\tau|+\alpha)^2\right]^2} + \frac{2}{(2\pi\alpha)^2}\cos 2k_Fx\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+(v|\tau|+\alpha)^2}}\right)^{2K}$$

נשים לב כי הרכיב $q\sim 0$ של פונקציית קורלציה זו דועך כמו $\frac{1}{x^2}$ – כמו עבור פרמיונים חופשיים.
האינטראקציות רק נירמלו את המקדם. – לעומת זאת הדעיכה של חלק זה נותן את הקומפרסיביליות כפי שראינו.
החלק המעניין יותר הינו זה המשנה את הקורלציה ב $2k_F$. דעיכת חלק זה ממשיך לדעוך כ $\frac{1}{x^2}$.
במקרה ללא אינטראקציות. נקבל כי הדעיכה מתוארת על ידי חוק חזקה עם אקספוננט התלוי בחוזק
האינטראקציה. חוק חזקה זה נובע מעיקרון ההתפלגויות הלוגריתמיות המיוחדות בתורת ההפרעות
ושאינן ברגע בגבול. התחרות בין ההתפלגויות בערוץ ה particle-hole ובערוץ ה particle-particle
מונעות מפונקציות קורלציה זו לקבל סינגולריות שיכולה לאסור. כאשר למצב בעל long-range order
האופייני המוכר. במקום זאת שני חוקי הדעיכות מתחרים זה בזה ומצביעות למצב קריטי בעל
פונקציות קורלציה המתנהגות על ידי חוקי חזקה בטמפרטורה $T=0$ quantum-critical behavior.
ההתנהגות הזו הניתנת לשבירת ה scale invariance המאפיין את המצב הקריטי של המערכת
ב $T=0$ הינו הטמפרטורה.

על ידי חישוב של התלות ב T סופית ניתן להראות לדוגמה ש

$$\langle T_\tau[\phi(x,\tau)-\phi(0,0)]^2\rangle = K F_1(x,\tau) = \frac{K}{2\pi}\ln\left(\frac{\beta^2v^2}{\pi^2\alpha^2}\left[\sinh^2\left(\frac{\pi x}{\beta v}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi\tau}{\beta}\right)\right]\right)$$

לא רק עבור $\tau, \frac{x}{v} \ll \beta = \frac{1}{T}$ פונקציות הקורלציה מתנהגות בקירוב על ידי חוק החזקה המתאר אותה
ב $T=0$. הקורלציות דועכות אקספוננציאלית מעל לסקלה הנקבעת ע"י β.

פונקציות קורלציה נוספות ניתנות לחישוב באופן דומה.

נתבונן כעת בפונקצית הקורלציה של ה pairing operator

$$O_p(x,\tau) = \Psi_R^\dagger(x,\tau)\,\Psi_L^\dagger(x,\tau)$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha} F_R^{+} F_L^{+}\, e^{-2i\sqrt{\pi}\,\theta(x,\tau)}$$

$$\langle T_\tau O_p(x,\tau) O^\dagger(0,0)\rangle = \frac{1}{(2\pi\alpha)^2}\, e^{-\frac{2\pi}{K}F_1(x,\tau)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\alpha)^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+(v|\tau|+\alpha)^2}}\right)^{2/K}$$

קיבלנו שכן כי גם קורלצית ה pairing המתארת את נטיית של המערכת להתקרב לגל-מוליך דועכת לאט כחוק חזקה הגלוי באינטראקציה. נשים לב שהיא ככל שמעבר הקורלציה איטית יותר: K גדול יותר המתאים למקרה של אינטראקציה מושכת חזקה יותר ויותר.

עבור פונקצית הקורלציה $R(x,\tau)$ של כמעט סדר מסוים במרחב האמיתי נוכל להגדיר את הסוספטביליות המתאימה

$$\chi(k,\omega_n) = \int_0^\beta d\tau \int_0^L dx\, R(x,\tau)\, e^{-i(kx-\omega_n\tau)}$$

ההמשכה האנליטית $i\omega_n \to \omega+i\delta$ תתן לנו, כפי שאנו יודעים, את הסוספטביליות הדינמית של המערכת

אם R דועכת כ $\frac{1}{r^\nu}$ כאשר $r=\sqrt{x^2+(v\tau)^2}$ נוכל לגזור $\beta, L \to \infty$

$$\chi(k,\omega_n) \propto \int_0^\infty d\tau\, dx\, \frac{1}{(x^2+(v\tau)^2)^{\frac{\nu}{2}}}\, e^{-i(kx-\omega_n\tau)}$$

$$= \frac{1}{v}\int_0^\infty dx\, dy\, \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{\nu}{2}}}\, e^{-i\left(kx-\frac{\omega y}{v}\right)} \qquad y = v\tau$$

$$= \frac{1}{v}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty dr\, r^{1-\nu}\, e^{-ir\left(k\cos\theta-\frac{\omega}{v}\sin\theta\right)} \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

האינטגרל הנותר תלוי רק ע"י הפונקציה המוגדרת יחד עם הנקודה r ע"י $\max\left(k,\frac{\omega}{v}\right)$ (נגדיר). נוכל לבצע את האינטגרל כולו ע"י scaling analysis שנגדיר $z = r\cdot\max\left(k,\frac{\omega}{v}\right)$ ונניח $k > \frac{\omega}{v}$

$$= \frac{1}{v}\cdot k^{\nu-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty dz\, z^{1-\nu}\, e^{-iz\left(\cos\theta-\frac{\omega}{vk}\sin\theta\right)} \propto k^{\nu-2}$$

הסוספטביליות סופר-מוליכה כי R נקודת אינטגרציה ב R~β ולכן כהתאם גדולה יותר

$$\chi(k,\omega,T) \sim \left[\max(k,\omega,T)\right]^{\nu-2}$$

זה מתבדר אם $\nu<2$

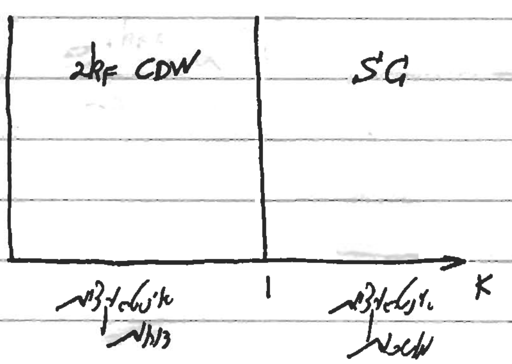
כלומר בטמפ' נמוכה הסוספטביליות יכולה להתבדר! למרות שהתבדרות זו אינה אומרת סדר במימד אחד, משמעותה כי הקורלציות בזמן הן ארוכות במערכת חד-מימדית, כך שמקבלת מערכת תלת מימדית למעשה, המערכת תציג את המצב המסודר המתאים לסוספטביליות המתבדרת. במימד אחד הפלוקטואציות העזות מונעות סדר זה מלהתקיים. תוך הצימוד בין השרשראות יקבע את סקלת האנרגיה בה יתקבל הסדר: T_c נקבע ע"י הצימוד המנצח את הפלוקטואציות הללו לדוגמא צימוד Josephson בין שרשראות שגורם לנעילה הדל-מופזה θ להיות קוהרנטית שלמה. T_c הוא phase ordering transition: עבור N dimensional crossover.

מתוך תיאור בוזוני הקורלציה לגבי $2k_F$ של הצפיפות ול pairing אנו רואים כי המערכת החד-מימדית נוטה לכוון $2k_F$ charge density order אם

$2K<2 \rightarrow K<1$

$\frac{2}{K}<2 \rightarrow K>1$ ונוטה לכוון pairing אם מושכת אם

נעיר לגבי לכן "דיאגרמת פאזה" למערכת חד מימדית: ללא ספק. שימו לב שכן כי במימד אחד לא ניתן לקבל שבירה ספונטנית של סימטריה וסדר אמיתי. דיאגרמה זו מציגה את הסדר בו תבחר מערכת המורכבת ממאוסף של מערכות חד מימדיות המצומדות בצימוד חלש. טמפרטורת המעבר למצב המסודר נקבעת על ידי חוזק הצימוד בין השרשראות



נחזור לחשב פונקצית Green החד-חלקיקית, למשל עבור right movers

fermionic time ordering

$$\mathcal{G}(x,\tau) = -\langle T_\tau \Psi_R(x,\tau)\Psi_R^+(0,0)\rangle = -\theta(\tau)\langle \Psi_R(x,\tau)\Psi_R^+(0,0)\rangle + \theta(-\tau)\langle \Psi_R^+(0,0)\Psi_R(x,\tau)\rangle$$

פונקצית הקורלציה במונחים בוזוניים:

$$-\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi\alpha}\langle T_\tau e^{-i\sqrt{\pi}[\phi(x,\tau)-\theta(x,\tau)]} e^{i\sqrt{\pi}[\phi(0,0)-\theta(0,0)]}\rangle$$

bosonic time ordering

$$= -\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}\langle[\phi(x,\tau)-\phi(0,0)]^2\rangle} e^{-\frac{\pi}{2}\langle[\theta(x,\tau)-\theta(0,0)]^2\rangle} e^{-\pi\langle[\phi(x,\tau)-\phi(0,0)][\theta(0,0)-\theta(x,\tau)]\rangle}$$

$$= -\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}(K+K^{-1})F_1(x,\tau) - 2\pi[F_2(x,\tau)-F(0,0)]}$$

כשמשתמשים בנוסחה e נשים לב כי $\langle\phi(x,\tau)\theta(0,0)\rangle = \langle\theta(x,\tau)\phi(0,0)\rangle$ כן סימן - בגלל השני
כדי לתקן זאת עלינו להכפיל את הפונקציה הבוזונית ב $e^{\pm i\pi\theta(-\tau)}$. בחירה אפשרית היא הכפלה
ב $e^{i\pi\theta(-\tau)\mathrm{sign}(x)}$ הקלאסיות להרצה

$$F_2 = \frac{-i}{2\pi} Arg(v\tau + s\alpha + ix)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\ln(v\tau+s\alpha+ix) - \ln(v\tau+s\alpha-ix)\right]$$

$$= -\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}(K+K^{-1})\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{x^2+(v|\tau|+\alpha)^2}{\alpha^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln(v\tau+s\alpha+ix) - \ln(v\tau+s\alpha-ix)\right]}$$

$$= -\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi}\alpha^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}\frac{1}{(v\tau+s\alpha+ix)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}}\frac{1}{(v\tau+s\alpha-ix)^{\frac{K+K^{-1}}{4}+\frac{1}{2}}}$$

$$= -i\frac{e^{ik_Fx}}{2\pi}\frac{1}{x+i(v_F\tau+s\alpha)}$$ עבור $K=1$ $(v=v_F)$

קיבלנו הצגה לפי המקבל מושג ישר עבור פרמיונים ללא אינטראקציה.

אנו רואים כי בנוכחות אינטראקציה פונקצית גרין החד חלקיקית גם היא מתפזרת ע״י חוק חזקה לא אוניברסלי עם מעריך הגדול ממש מ 1 (כי $K+K^{-1}>2$). ⇐ הפונקציה דועכת מהר יותר מהמקרה החופשי ⇐ האלקטרון מתרחק לערבוב ופקלקטים של המצבים עם האינטראקציה.

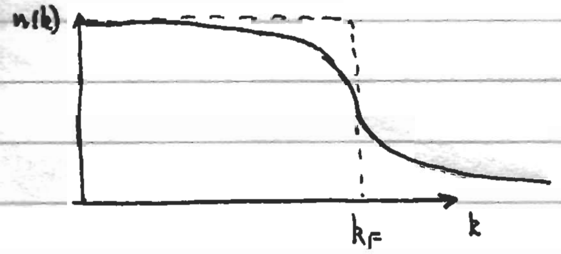
נחשב קודם התפלגות $n(k)$:

$$n(k)=\int dx\, e^{-ikx}\, G(x,\tau=-\delta)$$

$$=-\frac{\alpha^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}}{2\pi}\int dx\, e^{i(k_F-k)x}\left(\frac{1}{ix-\alpha}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{-ix-\alpha}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}+\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\alpha^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}}{2\pi}\cdot(k_F-k)^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}\int dy\, e^{iy}\left(\frac{1}{iy-\sigma\alpha}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{-iy-\sigma\alpha}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}+\frac{1}{2}}\qquad y=(k_F-k)x,\quad \sigma=\mathrm{sign}(k_F-k)$$

$$\propto |k_F-k|^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}$$



במקום קפיצה ב k_F יש עכשיו רק essential power-law singularity. ה q.p-weight:
$Z=0$ כי שכבר מקום מיוצר ההופעות הכבועות. שימו לב כי מקום הסינגולריות (שהיא כינה)
רק הנגזרת של $n(k)$) נשאר ב k_F. זוהי תוצאה של ה Luttinger theorem

באופן כללי יותר נחשב ב retarded Green function עבור right movers מתוך המשך
אנליטי של הפונקציה הזמנית של $G(x,\tau)$

$$\int_0^\infty dx\,d\tau\, e^{-i(kx-\omega\tau)}\, G(x,\tau)$$

$$=\frac{-\alpha^{\frac{K+K^{-1}}{2}-1}}{2\pi}\int_0^\infty dx\int_0^{i\infty} dt\, e^{-i(\Delta k x-i\omega t)}\frac{1}{[i(x+vt)]^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}}\frac{1}{[-i(x-vt)]^{\frac{K+K^{-1}}{4}+\frac{1}{2}}}$$

$$t=-i\tau,\quad \Delta k=k-k_F$$
$$y=x+vt\qquad x=\frac{y+z}{2}$$
$$z=x-vt\qquad t=\frac{y-z}{2v}$$

$$\propto \int_C dy\,dz\,\frac{e^{-i\left(\frac{\Delta k}{2}-\frac{i\omega}{2v}\right)y}}{(iy)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}}\;\frac{e^{-i\left(\frac{\Delta k}{2}+\frac{i\omega}{2v}\right)z}}{(-iz)^{\frac{K+K^{-1}}{4}+\frac{1}{2}}}$$

תחום האינטגרציה מעבר המשתנים לאורך (x, it)

$$\propto\left(\Delta k-\frac{i\omega}{v}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{3}{2}}\left(\Delta k+\frac{i\omega}{v}\right)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}\xrightarrow{i\omega\to\omega+i\delta}(v\Delta k-\omega-i\delta)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{3}{2}}(v\Delta k+\omega+i\delta)^{\frac{K+K^{-1}}{4}-\frac{1}{2}}$$

אנו רואים כי במערכות אינטגרביליות הקטב המתאר את התנהגות של חלקיקים במערכת
הרב-גופית הופך ל branch cut: אינדיקציה נוספת לכך שבמערכות אינטגרביליות אין
במערכת הרב-גופית עירורים שמתנהגים כמו quasi-particles.