ביבליוגרפיה רלבנטית:

Mahan - Many-Particle Physics

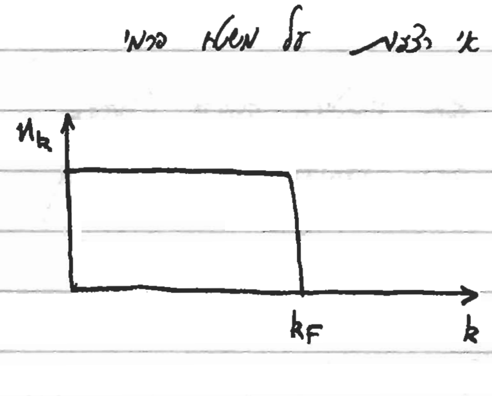
R. Shankar - Renormalization-group approach to interacting fermions
Reviews of Modern Physics 66 129 (1994)

T. Giamarchi - Quantum Physics in One Dimension

לאורך מרבית של הקורס נעסוק בתכונותיהן של מערכות אלקטרוניות חד-מימדיות או קוואזי-חד-מימדיות. בעוד שרבות מתכונות מערכות אלה, בהעדר אינטראקציה בין החלקיקים, אינן שונות מאלו של מערכות רגילות במימדים גבוהים יותר, אנו נגלה כי לאינטראקציה השלכות מרחיקות לכת על תכונותיהם של אלקטרונים במימד אחד.

כדי להעריך את האופי הבסיסי החד מימדי עלינו להשוות עם ה"מודל הסטנדרטי" של מערכת אלקטרונים עם אינטראקציה במימדים גבוהים יותר: ה- Fermi Liquid - נוזל פרמי.

נערוך סקירה קצרה של תכונותיו של נוזל פרמי והסיבות להן. כדי להבין ולהסביר שפה משותפת נתחיל בגז האלקטרונים החופשי. במערכת זו המצבים רב חלקיקיים המתקבלים מאכלוס N - מספר האלקטרונים בגז, מצבים חד חלקיקיים שלכל אחד מהם אנרגיה $\epsilon(k) = \frac{k^2}{2m}$ כאשר $k=|\vec{k}|$ הינו התנע של המצב. עקרון האיסור של פאולי מאפשר לנו לאכלס בכל רמה כזו לכל היותר שני אלקטרונים בעלי ספינים הפוכים. האנרגיה של המצב הרב חלקיקי היא סכום האנרגיות החד חלקיקיות המאוכלסות.
ב $T=0$ כל N הרמות הנמוכות מאוכלסות עד לרמת פרמי - במצב היסוד של הגז. לכן לאכלוס n_k של המצבים החד חלקיקיים עם תנע k אי רציפות על משטח פרמי



עבור אלקטרונים חסרי ספין (נדון בהם לעת עתה) אי הרציפות הינה בגודל 1

ממצב היסוד של המערכת ניתן לעבור למצבים מעוררים באחת משתי הדרכים הבאות:

א. ע"י הוספת חלקיק מעל E_F או הפחתת חלקיק מתחת ל E_F. במצב המעורר מספר החלקיקים השונה ב ± 1 ממצב היסוד המקורי והוא בעל אנרגיה שונה (ביחס למצב היסוד) הנתונה ע"י האנרגיה התנועה של מצב החלקיק שהוספנו או החסרנו. - תהליכים מסוג זה רלוונטיים ל tunneling של חלקיקים אל ומחוץ למערכת.

ב. ע"י יצירת זוג אלקטרון-חור באמצעות העלאת אלקטרון ממצב מאוכלס מתחת ל E_F למצב ריק מעל E_F. למצב המעורר המתקבל אנרגיה השווה להפרש בין האנרגיות הקינטיות של האלקטרון והחור וכ"ל לפי התנע שלו.

בשני המקרים למצבים המתקבלים זמן חיים אין-סופי מכיוון שהם מצבים עצמיים של המערכת.

נעבור כעת להצגת הכלים באמצעותם ניתן להציג באופן פורמלי את התכונות הנ"ל:

בכדי לחשב גדלים פיזיקליים בצורה שונה נציג את הצגת היזנברג של אופרטור A:

$$A(t) = e^{iKt} A e^{-iKt}$$

כאשר $K = H - \mu N$ המילטוניאן

$N = \sum_k c_k^{+} c_k$ האופרטור הסופר את מס' החלקיקים

תוצאות של מדידות פיזיקליות נתונות ע"י גדלים הקרויים retarded correlation functions:

$$G^{AB}_{ret}(t-t') = -i\,\theta(t-t')\left\langle [A(t), B(t')]_{\mp} \right\rangle$$

כאשר $[A,B]_{\mp} = AB \mp BA$ ונבחר ב - עבור A,B אופרטורים בוזוניים (מורכבים ממספר זוגי של אופרטורי יצירה או חיסול פרמיוניים) וב + עבור A,B אופרטורים פרמיוניים (מורכבים ממספר אי זוגי של אופרטורי יצירה וחיסול פרמיוניים).

כמו כן הגדרנו את הממוצע התרמי של אופרטור באופן הבא:

$$\langle A\rangle = \frac{Tr\{e^{-\beta K}A\}}{Tr\{e^{-\beta K}\}} = e^{\beta\Omega}\, Tr\{e^{-\beta K}A\} \qquad \beta = \frac{1}{T}.$$

מסתבר כי קיים קשר פשוט בין ה r.c.f ל Matsubara correlation functions

המוגדרות באופן הבא:

כעת נגדיר את ההתפתחות בזמן מדומה של אופרטור:

$$A(\tau) = e^{\tau K} A e^{-\tau K} \qquad \tau \in [0,\beta] \qquad (\tau = it)$$

נגדיר את ה (imaginary) time ordering operator T_τ:

$$T_\tau\left[A(\tau)B(\tau')\right] = \theta(\tau-\tau')\,A(\tau)B(\tau') \underset{\text{fermionic operators}}{\overset{\text{bosonic operators}}{\pm}} \theta(\tau'-\tau)\,B(\tau')A(\tau)$$

ואת ה (imaginary) time ordered correlation function

$$\mathcal{G}_{AB}(\tau-\tau') = -\langle T_\tau A(\tau) B(\tau')\rangle$$

<u>תרגיל בית</u>: א. הראו כי $\mathcal{G}_{AB}$ הוא אמנם פונקציה של $\tau-\tau'$

ב. הראו כי עבור אופרטורים בוזוניים

$$\mathcal{G}_{AB}(\tau) = \mathcal{G}(\tau-\beta) \qquad 0<\tau<\beta,\quad -\beta<\tau-\beta<0$$

ועבור אופרטורים פרמיוניים

$$\mathcal{G}_{AB}(\tau) = -\mathcal{G}(\tau-\beta)$$

ולכן מיוצגת באופן טבעי ע"י טורי פורייה:

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n \mathcal{G}(i\omega_n)\,e^{-i\omega_n\tau}$$

$$\mathcal{G}(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau\,\mathcal{G}(\tau)\,e^{i\omega_n\tau}$$

כאשר ה Matsubara frequencies הינן:

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta} \qquad \text{אופרטורים בוזוניים:}$$

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \qquad \text{אופרטורים פרמיוניים:}$$

נבדוק כעת את הקשר בין r.c.f ל M.c.f:

נבחן את טרנספורם פורייה בזמן של r.c.f :

$$G_{ret}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} G_{ret}(t)$$

$$= -i e^{\beta\Omega} \int_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, \mathrm{Tr}\left\{ e^{-\beta K} [A(t)B(0) + B(0)A(t)] \right\}$$ עבור אופרטורים פרמיונים

$$= -i e^{\beta\Omega} \int_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \sum_{n,m} \left[\langle n| e^{-\beta K} A(t) |m\rangle \langle m| B |n\rangle + \langle n| e^{-\beta K} B |m\rangle \langle m| A(t) |n\rangle \right]$$

$K|n\rangle = E_n |n\rangle$ כאשר השתמשנו בסט שלם של מצבים עצמיים של המילטוניאן K

$$= -i e^{\beta\Omega} \int_0^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \sum_{n,m} e^{i(E_n - E_m)t} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle \left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m} \right)$$

כשהשתמשנו בשלמות הבסיס של האופרטורים והחלפנו שמות הסכומים $n \leftrightarrow m$. כדי שהאינטגרל יתכנס נוסיף לω חלק דמיוני קטן $\omega + i\delta$ $(\delta > 0)$ ונקבל לבסוף

$$= e^{\beta\Omega} \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle \left(e^{-\beta E_n} + e^{-\beta E_m} \right) \frac{1}{\omega + E_n - E_m + i\delta}$$

נבחן כעת את

$$\mathcal{G}(i\omega) = \int_0^{\beta} d\tau\, G(\tau) e^{i\omega\tau}$$

עבור $0 < \tau$:

$$= -e^{\beta\Omega} \int_0^{\beta} d\tau\, e^{i\omega\tau}\, \mathrm{Tr}\left\{ e^{-\beta K} A(\tau) B(0) \right\}$$

$$= -e^{\beta\Omega} \int_0^{\beta} d\tau\, e^{i\omega\tau} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{(E_n - E_m)\tau} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle$$

$$= e^{\beta\Omega} \sum_{n,m} \langle n|A|m\rangle \langle m|B|n\rangle \left(e^{-\beta E_m} + e^{-\beta E_n} \right) \frac{1}{i\omega + E_n - E_m}$$ מכיון ש $\omega = (2n+1)\frac{\pi}{\beta}$

נוכל לכן לקבל את $G_{ret}(\omega)$ מתוך $\mathcal{G}(i\omega)$, שעבורה כל קו ישר מחושב ע"י ההמשכה האנליטית

$$G_{ret}(\omega) = \mathcal{G}(i\omega)\Big|_{i\omega \to \omega + i\delta}$$

<u>תרגיל בית:</u> הראו כי כל זה נכון גם עבור פונקצית קורלציה בוזונית.

נחזור כעת לפונקציית Green של חלקיק retarded עם $A(t)=c_k(t),\ B=c_k^\dagger$

$$G_{ret}(k,\omega) = e^{\beta\Omega}\sum_{n,m}|\langle n|c_k|m\rangle|^2\frac{e^{-\beta E_n}+e^{-\beta E_m}}{\omega+E_n-E_m+i\delta}$$

ונגדיר את הפונקציה הספקטרלית spectral function :

$$A(k,\omega) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,G_{ret}(k,\omega) = e^{\beta\Omega}\sum_{n,m}|\langle n|c_k|m\rangle|^2\left(e^{-\beta E_n}+e^{-\beta E_m}\right)\delta(\omega+E_n-E_m)$$

כשהשתמשנו ב $\dfrac{1}{x\pm i\delta} = P\left(\dfrac{1}{x}\right) \mp i\pi\,\delta(x)$

קל לראות כי $\underbrace{A(k,\omega)\geqslant 0}_{\text{רק עבור פרמיונים}}$ ואני משאיר לכם כתרגיל בית להראות כי $\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\,A(k,\omega)=1$

ניתן לכן לפרש את $A(k,\omega)$ כפונקציית התפלגות הסתברות. היא נותנת את ההסתברות
לכך שבמערכת קיים מצב מעורר בעל תנע k ואנרגיה ω, והחלקיק אשר נוסף ע"י הפעלת האופרטור: n ו-m
$A(k,\omega)$ מכילה אינפורמציה על הפרש האנרגיה בין כל שני מצבים מעוררים עם n ו-m חלקיקים ולכן גם עבור כאלו

נחשב כעת את $G_{ret}(k,\omega)$ מתוך $\mathcal{G}(k,i\omega)$ עבור גז האלקטרונים החופשי:

$$H = \sum_k \epsilon(k)\, c_k^\dagger c_k \qquad \epsilon(k)=\frac{k^2}{2m}$$

$$K = H-\mu N = \sum_k \xi(k)\, c_k^\dagger c_k \qquad \xi(k)=\epsilon(k)-\mu$$

ההתפתחות בזמן של האופרטורים נתונה ע"י

$$c_k(\tau) = e^{\tau K}c_k e^{-\tau K} = e^{-\tau\xi(k)}c_k$$

$$c_k^\dagger(\tau) = e^{\tau\xi(k)}c_k^\dagger$$

כפי שניתן לקבל בקלות משימוש בנוסחת Baher Hausdorff

$$e^{A}Be^{-A} = B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\cdots$$

ולכן $\mathcal{G}(k,\tau) = -\theta(\tau)e^{-\tau\xi(k)}\langle c_k c_k^+\rangle + \theta(-\tau)e^{-\tau\xi(k)}\langle c_k^+ c_k\rangle$

$$= -e^{-\tau\xi(k)}\left[\theta(\tau)\left(1-f_F(\xi_k)\right) + \theta(-\tau) f_F(\xi_k)\right]$$

כאשר השתמשנו בתוצאה הידועה מפיסיקה סטטיסטית $f_F(\xi) = \langle c_k^+ c_k\rangle = \frac{1}{e^{\beta\xi_k}+1}$

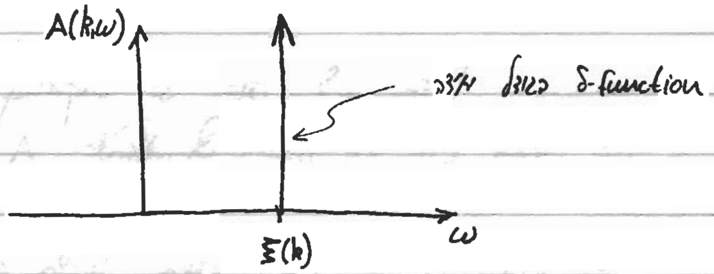
נקבל $\mathcal{G}(k,i\omega) = -\left[1-f_F(\xi_k)\right]\int_0^\beta d\tau\, e^{i\omega\tau}e^{-\tau\xi_k}$

משתמשים בכך ש $\omega\beta = (2n+1)\pi$! $1-f_F(\xi) = \frac{1}{e^{-\beta\xi}+1}$ נקבל לבסוף

$$\mathcal{G}(k,i\omega) = \frac{1}{i\omega-\xi(k)}$$

$$G_{ret}(k,\omega) = \frac{1}{\omega-\xi(k)+i\delta}$$

$$A(k,\omega) = \delta(\omega-\xi(k))$$



כפי שאנו מצפים מהתמונה הראשונה שלנו לגבי פרמי חופשי!

ננסה לקבל גם את n_k באופן הבא:

$$n_k = \langle c_k^+ c_k\rangle = \mathcal{G}(k,\tau=-\delta)$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_n \mathcal{G}(k,i\omega_n)e^{i\omega_n\delta}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_n \frac{e^{i\omega_n\delta}}{i\omega_n-\xi(k)}$$

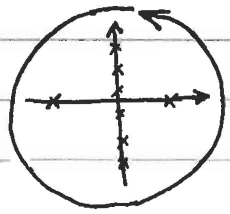
כיצד לחשב $\sum_{z=i\omega_n} f(z)$? נתבונן ב $\oint dz\, f(z)\frac{1}{e^{\beta z}+1}$

$\frac{1}{e^{\beta z}+1}$ אקספוננציאלית קטנה עבור $|z|\to\infty$ בחצי המישור המרכב הימני ($z\to\infty$) וגדלה כקבוע משמאל
ב $z = \frac{(2n+1)\pi i}{\beta}$ עם residue $-\frac{1}{\beta}$

אם $f(z)$ דועכת מספיק מהר בחצי המישור המרכב השמאלי ואינה מקלקלת את הדעיכה של $\frac{1}{e^{\beta z}+1}$
בחצי הימני נקבל

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint dz\, f(z) \frac{1}{e^{\beta z}+1} = 2\pi i \left[-\sum_{z=i\omega_n} \frac{1}{\beta} f(z) + \sum_{z=\text{poles of } f} \text{residue}(f) \cdot \frac{1}{e^{\beta z}+1} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{z=i\omega_n} f(z) = \beta \sum_{z=\text{poles of } f} \text{residue}(f) \frac{1}{e^{\beta z}+1}$$



ציור

$$f(z) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{z\delta}}{z-\xi(k)}$$

דועכת אקספוננציאלית עבור $z\to-\infty$, ואז עוקפת את הבעיה האקספוננציאלית של $\frac{1}{e^{\beta z}+1}$ ב $z\to\infty$

ונותר קוטב באלו ב $z=\xi(k)$ עם residue $\frac{1}{\beta}$

$$\Rightarrow n_k = \frac{1}{e^{\beta\xi(k)}+1} = f_F(\xi_k)$$

נרצה כעת לראות כיצד עונה גז האלקטרונים להפרעה $H = H_0 + \delta H$

נרצה לחשב כיצד ערך התצפית של אופרטור A משתנה כתוצאה מההפרעה $\overset{\text{קטנה}}{\delta H}$: Linear Response

ערך התצפית של A נתון בעזרת מטריצת הצפיפות ρ ע"י $\langle A\rangle = tr\{\rho A\}$

כאשר מטריצת הצפיפות מתפתחת בזמן כרגיל: $\frac{d\rho}{dt} = i[\rho, H]$

נניח כי ההפרעה δH קטנה ובעקבותיה ρ משתנה מעט במעבר מהמצב הלא מופרע ρ_0

כשנותר קטן $\delta\rho$ $\left(\rho_0 = e^{\beta\Omega} \sum_k e^{-\beta K} |k\rangle\langle k| \text{ למשל בגז האידיאלי}\right)$ $\rho = \rho_0 + \delta\rho$

$$\Leftarrow \quad \frac{d\rho_0}{dt} + \frac{d\,\delta\rho}{dt} = i\left[[\rho_0, H_0] + [\rho_0, \delta H] + [\delta\rho, H_0] + [\delta\rho, \delta H]\right]$$

בסדר ראשון בגדלים הקטנים נקבל לכן

$$\frac{d\,\delta\rho}{dt} + i[H_0, \delta\rho] = -i[\delta H, \rho_0]$$

נרשום את אגף שמאל בצורה

$$e^{-iH_0 t} \frac{d}{dt}\left(e^{iH_0 t} \delta\rho\, e^{-iH_0 t}\right) e^{iH_0 t} = -i[\delta H, \rho_0]$$

$$\Leftarrow \quad e^{iH_0 t} \delta\rho(t) e^{-iH_0 t} \Big|_{t=-\infty}^{t} = -i \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{iH_0 t'} [\delta H, \rho_0]\, e^{-iH_0 t'}$$

נניח $\delta\rho(t=-\infty)=0$ (כי $\delta H \xrightarrow{t\to-\infty} 0$) וכי ρ_0 אינו תלוי בזמן $[H_0, \rho_0] = 0$

$$\delta\rho(t) = -i\, e^{-iH_0 t} \int_{-\infty}^{t} dt' \left[\delta H(t'), \rho_0\right] e^{iH_0 t}$$ נקבל $\delta H(t') = e^{iH_0 t'}\, \delta H\, e^{-iH_0 t'}$

בתמונת האינטראקציה

$$\Leftarrow \quad \langle A \rangle_{H_0+\delta H} = tr\{\rho_0 A\} + tr\{\delta\rho A\}$$

$$= \langle A \rangle_{H_0} - i\, Tr\left\{ e^{-iH_0 t} \int_{-\infty}^{t} dt' \left[\delta H(t'), \rho_0\right] e^{iH_0 t} A \right\}$$

$$= \langle A \rangle_{H_0} - i\, Tr\left\{ \int_{-\infty}^{t} dt' \left[\delta H(t'), \rho_0\right] A(t) \right\}$$

$A(t)$: בתמונת האינטראקציה

$$Tr\{[\delta H(t'), \rho_0] A(t)\} = tr\{\delta H(t')\rho_0 A(t) - \rho_0\, \delta H(t') A(t)\}$$

$$= tr\{A(t)\delta H(t')\rho_0 - \delta H(t') A(t) \rho_0\} = \langle [A(t), \delta H(t')] \rangle_{H_0}$$

$$\Leftarrow \quad \langle A \rangle_{H_0+\delta H} = \langle A \rangle_{H_0} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \theta(t-t') \langle [A(t), \delta H(t')] \rangle$$

כך שאם $\delta H = \int dx\, h(x,t) B(x)$ כאשר $h(x,t)$ שדה חיצוני התלוי במקום ובזמן הצמוד לאופרטור B

אזי

$$\langle A(x,t) \rangle_{H_0+\delta H} = \langle A(x,t) \rangle_{H_0} + \int dx' dt'\, \chi(x-x', t-t')\, h(x', t')$$

כאשר הסוספטביליות χ נתונה ע"י

$$\chi(x-x', t-t') = G^{AB}_{ret}(x-x', t-t')$$

בהנחה כי A ו- B אופרטורים הרמיטיים.

במרחב פוריה

$$\langle A(k,\omega) \rangle_{H_0+\delta H} = \langle A(k,\omega) \rangle_{H_0} + \chi(k,\omega)\, h(k,\omega)$$

כאשר טרנספורם פוריה בזמן ומקום מוגדר כעת

$$f(k,\omega) = \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i(kx-\omega t)} f(x,t)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{V} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx-\omega t)} f(k,\omega)$$

נחזור לדוגמא הראשונה (במסגרת linear response) של הצמדת $\rho(x)$ לפוטנציאל חיצוני

$$\delta H = \int dx\, V(x,t)\,\rho(x)$$

הסוספטיביליות המוגדרת כתגובה לו נתונה ע"י ה- retarded density-density correlation function

$$\chi(q,\omega) = \int dx\,dt\, e^{-i(qx-\omega t)}\, G^{\rho\rho}_{ret}(x,t)$$

נחשב אותו עם הממוצע הזמני של
$$-\int dx \int_0^\beta d\tau\, e^{-i(qx-\omega\tau)} \langle T_\tau\, \rho(x,\tau)\,\rho(0,0)\rangle$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ikx} c_k$$

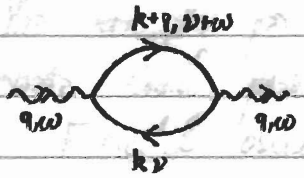
$$\Leftarrow\quad = -\frac{1}{V^2}\int dx \int_0^\beta d\tau\, e^{-i(qx-\omega\tau)} \sum_{\substack{k_1 k_2\\ k_3 k_4}} e^{-i(k_1-k_2)x} \langle T_\tau\, c^+_{k_1}(\tau)\, c_{k_2}(\tau)\, c^+_{k_3}(0)\, c_{k_4}(0)\rangle$$

נשתמש במשפט Wick

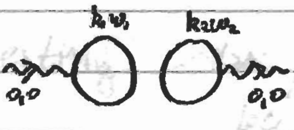
$$= -\frac{1}{V^2}\int dx \int_0^\beta d\tau\, e^{-i(qx-\omega\tau)} \sum_{\substack{k_1 k_2\\ k_3 k_4}} e^{-i(k_1-k_2)x} \Big[\langle T_\tau\, c^+_{k_1}(\tau) c_{k_2}(\tau)\rangle \langle T_\tau\, c^+_{k_3}(0) c_{k_4}(0)\rangle - \langle T_\tau\, c_{k_4}(0)\, c^+_{k_1}(\tau)\rangle \langle T_\tau\, c_{k_2}(\tau)\, c^+_{k_3}(0)\rangle \Big]$$

$$= \frac{-1}{V^2\beta^2} \int dx \int_0^\beta d\tau\, e^{-i(qx-\omega\tau)} \sum_{\substack{k_1 k_2\\ \omega_1 \omega_2}} \Big[\mathcal{G}(k_1 i\omega_1)\, \mathcal{G}(k_2 i\omega_2) - e^{i[(k_1-k_2)x-(\omega_1-\omega_2)\tau]}\, \mathcal{G}(k_1 i\omega_1)\, \mathcal{G}(k_2 i\omega_2) \Big]$$

$$= -\frac{1}{V\beta} \sum_{\substack{k_1 k_2\\ \omega_1 \omega_2}} \mathcal{G}(k_1 i\omega_1)\, \mathcal{G}(k_2 i\omega_2)\, \delta_{q,0}\,\delta_{\omega,0} + \frac{1}{V\beta} \sum_{k,\nu} \mathcal{G}(k, i\nu)\, \mathcal{G}(k+q, i\nu+i\omega)$$



בלשון דיאגרמות האיבר השני מיוצג על ידי
(שימו לב לסימן ה- שמופיע כתוצאה מהלולאה הפרמיונית)



האיבר הראשון הינו
(הוא) קיים רק עבור $q=\omega=0$ ומציג הסחה של הפוטנציאל הכימי
מהאלמנט ממוצע. הוא מתקבל כאשר אנו מודדים את השינוי ב $N=\int dx \rho(x)$
לשינוי בפוטנציאל הכימי שנובע מ $VN = \int (V\cdot\rho(x))dx$ מכיוון ש $[N,H_0]=0$ נקבל כי השינוי שמקבל נה ב N מאפס.
אנו מודדים בכל מקרה באנסמבל הגרנד קנוני כך שאין נקודה מעבר כזה $N=\langle N\rangle$.

$$\chi(q,\omega) = \frac{1}{\beta V}\sum_{k\nu} \frac{1}{i\nu - \xi(k)} \, \frac{1}{i(\nu+\omega) - \xi(k+q)}$$

$$= \frac{1}{\beta V}\sum_{k\nu} \frac{1}{\xi(k+q) - \xi(k) - i\omega}\left[\frac{1}{i(\nu+\omega) - \xi(k+q)} - \frac{1}{i\nu - \xi(k)}\right]$$

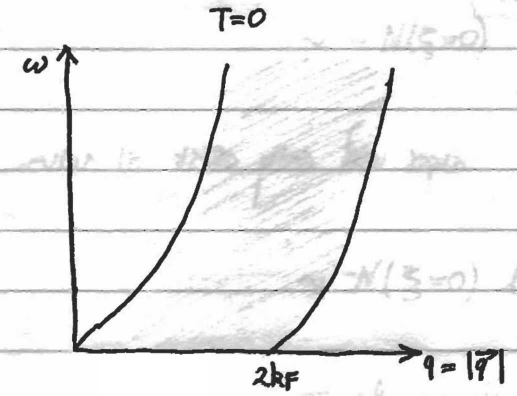
$$= \frac{1}{V}\sum_{k} \frac{f_F(\xi(k)) - f_F(\xi(k+q))}{\omega + \xi(k) - \xi(k+q) + i\delta}$$

תוצאת הסכום על תדירויות Matsubara אין
לאחר ההמשכה האנליטית $i\omega \to \omega + i\delta$

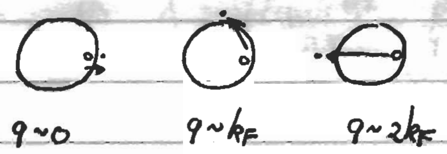
ניתן לראות כי

$$\mathrm{Im}\,\chi(q,\omega) = -\frac{\pi}{V}\sum_{k}\left[f_F(\xi(k)) - f_F(\xi(k+q))\right]\delta\left(\omega + \xi(k) - \xi(k+q)\right)$$

נקבעת על ידי העירורים מסוג חלקיק-חור עם תנע q ואנרגיה ω. באיזה תחום קיים רצף של עירורים מסוג זה נקבע מהקינמטיקה של ים פרמי:



לדוגמא עבור $\omega \sim 0$ אנו יכולים לעבור בצורה כזאת
עם $0<q<2k_F$



האינטגרל הקובע את $\mathrm{Re}\,\chi$

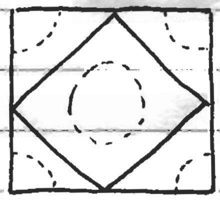
$$\mathrm{Re}\,\chi(q,\omega) = \frac{1}{V} P \sum_{k} \frac{f_F(\xi(k)) - f_F(\xi(k+q))}{\omega + \xi(k) - \xi(k+q)}$$

סינגולרי כאשר $\omega = \xi(k+q) - \xi(k)$. סינגולריות זו היא בדרך כלל אינטגרבילית במימדים גבוהים, ומובילה לכל היותר לסינגולריות בנגזרת של χ. לדוגמא, עבור $\omega = 0$ $\xi(k)$ ו-$\xi(k+q)$ חייבים להמצא על ה Fermi surface. המקרה עבור $q = 2k_F$ הוא המקרה הגבולי ויש בו שיקולים גאומטריים המובילים לסינגולריות בנגזרת של $\chi(q=2k_F, \omega=0)$ הגורמת לאוסילציות בצפיפות האלקטרונים סביב מקור חיצוני עם וקטור גל של $2k_F$: Friedel oscillations

הדרך המיידית לקבל סינגולריות חזקה יותר היא במקרה בו משטח פרמי מקיים תכונת nesting
כלומר שקיים וקטור גל Q עבורו קיים חלק סופי של ערכי k שבו

$$\xi(k+Q) = -\xi(k)$$

לדוגמא: tight binding model בשני ממדים על שריג ריבועי ב half filling



$$Q = (\pi,\pi) \qquad (a=1)$$

במקרה כזה

$$\mathrm{Re}\,\chi(Q,\omega=0) = -\frac{1}{V}\sum_k \frac{\tanh\left(\frac{\beta\xi(k)}{2}\right)}{2\xi(k)}$$

$$= -\int d\xi\, N(\xi)\, \frac{\tanh\left(\frac{\beta\xi}{2}\right)}{2\xi}$$

כאשר $N(\xi)$ צפיפות המצבים ליחידת נפח. אם $N(\xi)$ היא קבועה בקירוב כפי שמתקיים בדרך כלל ליד משטח פרמי אז אם $N(\xi)$ לא מתאפסת

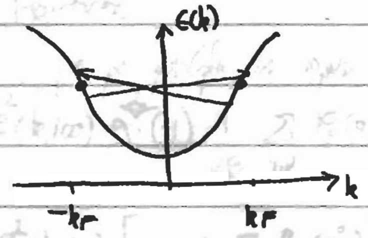
$$\sim -N(\xi=0)\int_{1/\beta}^{\Lambda} d\xi\, \frac{1}{\xi}$$

(עבור $\xi<\frac{1}{\beta}$, $\frac{\tanh\frac{\beta\xi}{2}}{2\xi}\sim\frac{\beta}{4}$) Λ הוא cutoff העקום משלב החלק באנרגיה בו תנאי ה nesting מתקיימים.

$$\sim -N(\xi=0)\ln\left(\frac{\Lambda}{T}\right)$$

אם $T<\omega$ ההתבדרות הלוגריתמית היא עדיין רגולריזציה ע"י ω ולא T.
ההתבדרות לוגריתמית בו של χ מעידה על נטייה של המערכת לעבור יציבות (במקרה שלנו בקביעות) כנגד הפרעה בוקטור הגל Q. במקרה שלנו זהו אי יציבות Peierls עיוות גל צפיפות בוקטור גל Q בהתאם לפוטנציאל השריג.

בקצרה זה אנו נבקש להבדל המהותי הראשון בין המערכת החד מימדית למערכות בממד גבוה יותר. בממד אחד תנאי ה nesting תמיד מתמלאים בלי קשר לצורת הספקטרום המדוייק.



ליד נקודות פרמי נוכל לקרב את יחס הדיספרסיה ליניארית

$$\xi(k)\simeq v_F(k-k_F) \qquad k\sim k_F$$

$$\xi(k)\simeq v_F(-k-k_F) \qquad k\sim -k_F$$

בגלל תכונת הסימטריה הזו שקף הקיימת לשבור כבל המערכות בלתי זוגי v_F זהה ליד נקודות פרמי השמאלית והימנית.

וכן $\underbrace{\xi(k-2k_F)}_{k\sim k_F} = -\xi(k)$

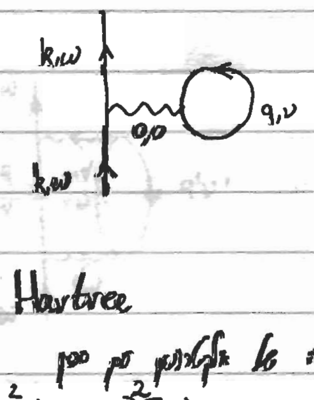
$$\Rightarrow \underbrace{\xi(k+2k_F)}_{k\sim -k_F} = -\xi(k)$$

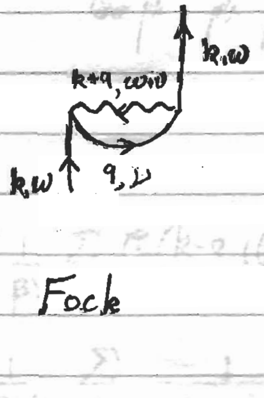
במימד אחד יש לנו nesting עם $Q = 2k_F$. המערכת תהיה לכן לא יציבה כנגד Peierls instability מלאה מלאי.. אנו רואים כי להתבדרות ה particle-hole susc השלכות מרחיקות לכת גם על תכונות המערכת בנוכחות אינטראקציה.

נעבור כעת לדון בתכונות המערכת בנוכחות אינטראקציה בין האלקטרונים. מה נשאר מהתכונות שמנינו עד כה? מסתבר כי במימד גבוה מ 1 תכונות אלה לא משתנות באופן מהותי - זוהי תמונה של תאוריית ה Fermi liquid. העירורים החד חלקיקיים אינם אלקטרונים חופשיים כמו במודל החופשי אלא אלקטרונים עטופים בענן עירורי חלקיק-חור. עירורים אלה נקראים קוואזי חלקיקים. מכיון ש quasi-particles אלה נושאים מטען אלקטרון בתוספת פלקטואציות נטרליות (עירורי חלקיק-חור) בתכונות הם מתנהגים כפרמיונים.

נראה כיצד מתקבלות מסקנות אלה במסגרת תורת הפרעות באינטראקציה. אדגיש כי המסקנות אינן נובעות כולן ישיר מן מוגבלות לאינטראקציה חלשה ומהוות נקודה כללית של תורת ה Fermi liquid.

ראינו כי האינפורמציה על העירורים החד-חלקיקיים מוכלת בפונקציית Green החד-חלקיקית. נבחן כיצד היא משתנה בנוכחות אינטראקציה. בסדר הראשון נקבל שני תהליכים - דיאגרמות, לצורך הפשטות נניח אינטראקציה נקודתית - momentum independent: g





Hartree

Fock

תרומה של אלקטרונים עם ספין

$$\mathcal{G}^2(k,i\omega)\cdot g\overset{2}{\cdot}(-1)\frac{1}{V\beta}\sum_{q,\nu}\mathcal{G}(q,i\nu)$$

$$=\mathcal{G}^2(k,i\omega)\left[-g\frac{1}{V}\sum_q f_F(\xi^0_q)\right]$$

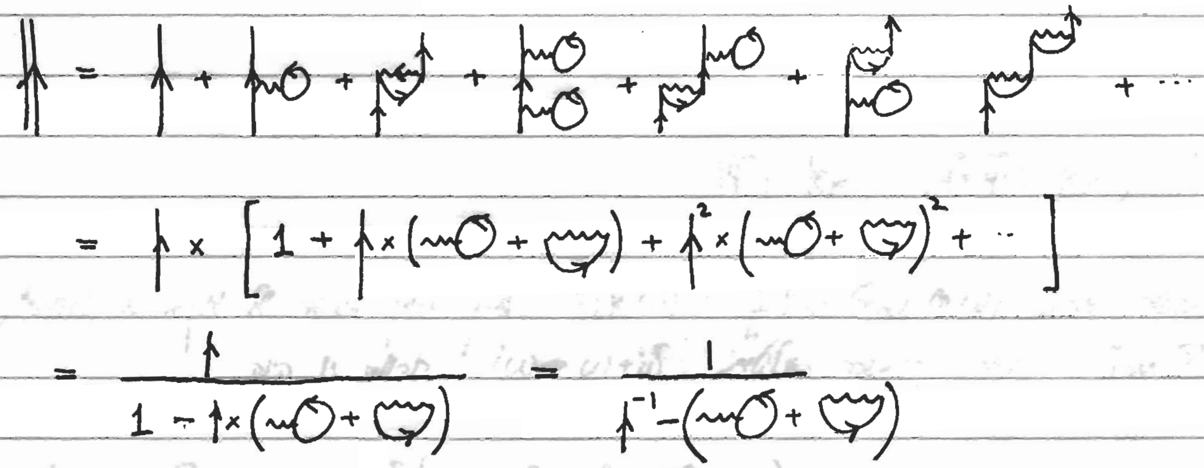
$$=\mathcal{G}^2(k,i\omega)(-gn)$$

$$\mathcal{G}^2(k,i\omega)\,g\cdot\frac{1}{V\beta}\sum_{q,\nu}\mathcal{G}(q,i\nu)$$

$$=\mathcal{G}^2(k,i\omega)\left[g\cdot\frac{1}{V}\sum_q f_F(\xi^0_q)\right]$$

$$=\mathcal{G}^2(k,i\omega)\,g\cdot n$$

סכום של החלקים שעקבנו עד כה



ובאופן כללי יותר

$$\mathcal{G}^{-1}(k,i\omega) = \mathcal{G}_0^{-1}(k,i\omega) - \Sigma(k,i\omega)$$

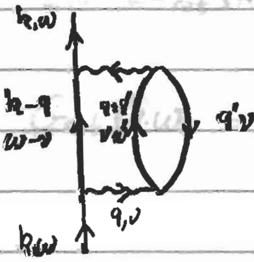
כאשר Σ : self energy הוא סכום של כל ה irreducible diagrams : דיאגרמות שאין אפשרות להפריד לשני דיאגרמות לא קשורות ע"י חיתוך קו אלקטרון אחד.

$$G_{ret}(k,\omega) = \frac{1}{\omega - \xi^0_k - \Sigma(k) + i\delta}$$

הקירוב H-F Σ ממשי ואינו תלוי ב- ω
(רק תלוי ב- k אם האינטראקציה אינה לוקלית)

לכן $A(k,\omega)$ הוא עדיין פונקציית דלתא ב- $\omega = \xi^0_k + \Sigma(k)$ האנרגיה של הקוואזי חלקיק מנורמלת ע"י האינטראקציות אך הם עדיין בעלי זמן חיים אין סופי.

התיקון משמעותי בסדר שני באינטראקציה:



$$= g^2 \frac{1}{\beta V} \sum_{q,\nu} \mathcal{G}(k-q, i(\omega-\nu))\, \chi(q, i\nu)$$

$$= g^2 \frac{1}{\beta V^2} \sum_{q'q\nu} \frac{1}{i(\omega-\nu) - \xi_{k-q}} \cdot \frac{f_F(\xi^0_{q'}) - f_F(\xi^0_{q+q'})}{i\nu + \xi^0_{q'} - \xi^0_{q+q'}}$$

$$= g^2 \frac{1}{\beta V^2} \sum_{qq'\nu} \frac{f_F(\xi^0_{q'}) - f_F(\xi^0_{q+q'})}{i\omega + \xi^0_{q'} - \xi^0_{q+q'} - \xi^0_{k-q}} \left[\frac{1}{i(\omega-\nu) - \xi^0_{k-q}} + \frac{1}{i\nu + \xi^0_{q'} - \xi^0_{q+q'}} \right]$$

$$= g^2 \frac{1}{V^2} \sum_{qq'} \frac{f_F(\xi^0_{q'}) - f_F(\xi^0_{q+q'})}{i\omega + \xi^0_{q'} - \xi^0_{q+q'} - \xi^0_{k-q}} \left[f_F(\xi^0_{q+q'} - \xi^0_{q'}) - f_F(-\xi^0_{k-q}) \right]$$

ב $T=0$ האינטגרנד אינו מתאפס רק באחד משני המקרים הבאים:

א. $|\vec{q}'|<k_F, \quad |\vec{q}+\vec{q}'|>k_F, \quad |\vec{k}-\vec{q}|>k_F$

ב. $|\vec{q}'|>k_F, \quad |\vec{q}+\vec{q}'|<k_F, \quad |\vec{k}-\vec{q}|<k_F$

אנו מעוניינים לחשב את $A(k,\omega)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\,G_{ret}(k,\omega)$ ולכן נחשב תרומה של מקרה א' לדוגמא, ל $\mathrm{Im}\,\Sigma_{ret}(k,\omega)$. תחת ההמשכה האנליטית $i\omega\to\omega+i0$ תרומה זו הינה

$$g^2\frac{\pi}{V^2}\sum_{\substack{|\vec{q}'|<k_F \\ |\vec{l}|>k_F \\ |\vec{k}+\vec{q}'-\vec{l}|>k_F}}\delta\left(\omega+\xi^0_{q'}-\xi^0_{l}-\xi^0_{k+q'-l}\right)$$

$$\vec{l}=\vec{q}+\vec{q}'$$
$$\vec{q}'=\vec{q}'$$
$$\vec{k}+\vec{q}'-\vec{l}=\vec{k}-\vec{q}$$

מתוך האילוצים על הסכום ברור כי פונקצית הדלתא אפקטיבית רק אם $\omega>0$. עבור ω נתון הערך המקסימלי של $\xi^0_{q'}$ יכול לקבל הינו ω (כאשר ξ^0_l ו-$\xi^0_{k+q'-l}$ מתאפסים) ולכן כל $\omega\ll\epsilon_F$ האינטגרציה על q' מוגבלת לשכבה $\frac{\omega}{v_F}$ סביב k_F. שיקול דומה תקף גם עבור האינטגרציה על l. התלות ב l תלויה. phase-space constraints מובילים לתוצאה

$$\mathrm{Im}\,\Sigma_{ret}(k,\omega)\simeq -C_k\,\omega^2$$ $\Leftarrow$ עבור $\omega\ll\epsilon_F$

<u>תרגיל בית</u>: הראו כי בשני מימדים

$$\mathrm{Im}\,\Sigma_{ret}(k,\omega)\simeq -C_k\,\omega^2\ln\left(\frac{\omega}{\epsilon_F}\right)$$

לכן עבור $\omega\ll\epsilon_F$

$$G_{ret}(k,\omega)=\frac{1}{\omega-\xi^0_k-\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)+iC_k\omega^2}$$

עבור $k\sim k_F$, עד סדר ראשון ב $\omega-\xi_k$, ל G_{ret} קוטב? כאשר $\omega=\xi_k$

$$\xi_k=\xi^0_k+\mathrm{Re}\,\Sigma(k,\xi_k)$$

$$=\frac{1}{\omega-\xi_k-\frac{\partial}{\partial\omega}\Sigma(k,\xi_k)(\omega-\xi_k)+iC_k\xi_k^2}+G_{inc}(k,\omega)$$

$$G_{ret}(k,\omega) = \frac{Z_k}{\omega - \xi_k + i\tau_k^{-1}} + G_{inc}(k,\omega) \quad \Leftarrow$$

$$Z_k = \left(1 - \frac{\partial}{\partial\omega} \mathrm{Re}\,\Sigma(k,\omega)\Big|_{\omega=\xi_k}\right)^{-1}$$

כאשר ה q.P. weight הוא
- סופי כל עוד $\mathrm{Re}\,\Sigma$ אנליטי

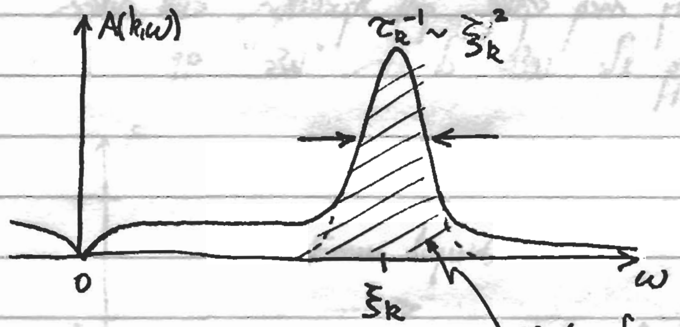
$$\frac{1}{\tau_k} = C_k Z_k \xi_k^2$$

ו q.P (inverse) life time

נתבונן בתרומת החלק הקוהרנטי של G_{ret} ל $A(k,\omega)$:

$$A(k,\omega) = \frac{Z_k \tau_k^{-1}}{(\omega-\xi_k)^2 + \tau_k^{-2}}$$

לורנציאן ב ω



קיימת לכן משמעות לדבר על עירורים כאלו אפי'
חלקיק מוגדר היטב מכיוון שרוחב ההתפלגות קטן
יחסית לאנרגיית החלקיק כמו לאנרגיית פרמי.
עם הדיספרסיה $\xi(k) \sim \frac{k^2}{2m^*} - \mu$ מגדיר מסה
אפקטיבית ל q.P

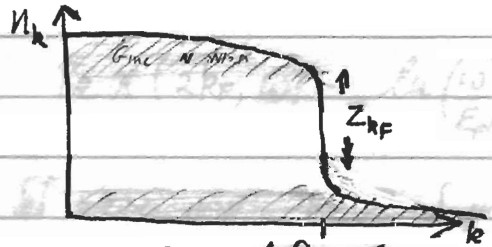
$$\frac{m}{m^*} = Z_k \left(1 + \frac{1}{v_F}\frac{\partial \mathrm{Re}\,\Sigma}{\partial k}\right)\Big|_{k=k_F}$$

ב heavy fermions $\sim 10^{-3}$

מציין ש

$$n_k = \frac{1}{\beta}\sum_n G(k, i\omega_n)$$

נקבל כי התרומה של G_{coh} ליד k_F שם ניתן להזניח את τ_k הינה $Z_k f_F^{(0)}(\xi_k)$
לכן ל n_k ב $T=0$ עדיין אי רציפות אך הגודל שלה $Z_{k_F} \le 1$



מיקום האי-רציפות ב n_k מגדיר משטח פרמי
גם במערכות אינטראקציות.

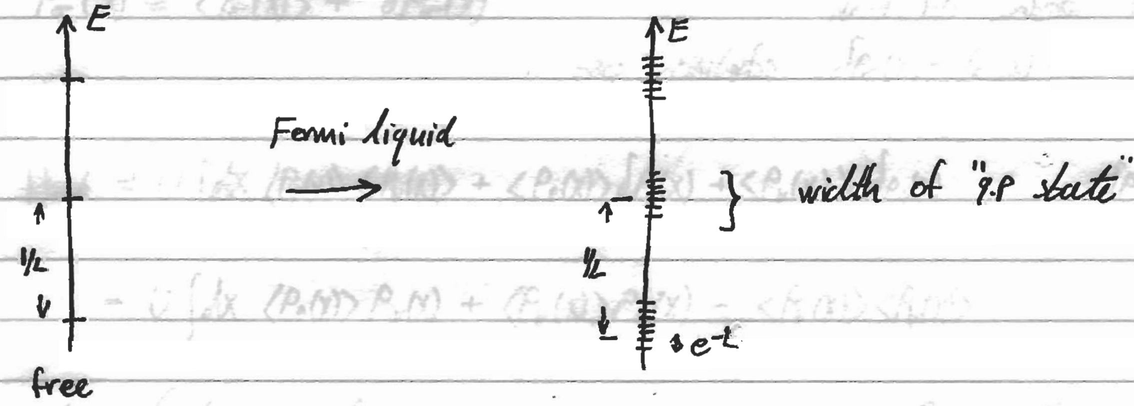
<u>משפט Luttinger</u>: הנפח הכלוא (המוכלל)
בתוך משטח פרמי אינו משתנה עם הדלקת אינטראקציות למרות שהמשטח יכול לשנות צורתו.
$\Leftarrow$ עבור משטח פרמי כדורי הנ"ל כלומר k_F אינו משתנה

במערכת החופשית הספקטרום החד-חלקיקי מעל מצב היסוד מורכב מאכלוס מצב רק מעל E_F בתוספת עירורי חלקיק-חור.

מצבים אלה מנוונים באופן אקספוננציאלי עם הגדלת אנרגית המצב ומעל ל-E_F.

ומכיוון שליד E_F $\epsilon_k \sim k_F(k-k_F)$ המרחק בין אוסף מצבים מנוון אחד למשנהו $\sim \frac{1}{L}$ כאשר L גודל המערכת.

אינטראקציה מסירה ניוונים אלה, אך ב Fermi liquid המצבים המתוקנים במקום להתפזר באופן רציף בכל האנרגיה מתקבצים בקבוצות כשהמרחק בין חברים בקבוצה קטן אקספוננציאלית בגודל המערכת והמרחק בין קבוצות $\sim \frac{1}{L}$. קבוצות מצבים מתוקנים אלה מוגדרות כל אחת "מצב" qp.



מה קורה בממד אחד?

ראינו כי (ב $T=0$)

$$\mathrm{Re}\,\chi(2k_F,\omega) \sim \ln\left(\frac{\omega}{E_F}\right)$$

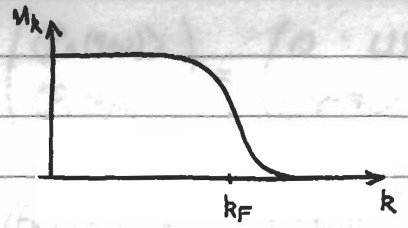
כתוצאה מכך תהליכים מהסוג

גורמים ל $\mathrm{Re}\,\Sigma$ מהסוג שמתנהג כלוג

לחישוב: תרגיל בית

$$\mathrm{Re}\,\Sigma(k_F,\omega) \sim \omega \ln\left(\frac{\omega}{E_F}\right)$$

$$\Leftarrow \quad Z_{k_F} = \left(1 - \frac{\partial}{\partial \omega}\mathrm{Re}\,\Sigma(k_F,\omega)\right)^{-1}_{\omega=0} \sim \ln^{-1}\left(\frac{\omega}{E_F}\right) \xrightarrow{\omega\to 0} 0$$



אין משקל סופי לעודפי q.p ליד k_F במצב אחד.

כיצד מושפעות הסוספטיביליות שחישבנו עבור הגז החופשי בנוכחות אינטראקציה? הללו מודדות את תגובת המערכת לפוטנציאל הלוקלי אותו רואה האלקטרון - זה מורכב מהפוטנציאל החיצוני והפוטנציאל המושרה כתוצאה מתגובת האלקטרונים לפוטנציאל החיצוני.
במצב גבול $N \gg 1$ חישוב הסוספטיביליות נעשה בדרך כלל באופן self-consistent תוך הזנחת תיקונים של סדר גבוה לתנודות במערכת. נדון לדוגמא באלקטרונים עם אינטראקציית Hubbard לוקלית

$$H_{int} = U\int dx\, \rho_\uparrow(x)\, \rho_\downarrow(x)$$

$$\rho_\sigma(x) = \langle \rho_\sigma(x)\rangle + \delta\rho_\sigma(x)$$

אם נזניח לסדר ראשון נוכל לכתוב
כאשר $\delta\rho_\sigma(x) = \rho_\sigma(x) - \langle\rho_\sigma(x)\rangle$ הפלוקטואציות בסדר.

⇐ מתוך הנחה $\delta\rho \ll \langle\rho\rangle$:

$$H_{int} \simeq U\int dx\, \langle\rho_\uparrow(x)\rangle\langle\rho_\downarrow(x)\rangle + \langle\rho_\uparrow(x)\rangle\,\delta\rho_\downarrow(x) + \langle\rho_\downarrow(x)\rangle\,\delta\rho_\uparrow(x)$$

$$= U\int dx\, \langle\rho_\uparrow(x)\rangle\rho_\downarrow(x) + \langle\rho_\downarrow(x)\rangle\rho_\uparrow(x) - \langle\rho_\uparrow(x)\rangle\langle\rho_\downarrow(x)\rangle$$

האיבר האחרון הינו הסחה הקבועה של האנרגיה. שני האיברים הראשונים ניתנים לפירוש כפוטנציאל האפקטיבי המורגש על ידי אלקטרון עם ספין נתון כתוצאה מהאלקטרונים עם הספין ההפוך. לדוגמא עבור אלקטרון עם ספין up

$$V^{\uparrow}_{eff}(x) = U\langle\rho_\downarrow(x)\rangle$$

בהעדר אינטראקציה האלקטרונים יגיבו לפוטנציאל חיצוני בהתאם לסוספטיביליות של הגז החופשי. למשל

$$\langle\rho_\uparrow(q,\omega)\rangle = \chi^0(q,\omega)\, V^{\uparrow}_{ext}(q,\omega) \qquad \chi^0 = \chi^{0\,\rho\rho}$$

בתוספת linear response: אם $V_{eff}(x)$ קטן

$$\langle\rho_\uparrow(q,\omega)\rangle = \chi^0(q,\omega)\left[V^{\uparrow}_{ext}(q,\omega) + V^{\uparrow}_{eff}(q,\omega)\right]$$

$$\begin{pmatrix} \langle \rho_\uparrow(q,\omega)\rangle \\ \langle \rho_\downarrow(q,\omega)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U\chi^0(q,\omega) \\ U\chi^0(q,\omega) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \rho_\uparrow(q,\omega)\rangle \\ \langle \rho_\downarrow(q,\omega)\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi^0(q,\omega)\, V^\uparrow_{ext}(q,\omega) \\ \chi^0(q,\omega)\, V^\downarrow_{ext}(q,\omega) \end{pmatrix} \Leftarrow$$

כך לעצמו:

$$\langle \rho_\uparrow(q,\omega)\rangle = \chi^0(q,\omega)\,\frac{\left[U\chi^0(q,\omega)V^\downarrow_{ext}(q,\omega) + V^\uparrow_{ext}(q,\omega)\right]}{\left[1+U\chi_0(q,\omega)\right]\left[1-U\chi_0(q,\omega)\right]}$$

במקרה של שדה מגנטי $V^\uparrow_{ext}(q,\omega) = -V^\downarrow_{ext}(q,\omega)$!

$$\langle \rho_\uparrow(q,\omega)\rangle = \frac{\chi^0(q,\omega)}{1+U\chi^0(q,\omega)}\,V^\uparrow_{ext}(q,\omega)$$

במסגרת קרוב זו הידוע כ RPA (random phase approximation) נקבל סכום על הפולריזציות של הגז בשרשרת האינטראקציה

$$\chi(q,\omega) = \frac{\chi^0(q,\omega)}{1+U\chi^0(q,\omega)} =$$

מכיון שהמימוש שלו מאוד χ^0 סופית (בקרוב לנקודת המעבר) יש צורך באינטראקציה חזקה ודוחה $(U>0)$ (מכיון ש $\chi^0<0$) כדי להגיע להתבדרות התגובה ב χ ולהתהוות הפולריזציה. התהוות כזו מעידה על חוסר יציבות של המערכת לכיוון סדר שבמקרה זה $\chi(q=0)$ הינו סדר פרומגנטי או אנטי-פרומגנטי: $\chi(q\neq0)$ spin density wave. כשקיים nesting χ^0 מתבדר ב Q מסוים ובמקרה זה כל אינטראקציה דוחה קטנה ככל שתהיה תוביל לסידור spin-density wave מסוג עם וקטור גל Q.

תשובה דומה ניתן לקבל עבור ה pairing susceptibility $\Delta(x,t) = \Psi_\downarrow(x,t)\Psi_\uparrow(x,t)$
אותה ניתן לחשב מתוך

$$-\langle \Delta^+(x,\tau)\,\Delta(0,0)\rangle = -\langle \Psi^+_\uparrow(x,\tau)\,\Psi^+_\downarrow(x,\tau)\,\Psi_\downarrow(0,0)\,\Psi_\uparrow(0,0)\rangle$$

באופן שווה

$$\chi^0_{pair}(q,\omega) = -\frac{\beta}{V}\sum_{\substack{k_2 k_3 k_4 \\ \omega_2\omega_3\omega_4}} \langle C^+_{-k_2+q,\,-\omega_2+\omega,\uparrow}\, C^+_{k_2\omega_2\downarrow}\, C_{k_3\omega_3\downarrow}\, C_{k_4\omega_4\uparrow}\rangle$$

$$= -\frac{\beta}{V}\sum_{k\nu} \langle C^+_{-k+q,\,-\nu+\omega\,\uparrow}\, C_{-k+q,\,-\nu+\omega\,\uparrow}\rangle\langle C^+_{k\nu\downarrow} C_{k\nu\downarrow}\rangle$$

$$= \frac{-1}{\beta V}\sum_{k\nu} \frac{1}{i(\omega-\nu)-\xi_{q-k}}\cdot\frac{1}{i\nu-\xi_k}$$

$$= -\frac{1}{\beta V}\sum_{k\nu}\left[\frac{1}{i(\omega-\nu)-\xi_{q-k}}+\frac{1}{i\nu-\xi_k}\right]\frac{1}{i\omega-\xi_{q-k}-\xi_k}$$

$$= -\frac{1}{V}\sum_{k}\frac{f_F(\xi_k)-f_F(-\xi_{q-k})}{\omega-\xi_k-\xi_{q-k}+i\delta}$$ אחרי המשכה אנליטית

בגלל time-reversal symmetry $\epsilon_k = \epsilon_{-k}$ $\Leftarrow$

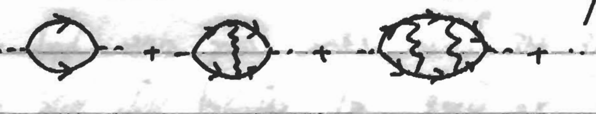
$$\chi^0_{pair}(q=0,\omega=0) = -\frac{1}{V}\sum_k \frac{\tanh\left(\frac{\beta\xi_k}{2}\right)}{2\xi_k} \simeq -N(\xi=0)\ln\left(\frac{E_F}{T}\right)$$

מכיון שבגלל לרשום את ה Hubbard term ? $U\int dx\,\Delta^+(x)\Delta(x)$

ומכיון שבמקרה זה שזה תלוי מלמטה ל Δ,Δ^+ עם אותו סימן נקבל

קירוב RPA

$$\chi_{pair}(q,\omega) = \frac{\chi^0_{pair}(q,\omega)}{1-U\chi^0_{pair}(q,\omega)}$$



כיוון שבגלל $\chi^0_{pair}(0,0)$ מתבדר ושלילי ולכן כל אינטראקציה מושכת קטנה ככל שתהיה תגרום
לאי יציבות במצב זה - לכל מתכת.

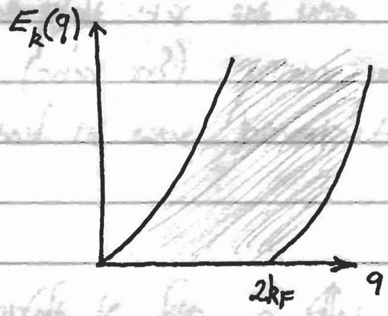
$\Leftarrow$ במימד גבוה 1N והכרח nesting Fermi liquid יציב כנגד חוץ יציבות בערוץ ה p-h
charge wave, spin wave ferromagnetism כל סוגי האינטראקציות אין תקבות מאז. הוא אינו יציב כנגד כל אלה
כאשר קיימות אינטראקציות מושכות - אין צורך בכך לתור היציבות מתרחשת בטמפרטורה נמוכה.
במקרה של nesting גם ערוץ ה p-h מתבדר עבור אינטראקציות דוחות, כך שאלו תור היציבות
נקבע על פי סימן האינטראקציות. סוגי מצב זה סימן האינטראקציה האפקטיבית תלוי בסקלת האנרגיה
(רנורמליזציה של דרגות קוונטיות ומשפט כתוצאה מכוונטום) ולאחר אי היציבות נקבע על ידי האופן בו
האינטראקציות מתנהגות בתהליך ה RG.

מימד אחד הינו מימד עקום המוגדר שתמיד קיים nesting. אך גם ידוע משפט Mermin Wagner
שאי אפשר לשבור סימטריה שלמה רציפה במימד כמו שמשמעותו spin wave superconductivity
RPA לכן אינו קירוב מספק ואינו מתאר מצב זה ולכן בוחנים דיאגרמות עם מורכבות
bubbles / ladders בכל סדר: parquet approximation - עניין קשה.
אם שני סוגי אי היציבות מתחרים זה בזה ומשלימים זה את זה באופן הלוך כך שמתקבלת
תוצאה חדשה על כל סדר אך לעולם אינה מתבדרת ממש. נראה לכן למצוא מתכות חד ממדיות
מגיעים לנו המנגנות קריטיים והאלגברה מחברת דמויות יצגו יחד לצד מעברי הסדר - אי סדר.

לבסוף נשים לב לתכונה מיוחדת נוספת של מערכות חד-ממדיות. למעשה התכונה זו עומדת מאחורי השיטה לבוזוניזציה של מערכות אלה. ראינו כבר כי מרכיב חשוב של עירורי הגז האלקטרוני הינם עירורי אלקטרון-חור בהם אלקטרון מועבר ממצב מתחת לרמת פרמי למצב פנוי מעלה. עירורים אלה הינם בעלי תנע מוגדר ואנרגיה מוגדרת השווה להפרש התנע והאנרגיה בין המצב המאוכלס $k+q$ התפוס למצב מתחת הים האלקטרוני k (וגו נשאר החור). במימד גבוה מאחד קיים רצף מלא של עירורים מסוג זה במישור

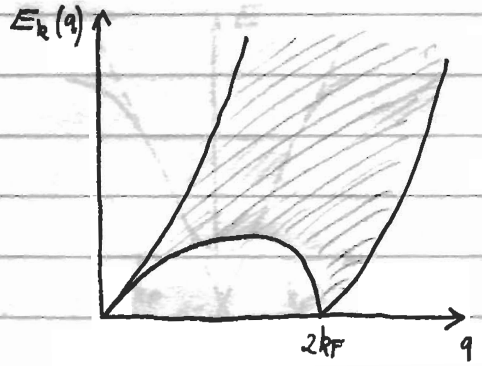
$$q=(k+q)-k$$

$$E_k(q)=\xi(k+q)-\xi(k)$$



ניתן לקבל ערכים של $E_k(q)$ נמוך עבור התחום המלא $0<q<2k_F$

במימד אחד לעומת זאת הדרך היחידה לקבל עירור אלקטרון חור בעל אנרגיה נמוכה היא עבור עירור עם $q\simeq 0$ בו האלקטרון מועלה למצב פנוי מעל נקודת פרמי שבקרבת המצב המקורי שלו או עם $q\sim 2k_F$ בו האלקטרון מועלה למצב פנוי מעל נקודת פרמי הנגדית למצבו המקורי. כתוצאה מכך במישור q, $E_k(q)$ נקבל:



מרכז בהתנהגות ליד $q=0$.

עבור דיספרסיה ריבועית
$$E_k(q)=\frac{k}{m}q+\frac{q^2}{2m}$$

בהינתן q, k יכול להמצא רק בקטע $k\in[k_F-q,k_F]$

האנרגיה הממוצעת של העירורים עבור q נתון היא

$$E(q)=\frac{1}{q}\int_{k_F-q}^{k_F}dk\left(\frac{k}{m}q+\frac{q^2}{2m}\right)$$
$$=\frac{k_F}{m}q=v_F q$$

ורוחב התחום בו מצויים עירורים אלה הינו

$$\delta E(q)=\max\left(E_k(q)\right)-\min\left(E_k(q)\right)$$
$$=E_{k_F}(q)-E_{k_F-q}(q)=\frac{q^2}{m}=\frac{E^2(q)}{m v_F^2}$$

קיבלנו לכן כי כל עוד יחס הדיספרסיה נשאר שווה מעבר לרמת פרמי $v_F>0$:

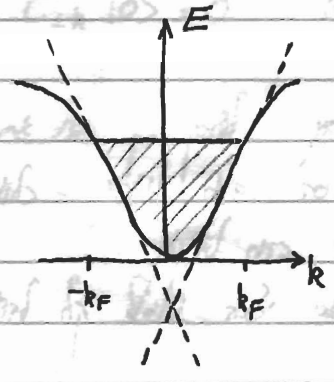
א. האנרגיה הממוצעת של זוגי אלקטרון-חור תלויה רק בתנע q

ב. הרוחב $\delta E(q)$ שואף לאפס עבור q קטן הרבה יותר מהר מהאנרגיה הממוצעת $E(q)$.

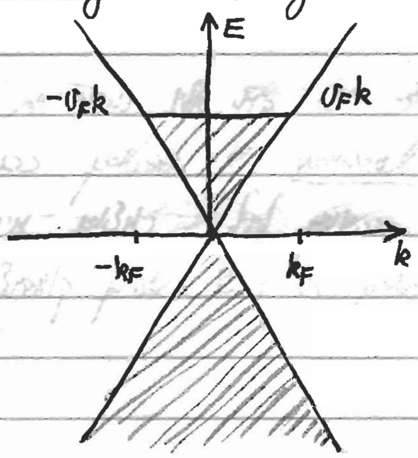
תנודות אלה מתנהגות כמו quasi-particles בנוזל פרמי. כתוצאה מכך במימד אחד זוגי אלקטרון-חור מתנהגים כ"חלקיקים" מוגדרים היטב. מכיוון שהם מורכבים משני אופרטורים פרמיוניים (יצירה והריסה) הם בוזונים בטבעם. זוגים אלה מהווים בבסיס של שיטת ה bosonization שמאפשר לנו לתאר את התנודות של מערכות חד-ממדיות בנוכחות אינטראקציות.

כדי להבין התנודות הנ"ל למצבים לא רק עבור q אינפיניטסימלי נחליף את המודל של אלקטרונים עם דיספרסיה ריבועי בגז של אלקטרונים עם דיספרסיה ליניארי. כדי לקבל אי תלות של אנרגיית זוגי אלקטרון-חור בתנע המקורי k עבור q כלשהו ולא רק q קטן נמשיך את הספקטרום ל $-\infty$.

Tomonaga - Luttinger Model



המודל המקורי (אלקטרונים עם פיזור ריבועי)



כל עוד אנו מתעניינים בתכונות המערכת המקורית עבור אנרגיות הקטנות מאוד מ E_F נצפה כי המודל הלינארי יהיו קירוב מספק.

במודל Tomonaga - Luttinger נוח לכן להציג שני סוגי פרמיונים: right and left movers עם המילטוניאן

$$H_{TL}=\sum_{\substack{\eta=L=-1 \\ R=1 \\ k}} v_F(\eta k-k_F)\, c^{\dagger}_{\eta k} c_{\eta k}$$

נניח תנאי שפה מחזוריים על אורך L: $k=\frac{2\pi}{L}\cdot n$