התעבות Bose-Einstein ועל-נוזליות

התוצאה שקיבלנו עבור פונקצית האכלוס הבוזונית הובילה את אינשטיין במאמר מפורסם משנת 1925 לחזות את התופעה הנקראת על שמו ועל שם Bose.

מכיוון ש:

$$n_B(\epsilon_k) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k-\mu)}-1}$$

קל לראות שבגז הבוזוני החופשי לא ניתן לקבל $\mu>0$.
אם $\mu>0$ המצבים עם $\epsilon_k<\mu$ נכנסים לפונקצית החלוקה עם משקל בולצמני המתבדר כאשר $T\to 0$.
בפועל $\mu<0$ בטמפרטורות "גבוהות" וקטן בערכו המוחלט עם הורדת הטמפרטורה עד שבטמפרטורה קריטית T_c (של התעבות BE) $\mu=0$ ו- $n(\vec{k}=0)$ הופך לסינגולרי (ונשאר כזה עבור $T<T_c$). עובדה זו מיצגת את המצב בו מספר מאקרוסקופי N_0 מתוך החלקיקים המרכיבים את המערכת נמצא במצב היסוד החד-חלקיקי.

עבור $T<T_c$ נקבל לכן

$$N = N_0 + N_{exc} = N_0 + \sum_{\vec{k}\neq 0} \frac{1}{e^{\beta\epsilon_k}-1}$$

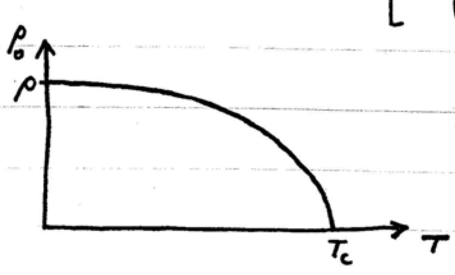
$$= N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{1}{e^{\frac{\hbar^2k^2}{2m}/k_BT}-1} = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3}\cdot 4\pi\cdot\sqrt{2}\left(\frac{mk_BT}{\hbar^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x-1}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(\frac{3}{2})}$$

$$\Leftarrow \quad \rho_{exc} \equiv \frac{N_{exc}}{V} = 2.612\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

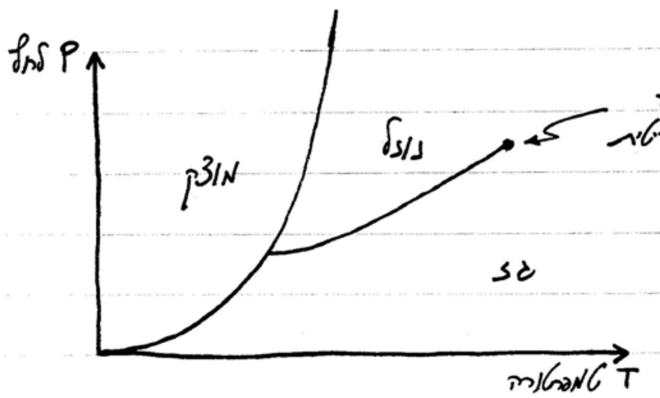
ב- $T=T_c$ $N_0=0$ ו- $\rho_{exc}=\rho\equiv\frac{N}{V}$ ומכאן:

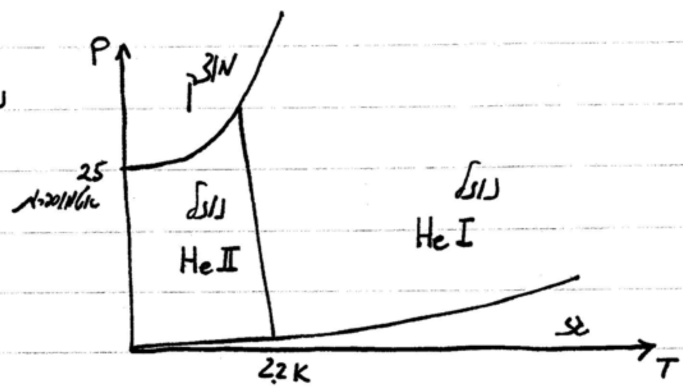
$$k_BT_c = \frac{2\pi}{(2.612)^{2/3}}\frac{\hbar^2}{m}\rho^{2/3}$$

$$\rho_0 = \rho-\rho_{exc} = \rho\left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]$$



הערכת T_c מהתוצאה הנ"ל עבור הליום ^4He נותנת $T_c=3.1K$, טמפרטורה שאינה רחוקה ממעבר פאזה שאכן נצפה בהליום ב $T_\lambda=2.2K$. נתבונן בדיאגרמת הפאזות של ^4He בהשוואה לדיאגרמת פאזות למערכת חד-רכיבית (שאינה מעורבת) אופיינית.

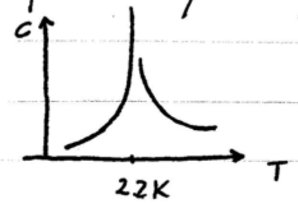




אנו מבחינים מספר תכונות חריגות עבור הליום:

א. הליום נשאר נוזל (עד לחץ של 25 אטמוספרות) גם ב $T=0$. זהו החומר היחיד (פרט ל ^3He ובשונה מהחומרות גם גזים אצילים של אטומים מסוימים) המתנהג בצורה כזו. זוהי תוצאה של כוחות המשיכה החלשים בין אטומי ההליום ומסתם הנמוכה הגורמת לפלוקטואציות קוונטיות חזקות "הממיסות" את המוצק גם ב $T=0$.
כוחות הקשר בין אטומי ההליום הינם כוחות ון-דר-וולס חלשים המנסים למקם את האטומים במקום מסודר עם קבוע שריג של כ $3\mathring{A}$ כך לכל אטום "מכניס" אנרגית קשר E_b. לאטום הנמצא בבור הפוטנציאל סביב נקודת השריג יש אנרגיה קינטית כתוצאה מעקרון אי הוודאות $\Delta P \sim \hbar/\Delta x \Rightarrow E_k \sim \frac{\Delta P^2}{2M}$
המערכת תתגבש כל עוד $E_b > E_k$. בהליום E_b קטן והמסה הקטנה גורמת ל zero point energy קינטית גבוהה. נציין שמימן, יסוד הקל מהליום, מוצק ב $T=0$ ולחץ אטמוספרי כתוצאה מכוחות הקשר החזקים יותר בין מולקולות המימן.

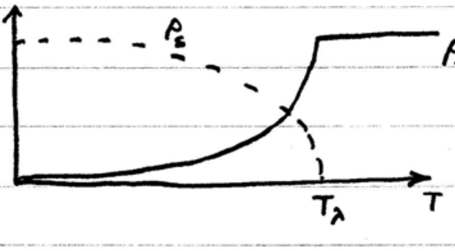
ב. קיים מעבר פאזה נוסף בין נוזל הנקרא HeI המציג תכונות אופייניות לנוזלים "נורמליים" לנוזל הנקרא HeII לו תכונות מיוחדות עליהן נעמוד מיד. במעבר קיבול החום הסגולי מתבדר וצורת הגרף נתנה למעבר את שמו "λ-transition".



2. בשנת 1937 גילה Kapitza כי הנוזל He II זורם בצנרות דקות ללא התנגדות (אפס צמיגות) כל עוד מהירותו קטנה ממהירות קריטית הגדלה עם קוטר הצינור. לעומת זאת אם תולים דיסקה בתוך כלי עם He II ונסובב אותה נמצא, כמו בנוזלים רגילים, ששכבת הגבול בין הדיסקה לנוזל נישאת עם הדיסקה ומגדילה את מסתה האפקטיבית (ובכך מקטינה את תדר הסיבוב שלה). בתנאי נסוי אלה הצמיגות אינה מתאפסת.

שני סוגי התוצאות שתוארו ניתנות להסבר אם נניח ש He II הינו למעשה תערובת של שני נוזלים - נוזל בעל צמיגות 0 וצפיפות ρ_s ונוזל נורמלי בעל צפיפות ρ_n כך ש $\rho = \rho_s + \rho_n$ כאשר היחס בין הצפיפויות הינו פונקציה של הטמפרטורה. (תורת לנדאו)

בנסוי הראשון רק רכיב העל-נוזל זורם ובנסוי השני הדסקה גוררת שכבת גבול של הנוזל הנורמלי.



3. אם נחבר שני מיכלים של He II כשהאחד בלחץ גבוה מהשני מסת נוזל תעבור מהמיכל הראשון לשני ובמיכל זה (השני בעל הלחץ הנמוך יותר) הטמפרטורה תרד. תופעה זו מוסברת אם נניח כי לרכיב העל-נוזל אפס אנטרופיה - הוא נמצא במצב היסוד ולכן הטמפרטורה שלו מתאפסת. רכיב זה הוא שזורם בין המיכלים וגורם לירידת הטמפרטורה.

טבעי להניח כי קיים קשר בין תופעת העל-נוזליות ותופעת BE ולזהות את רכיב הנוזל שהתעבה ρ_0 עם הרכיב העל נוזלי ρ_s בתורת לנדאו ואת ρ_{exc} עם ρ_n. אנו נראה כי התופעות אמנם קשורות אך אינן זהות. T_λ קטנה מ T_c עבור עיבוי BE של גז אידאלי בגלל קיומן של אינטראקציות דוחות בין אטומי ההליום. נמצא, יחד עם זאת, כי אינטראקציות אלה הכרחיות לקיומה של תופעת העל-נוזליות. גז בוזוני אידאלי עובר התעבות BE אך אינו על-נוזל.

נרצה כעת לבחון את המערכת הבוזונית בנוכחות אינטראקציות במסגרת נסוח הקוונטי בצורת אינטגרל מסלול

נניח כי האינטראקציה בין הבוזונים דוחה וקצרת טווח (אינטראקציה כזו מדמה את החלק הדוחה במרחקים קטנים של פוטנציאל ונדרוולס). במפורש נניח

$$U(\vec{r}-\vec{r}\,') = g\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad , \; g>0$$

איבר האינטראקציה בהמילטוניאן הינו:

$$\frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, \hat{\phi}^{\dagger}(r)\hat{\phi}^{\dagger}(r')U(\vec{r}-\vec{r}\,')\hat{\phi}(r')\hat{\phi}(r) = \frac{g}{2}\int d^3r\, \hat{\phi}^{\dagger 2}(r)\hat{\phi}^{2}(r)$$

ולכן

$$Z = \int D\phi^*(r,\tau)\, D\phi(r,\tau)\, e^{-S}$$

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3r \left\{ \phi^*(r,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu\right]\phi(r,\tau) + \frac{1}{2}g\left[\phi^*(r,\tau)\phi(r,\tau)\right]^2 \right\}$$

האסטרטגיה בה ננקוט היא חישוב תוך שימוש בשיטת saddle point ותנודות סביבה. קירוב זה הופך טוב יותר בטמפרטורות נמוכות (כאשר β גדלה הפעולה האפקטיבית גדלה, המשקלים באינטגרל המסלול קטנים אקספוננציאלית והסכום נשלט על ידי הקונפיגורציות בעלות הפעולה המינימלית). נחפש לכן קונפיגורציה ϕ_0 שבעבורה $\delta S=0$ לאמר כזו המקיימת את משוואת אוילר-לגרנג'

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu\right)\phi_0 + g|\phi_0|^2\phi_0 = 0$$

נחפש פתרון המוגני שאינו תלוי בזמן. פתרון כזה יתן פעולה מינימלית לעומת פתרונות אחרים של המשוואה (בחלקם נעסוק בתרגיל הבית).

עבור $\mu<0$ פתרון כזה הינו בהכרח

$$\phi_0 = 0$$

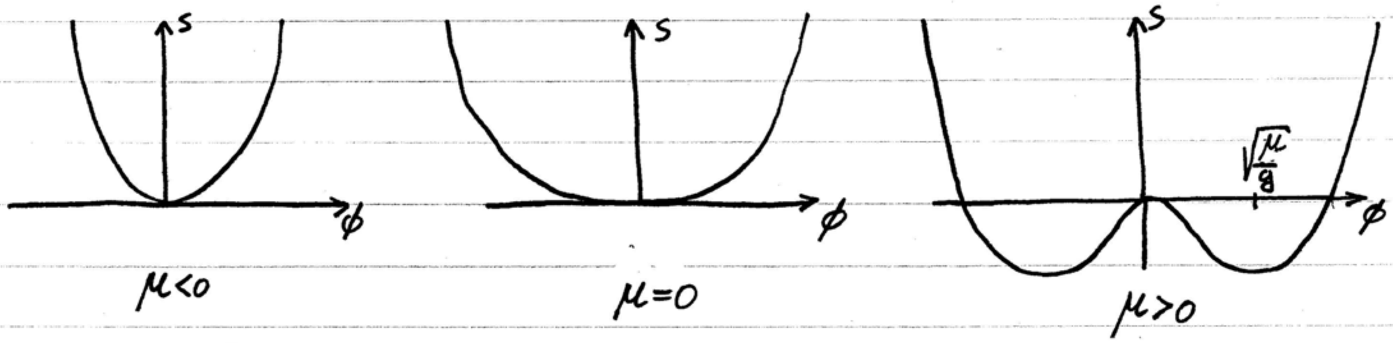
עבור $\mu>0$ הפתרון הוא מהצורה

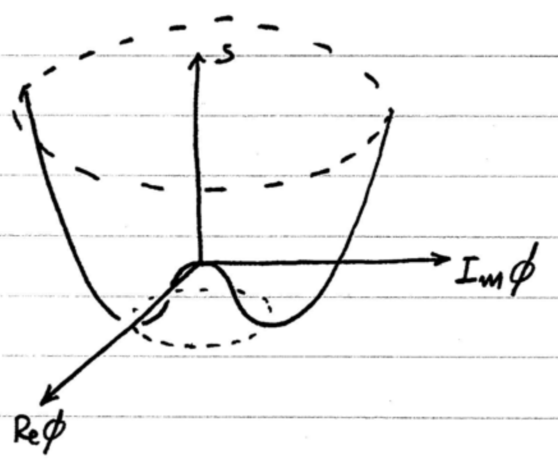
$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}\, e^{i\theta}$$

עם θ כלשהו בין 0 ל-2π. שימו לב כי בנוכחות האינטראקציה, הפוטנציאל הכימי μ יכול להפוך חיובי בטמפרטורות נמוכות מבלי להשפיע על התכנסות האינטגרל המסלולי המגדיר את Z.

ניתן להבין תוצאה זו אם נתבונן בפעולה עבור שדה קבוע ϕ_0 : $S(\phi_0)=\beta V\left[-\mu|\phi_0|^2+\frac{g}{2}|\phi_0|^4\right]$

הפעולה מקבלת מינימום ב ϕ_0 סופי עבור $\mu>0$:





עבור $\mu>0$ ל $S(\phi_0)$ צורת "כובע סומבררו" עם מינימום מנוון המתאים לפתרונות בעלי אמפליטודה $\sqrt{\frac{\mu}{g}}$ ופאזה $e^{i\theta}$ על פני המעגל $\theta\in[0,2\pi]$.

מה המשמעות של הקונפיגורציות $\phi_0=\sqrt{\frac{\mu}{g}}e^{i\theta}$?

הן מתארות מצבים קוהרנטים של אופרטור השדה עבורם $\hat{\phi}(\vec{r})|\phi_0\rangle=\sqrt{\frac{\mu}{g}}e^{i\theta}|\phi_0\rangle$

אם נזכור $\hat{\phi}(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}a_{\vec{k}}$ קל לראות שהם מצבים עצמיים של a_0 עם $a_0|\phi_0\rangle=\sqrt{\frac{\mu V}{g}}|\phi_0\rangle$

ברור לכן שהן מתארות מצבים עם מספר לא קבוע של חלקיקים: $\langle\phi_0|\hat{\phi}(r)|\phi_0\rangle\neq0$.

ההסתברות למצוא n חלקיקים במצב $|\phi_0\rangle$ הינה

$$|\langle n|\phi_0\rangle|^2=\left|\langle n|e^{-\frac{|\phi_0|^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\phi_0^m}{m!}(a_0^+)^m|0\rangle\right|^2$$

$$=\left|\langle n|e^{-\frac{|\phi_0|^2}{2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\phi_0^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle\right|^2=e^{-|\phi_0|^2}\frac{|\phi_0|^{2n}}{n!}$$

כלומר הסתברות הניתנת ע"י התפלגות פואסון עם ממוצע $\bar{n}\equiv N_0=|\phi_0|^2=\frac{\mu V}{g}$ וסטיית תקן $\Delta N_0=\sqrt{N_0}$

מצבים אלה מתאימים לכן למערכת בה בממוצע מספר מאקרוסקופי של חלקיקים במצב היסוד החד-חלקיקי $(\vec{k}=0)$ עם פלוקטואציות במספר זה הקטנות באופן יחסי כמו $\frac{\Delta N_0}{N_0} \sim \frac{1}{\sqrt{N_0}}$. במלים אחרות, הם מתארים מערכת שעברה התעבות BE. שימו לב שעבור $\mu<0$ הפתרון היחיד הוא $\phi_0=0$, $\langle\phi_0|\hat{\Phi}(r)|\phi_0\rangle=0$ ובמערכת אין מספר מאקרוסקופי של חלקיקים ב $\vec{k}=0$. שימו לב שהמקרה $g=0$ (המקרה החופשי) הינו סינגולרי כך שמתקבלת בו התעבות BE עבור $\mu=0$ תוך שהיחס $\frac{\mu}{g}$ מקיים $\frac{N}{V}=\frac{\mu}{g}$.

המצבים הקוהרנטיים $|\phi_0\rangle$ אינם מצב היסוד האמיתי של המערכת הם קרובים אליו מאד בגבול התרמודינמי. נוכל לראות זאת אם נתבונן ב

$$\hat{H}-\mu\hat{N} = \int d^3r\left[\phi^+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\mu\right)\phi + \frac{g}{2}\phi^+\phi^+\phi\phi\right]$$

$$=\sum_k \xi_k a_k^+a_k + \frac{g}{2V}\sum_{k,k',q} a^+_{k+q}a^+_{k'}a_k a_{k'+q}$$

ונצמצם את המבט לחלק התלוי ב a_0 בלבד:

$$-\mu a_0^+a_0 + \frac{g}{2V}a_0^+a_0^+a_0a_0$$

נשתמש ב $N_0 \equiv a_0^+a_0 = a_0a_0^+ - 1$:

$$= -\left(\mu+\frac{g}{2V}\right)N_0 + \frac{g}{2V}N_0^2$$

קל לראות כי חלק זה מינימלי על ידי מצבים עם N_0 מוגדר וכי המינימום מתקבל עבור $N_0=\left[\frac{\mu+\frac{g}{2V}}{g/V}\right]=\frac{\mu V}{g}$ וערכה של האנרגיה במינימום הינו $-\frac{1}{2}\frac{\mu^2V}{g}-\frac{\mu}{2}$

כלומר המינימום מתקבל עבור מספר חלקיקים בקונדנסט השווה למספר החלקיקים הממוצע במצבים $|\phi_0\rangle$ והאנרגיה בו קטנה רק ב $\frac{\mu}{2}$ מהאנרגיה של המצבים הקוהרנטיים $-\frac{1}{2}\frac{\mu^2V}{g}$ המהווה את החלק המאקרוסקופי (אקסטנסיבי) של האנרגיה. כפי שנראה בהמשך פלוקטואציות של רכיבי תנע השונים מ $k=0$ מפחיתות את אנרגית מצב היסוד עוד יותר.

בגבול התרמודינמי המערכת בוחרת מצב אחד מתוך אוסף הפתרונות המנוונים בהתאם הבחירה. זוהי דוגמא לשבירה ספונטנית של סימטריה: למרות, כפי שראינו, שההמילטוניאן הוא בעל סימטרית $U(1)$ כלומר אינווריאנטי תחת טרנספורמציה $\phi\to\phi e^{i\theta}$ המצב שהמערכת בוחרת אינו אינווריאנטי תחת

טרנספורמציה זו מבין שיש לה משמעות מסוימת. כאמור קודם על משפט נתר שסימטריה $U(1)$ מובילה לקיומו של מטען שמור שהינו מספר החלקיקים במערכת. לאור זאת, אין זה מפתיע לגלות שהמצב ששובר סימטריה זו מתאר מערכת עם מספר חלקיקים שאינו קבוע. ניתן לראות זאת בדרך נוספת: אם נבצע את הטרנספורמציה הקאנונית מ-ϕ ו-ϕ^* ל-ρ ו-θ !

$$\phi(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})}\, e^{i\theta(\vec{r})}$$

יעקוביאן הטרנספורמציה הוא אחד כמתבקש מטרנספורמציה קאנונית (בדקו זאת) והפעולה הינה

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3r \left\{ i\rho \frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(\nabla\rho)^2}{4\rho} + \rho(\nabla\theta)^2\right] - \mu\rho + \frac{g}{2}\rho^2 \right\}$$

מהאיבר הראשון (הסימפלקטי) ברור כי ρ ו-θ צמודים קאנונית. לחילופין, מיחסי החילוף $[\hat\phi(r), \hat\phi^\dagger(r')] = \delta(r-r')$ קל לבדוק את יחסי החילוף של $\hat\rho(r) = \hat\phi^\dagger(r)\hat\phi(r)$:

$$[\hat\rho(r), \hat\rho(r')] = 0$$

$$[\hat\phi(r), \hat\rho(r')] = \delta(r-r')\,\hat\phi(r)$$

$$\sqrt{\hat\rho(r)}\, e^{i\hat\theta(r)} \hat\rho(r') - \hat\rho(r')\sqrt{\hat\rho(r)}\, e^{i\theta(r)} = \sqrt{\hat\rho(r)}\left[e^{i\hat\theta(r)}, \hat\rho(r')\right]$$

ולכן

$$\text{(1)} \quad \left[e^{i\hat\theta(r)}, \hat\rho(r')\right] = \delta(r-r')\, e^{i\hat\theta(r)}$$

כתוצאה מהצימוד הקאנוני בין ρ ו-θ קביעה של הפאזה θ מובילה לחוסר ודאות מוחלט בצפיפות ρ.

הערה: יחס החילוף (1) מתקבל אם נקח את יחס החילוף בין θ ו-ρ להיות $[\theta(r), \rho(r')] = -i\delta(r-r')$ כפי שניתן לבדוק בקלות תוך שימוש בנוסחת BH:

$$\left[e^{i\theta(r)}, \rho(r')\right] = \left[e^{i\theta(r)}\rho(r')e^{-i\theta(r)} - \rho(r')\right]e^{i\theta(r)}$$

$$= \left[\rho(r') + i[\theta(r), \rho(r')] - \rho(r')\right]e^{i\theta(r)} = \delta(r-r')\,e^{i\theta(r)}$$

אך הנו מולך לסתירה" הבאה: אם נחשב את אלמנט המטריצה של הקומוטטור $[\hat{\theta}(r),\hat{\rho}(r')]$ ביחס למצב עצמי של השדה $\hat{\rho}(r)$: $\hat{\rho}(r)|\rho\rangle=\rho(r)|\rho\rangle$ (ניתן לעשות זאת כי $\hat{\rho}$ בנקודות שונות חלופי) נקבל

$$\langle\rho|[\hat{\theta}(r),\hat{\rho}(r')]|\rho\rangle = \langle\rho|\hat{\theta}(r)\hat{\rho}(r')-\hat{\rho}(r')\hat{\theta}(r)|\rho\rangle = \rho(r)\langle\rho|\hat{\theta}(r)-\hat{\theta}(r)|\rho\rangle = 0$$

$$\parallel$$

$$\langle\rho|-i\delta(r-r')|\rho\rangle = -i\delta(r-r')$$

הבעיה קשורה לעובדה שאם שני אופרטורים צמודים הרמיטים $[\hat{X},\hat{Y}]=i$ ו-$\hat{Y}$ הינו בעל ספקטרום המורכב מהשלמים אזי $\hat{Y}$ הרמיטי רק על מצבים מחזוריים ב-X. לדוגמא, הזווית θ והתנע הזוויתי $L=-i\frac{\partial}{\partial\theta}$ מקיימים $[\hat{\theta},\hat{L}]=i$ ו-L בעל פונקציות עצמיות $\langle\theta|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}$ עם ערכים עצמיים $n\in\mathbb{Z}$. במקרה זה $\langle m|\hat{L}\hat{\theta}|n\rangle \neq m\langle m|\hat{\theta}|n\rangle$ במלים אחרות, L לא הרמיטי על המצב $\hat{\theta}|n\rangle$ שאינו מחזורי. חישוב בהצגה ישר יתן

$$\langle m|\hat{L}\hat{\theta}|n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\theta e^{in\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} -i\theta e^{i(n-m)\theta} + m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\,\theta e^{in\theta}\,d\theta = -i + m\langle m|\hat{\theta}|n\rangle$$

ולכן

$$\langle m|[\hat{\theta},\hat{L}]|n\rangle = \langle m|\hat{\theta}\hat{L}-\hat{L}\hat{\theta}|n\rangle = (n-m)\underbrace{\langle m|\hat{\theta}|n\rangle}_{\begin{cases}\frac{-i}{n-m} & n\neq m\\ \pi & n=m\end{cases}} + i = i$$

מסדר.

אצלנו האופרטור המקביל עבורו שאתה הינו אופרטור המספר $\hat{N}$ והוא אינו הרמיטי על מצבים מהצורה $\hat{\theta}|n\rangle$. לכן שימוש ב-$[\hat{\theta},\hat{N}]=-i$ צריך להעשות בזהירות וכל יותר להגביל עצמנו לאופרטורים מחזוריים מהצורה $e^{i\hat{\theta}}$

כדי להבין טוב יותר את תופעת השבירה הספונטנית של סימטריה נתבונן בפונקצית החלוקה של פרומגנט קלאסי בשדה מגנטי $\vec{B}$

$$H = -J\sum_{\langle ij\rangle}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j - \sum_i \vec{B}\cdot\vec{S}_i$$

כאשר $\vec{S}_i$ הוא הספין על האתר ה-i, נאמר על שריג קובי.

השדה המגנטי $\vec{B}$ שובר את הסימטריה הגלובלית לסיבוב אחיד של כל הספינים ויוצר כיוון מועדף במרחב.
ברור כי בגבול $\vec{B}\to 0$ התורה חוזרת להיות סימטרית תחת סיבובי ספין $\lim_{N\to\infty}\lim_{B\to 0} Z \to$ סימטרית תחת סיבובי ספין
כאשר $\lim_{N\to\infty}$ הינו הגבול התרמודינמי.
תאור אחר של מערכת שהנה כאמור אינווריאנטית תחת סיבובי ספין הינו $\lim_{B\to 0}\lim_{N\to\infty} Z$
הנקודה היא ששני סדרי הגבולות נותנים תוצאות שונות.
בגבול השני, לכל $\vec{B}$, המערכת בגבול $N\to\infty$ מתוארת על ידי מצב השובר את הסימטריה. לא משנה כמה קטן B התשלום האנרגטי הנדרש לסיבוב $N\to\infty$ ספינים נגד השדה גדול (אינסופי בגבול $N\to\infty$) ומצב היסוד הוא של מערכת בה כל הספינים מכוונים בכיוון השדה. כאשר, בצעד השני, נקטין את $\vec{B}\to 0$ המערכת תשאר על הכיוון המקורי שהוכתב על ידי השדה.

ניתן לשחזר את הסימטריה על ידי יצירת קומבינציה של המצבים המנוונים השוברים אותה. למשל במקרה שלנו נוכל ליצור מצב שיתאר קונדנסט בעל מספר קבוע של חלקיקים על ידי הסכום על המצבים הקוהרנטיים בעלי פאזה מוגדרת

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-iN_0\theta}|\theta\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-iN_0\theta} e^{-\frac{|\phi_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\phi_0|^n}{\sqrt{n!}} e^{in\theta}|n\rangle \propto |N_0\rangle$$

לשבירת הסימטריה הספונטנית קיימת תוצאה נוספת - ממשפט Goldstone אנו יודעים כי (בהעדר כוחות ארוכי טווח) שבירה ספונטנית של סימטריה גלובלית רציפה גוררת קיום של עירורים בוזוניים בעלי אנרגיה השואפת לאפס בגבול של אורכי גל ארוכים $k\to 0$: Goldstone modes. אלו הן פלוקטואציות מהמצב ששובר את הסימטריה למצבים אחרים השוברים את הסימטריה בצורה דומה לאורך תחתית הבור. עובדת קיומם של עירורים אלה gapless גורמת לכך שהם ממלאים תפקיד מרכזי בקביעת הפיסיקה של המערכת באנרגיות נמוכות - מכיוון שהם אלו הנוצרים לרוב בתחום זה. נפנה כעת לחשוב ה Goldstone mode בבעיה שלנו ובהמשך השלכתו על קיומה ושבירתה של תופעת העל-נוזלות.

נניח כי המערכת בחרה את המצב $\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ כלומר עם $\theta=0$ ונפתח את השדה סביב קונפיגורציה זו:

$$\phi(r,\tau) = \sqrt{\rho_0 + \delta\rho(r,\tau)}\, e^{i\theta(r,\tau)}$$

: $\rho_0 = |\phi_0|^2 = \frac{\mu}{g}$

נפתח את הפעולה עד לסדר שני ב-θ ו-$\delta\rho$:

$$S = S_0 + \int_0^\beta d\tau \int d^3r \left\{ i\delta\rho \frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(\nabla\delta\rho)^2}{4\rho_0} + \rho_0(\nabla\theta)^2\right] + \frac{g}{2}\delta\rho^2 \right\}$$

כאשר S_0 היא קבוע התלוי ב-ρ_0 בלבד.

נפתח בטורי פורייה:

$$\theta(\vec{r},\tau) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\omega_n} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n\tau)}\,\theta(\vec{k},\omega_n)$$

ובאופן דומה את $\delta\rho$.

מממשיות θ ו-$\delta\rho$ נובע שרק חצי מרכיבי הפורייה הם משתני אינטגרציה בלתי תלויים כי:

$$\theta(\vec{k},\omega_n) = \theta^*(-\vec{k},-\omega_n)$$
$$\delta\rho(\vec{k},\omega_n) = \delta\rho^*(-\vec{k},-\omega_n)$$

נבחר את המשתנים הבלתי תלויים להיות $\theta(k_x>0,k_y,k_z,\omega_n)$ וכנ"ל עבור $\delta\rho$.

$$S = S_0 + 2\beta \sum_{\substack{\vec{k},\omega_n \\ k_x>0}} \left(\delta\rho^*(\vec{k},\omega_n),\ \theta^*(\vec{k},\omega_n)\right) \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2k^2}{8m\rho_0}+\frac{g}{2} & \frac{\omega_n}{2} \\ -\frac{\omega_n}{2} & \frac{\rho_0\hbar^2k^2}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\rho(\vec{k},\omega_n) \\ \theta(\vec{k},\omega_n) \end{pmatrix}$$

נשתמש בתוצאה שהוכחנו בתרגול: עבור n משתנים מרוכבים Z_i, ושני פרמטרים מרוכבים k_i, J_i ומטריצה הרמיטית חיובית H מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{dz_j^*\,dz_j}{2\pi i}\, e^{-\sum_{i,j} Z_i^* H_{ij} Z_j + \sum_i (k_i^* Z_i + J_i Z_i^*)} = (\det H)^{-1} e^{\sum_{i,j} k_i^* (H^{-1})_{ij} J_j} \qquad (1)$$

$$\Leftarrow \quad Z \propto \prod_{\substack{\vec{k} \\ k_x>0}} \prod_{\omega_n} \det{}^{-1}\left[\frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2k^2}{8m\rho_0}+\frac{g}{2} & \frac{\omega_n}{2} \\ -\frac{\omega_n}{2} & \rho_0\frac{\hbar^2k^2}{2m} \end{pmatrix}\right] = \prod_{\substack{\vec{k} \\ k_x>0}} \prod_{\omega_n} \frac{1}{\beta^2(\omega_n^2+\epsilon^2(k))} = \prod_{\vec{k}} \prod_{\omega_n} \frac{1}{\beta(-i\omega_n+\epsilon(k))}$$

כאשר

$$\epsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} + 2g\rho_0\right)}$$

מהשוואת התוצאה שקיבלנו ל-Z עם התוצאה שמתקבלת עבור בוזונים חופשיים ברור כי הגז מתנהג כמו גז של בוזונים חופשיים עם דיספרסיה (אנרגיה) $\xi_k = \epsilon(k)$

אלו הם ה gapless Goldstone modes הנובעים משבירה הספונטנית של הסימטריה.

יחס הדיספרסיה של העירורים ניתן לכתוב באופן $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k}{2m}\sqrt{k^2+k_0^2}$, $k_0 = \frac{2}{\hbar}\sqrt{mg\rho_0}$

הוא ליניארי (פונוני) עבור $k<k_0$: $\epsilon(k) \simeq \frac{\hbar^2 k_0}{2m}\cdot k = \hbar c_s k$, $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$

וריבועי (כמו חלקיק חופשי) עבור $k>k_0$: $\epsilon(k) \simeq \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Bogoliubov הוא הראשון שגילה יחס דיספרסיה זה, שכפי שנראה מוביל לתופעת העל-נוזלות.

נזכיר כי קיבלנו ענף אחד gapless של עירורי Goldstone. עובדה זו נובעת מכך שהתורה אותה אנו מתארים אינה יחסותית וכפי שראינו θ ו-$\delta\rho$ צמודים קאנונית. כתוצאה מכך עירורי הפאזה והאמפליטודה קשורים זה לזה ושניהם gapless. בתורה יחסותית האיבר הסימפלקטי בלגרנז'יאן $\phi^*\partial_\tau\phi$ מוחלף ב $\phi^*\partial_\tau^2\phi$ (כדי לקבל יחס עם האיבר הקינטי בהמילטוניאן אשר קווריאנטי $|\partial_\mu\phi|^2$). כאשר נפתח איבר זה סביב המצב עם ρ_0 קבוע נקבל $\frac{(\partial_\tau\delta\rho)^2}{4\rho_0}+\rho_0(\partial_\tau\theta)^2$. לכן, בתורה יחסותית θ צמוד קאנונית ל $\partial_\tau\theta$ ו-$\delta\rho$ ל $\partial_\tau\delta\rho$. פלוקטואציות הפאזה נשארות gapless אך פלוקטואציות האמפליטודה הופכות ל gapped.

הטיפול שלנו בבעיה מתבסס על ההנחה שהמערכת שוברת באופן ספונטני את סימטריית $U(1)$ ובוחרת מצב עם פאזה θ מסוימת. האם הנחה זו מוצדקת? כדי לענות על השאלה נהיה מעוניינים לחשב את פונקציית הקורלציה $K(\vec r-\vec r') = \langle e^{i\theta(\vec r,\tau)}e^{-i\theta(\vec r',\tau)}\rangle$. אם הסימטריה אכן נשברת נצפה לקיום של <u>סדר ארוך טווח</u> (<u>long-range order</u>) במובן ש $K(\vec r-\vec r') \xrightarrow[|\vec r-\vec r'|\to\infty]{} const \neq 0$

מתוך הדרך בה הגענו לביטוי עבור Z כאינטגרל מסלול קל לראות כי פונקציית קורלציה נוחה לחישוב באופן זה היא כזו שבה האופרטורים בהן מסודרים לפי הזמן (time ordered). נתבונן לדוגמא ב

$$G(\vec r,\tau;\vec r',\tau') \equiv \frac{1}{Z}\,\mathrm{Tr}\langle e^{-\beta(\hat H-\mu\hat N)}\,T_\tau\left[\hat\phi(\vec r,\tau)\hat\phi^+(\vec r',\tau')\right]\rangle$$

שים לב כי המיצוע הוא גם על הדינמיקה הקוונטית (דרך ערך התצפית של האופרטורים ביחס למצב הקוונטי)

וגם על פלוקטואציות תרמיות (דרך המיצוע הבולצמני של המצבים הקוונטיים ביחס אליהם מחושב ערך התצפית).
האופרטורים נתונים בהצגת הייזנברג והתפתחותם בזמן מדומה מוגדרת בעזרת

$$\hat{A}(\tau) = e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,\hat{A}(0)\,e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}$$

נקבל לכן:

$$G(\vec{r},\tau;\vec{r}'\tau') \overset{\tau>\tau' \text{ עבור}}{=} \frac{1}{Z}\,\mathrm{Tr}\left\langle e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,\hat{\phi}(\vec{r})\,e^{-(\tau-\tau')(\hat{H}-\mu\hat{N})}\,\hat{\phi}^{+}(\vec{r}')\,e^{-\tau'(\hat{H}-\mu\hat{N})}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\,\mathrm{Tr}\left\langle e^{-\int_{\tau}^{\beta}\hat{H}-\mu\hat{N}}\,\hat{\phi}(\vec{r})\,e^{-\int_{\tau'}^{\tau}\hat{H}-\mu\hat{N}}\,\hat{\phi}^{+}(\vec{r}')\,e^{-\int_{0}^{\tau'}\hat{H}-\mu\hat{N}}\right\rangle$$

נוכל כעת לפרק כל קטע זמן מדומה המופיע באקספוננט לחלקים קטנים ולהציג את אופרטור השדה במונחי מצבים קוהרנטיים בין פרוסות הזמן השונות. התוצאה דומה מאוד למה שקיבלנו עבור פונקצית החלוקה כשההבדל נעוץ באלמנט המטריצה של $\hat{\phi}^{+}(\vec{r}')$ בין המצב הקוהרנטי בפרוסת הזמן τ' ו $\tau'+\epsilon$ ואלמנט המטריצה של $\hat{\phi}(\vec{r})$ בין המצב הקוהרנטי בפרוסת הזמן τ ו $\tau+\epsilon$. נקבל לכן

$$G(\vec{r},\tau;\vec{r}'\tau') = \frac{1}{Z}\int D\phi^{*}D\phi\;\phi(\vec{r},\tau)\,\phi^{*}(\vec{r}'\tau')\,e^{-S}$$

כאשר S היא אותה פעולה בה השתמשנו לחישוב Z.
נשתמש בהצגה זו לחישוב $K(\vec{r}-\vec{r}')$ אותה נגדיר כ

$$K(\vec{r}-\vec{r}') = \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{Z}\left\langle T_{\tau}\,e^{i\hat{\theta}(\vec{r},\tau+\delta)}\,e^{-i\hat{\theta}(\vec{r}',\tau)}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\int D\theta D\delta\rho\; e^{\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}\omega_n} e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n(\tau+\delta)]}\theta(\vec{k},\omega_n)}\; e^{-\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}\omega_n} e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}'-\omega_n\tau]}\theta(\vec{k}\omega_n)}\; e^{-S}$$

$$= \frac{1}{Z}\int D\theta D\delta\rho\; e^{\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\substack{\vec{k}\omega_n\\ k_x>0}}\left\{\left[e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n(\tau+\delta)]}-e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}'-\omega_n\tau]}\right]\theta(\vec{k},\omega_n)+\left[e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n(\tau+\delta)]}-e^{-i[\vec{k}\cdot\vec{r}'-\omega_n\tau]}\right]\theta^{*}(\vec{k},\omega_n)\right\}}\times e^{-S}$$

נשתמש בתוצאה (1) לחישוב האינטגרלים על θ ו $\delta\rho$ כשנשים לב שהמטריצה ההפוכה למטריצה המגדירה את התבנית הריבועית ב S הינה

$$\left[\beta\begin{pmatrix}\frac{\hbar^2k^2}{8m\rho_0}+\frac{g}{2} & \frac{\omega_n}{2}\\ -\frac{\omega_n}{2} & \frac{\rho_0\hbar^2k^2}{2m}\end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{4}{\beta(\omega_n^2+\epsilon^2(k))}\begin{pmatrix}\frac{\rho_0\hbar^2k^2}{2m} & -\frac{\omega_n}{2}\\ \frac{\omega_n}{2} & \frac{\hbar^2k^2}{8m\rho_0}+\frac{g}{2}\end{pmatrix}$$

נשים לב כי הדטרמיננטה המופיעה
בתוצאה (1) מתבטלת לאחר אינטגרציה על φ וθ במונה ובמכנה ואנו נשארים עם

$$K(\vec{r}-\vec{r}') = \exp\left\{ \frac{1}{\beta V} \sum_{\substack{\vec{k} \\ k_x>0}} \sum_{\omega_n} \left[e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')+i\omega_n\delta} - 1 \right] \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2mP_0} + 2g}{\omega_n^2 + \epsilon^2(k)} + \text{H.c.} \right\}$$

את הסכום על ω_n נחשב בעזרת הטכניקה שלמדנו עם

$$h(\omega_n) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{i\omega_n\delta}}{\omega_n^2+\epsilon^2(k)} = -\frac{1}{\beta} \frac{e^{i\omega_n\delta}}{2\epsilon(k)} \left[\frac{1}{i\omega_n - \epsilon(k)} - \frac{1}{i\omega_n+\epsilon(k)} \right]$$

$$K(\vec{r}-\vec{r}') = \exp\left\{ \frac{1}{V} \sum_{\substack{\vec{k} \\ k_x>0}} \left[e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} - 1 \right] \frac{1}{2\epsilon(k)} \left[\frac{1}{e^{\beta\epsilon(k)}-1} - \frac{1}{e^{-\beta\epsilon(k)}-1} \right] \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2mP_0} + 2g \right] + \text{H.c} \right\} \Leftarrow$$

בגבול $T \to 0$ הסוגריים המרובעים באקספוננט הופכים ל 1 ואנו נשאר עבור מערכת d מימדית

$$\int_{k_x>0} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\epsilon(k)} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2mP_0} + 2g \right] \left[e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} - 1 \right] + \text{H.c.}$$

אנו מתעניינים בהתנהגות עבור $|\vec{r}-\vec{r}'|$ גדול. בגלל הפקטור האוסצילטורי התרומה העיקרית לאינטגרל באה מאזור ה k הקטנים עבורם $\epsilon(k) = \hbar c_s |k|$

כשמגבילים את האינטגרציה בעזרת הפקטור האקספוננציאלי לתחום $k<k_0$ בו הדיספרסיה ליניארית.

$$\simeq \int_{k_x>0} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{-k/k_0} \frac{g}{\hbar c_s} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} - 1}{|k|} + \text{H.c.}$$

ב $d=1$ נקבל

$$= \frac{g}{2\pi\hbar c_s} \int_0^\infty dk\, e^{-k/k_0} \frac{e^{ik(x-x')} - 1}{k} + \text{H.c.}$$

$$= \frac{g}{2\pi\hbar c_s} \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty \frac{[i(x-x')]^n}{n!} k^{n-1} e^{-k/k_0} + \text{H.c}$$

$$= \frac{g}{2\pi\hbar c_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[ik_0(x-x')]^n}{n} + H.c$$

$$= -\frac{g}{2\pi\hbar c_s} \ln\left[1-ik_0(x-x')\right] + H.c$$

ובתוצאה מכך K דועכת כחוק חזקה הרחק באינטראקציות:

$$K(x-x') \simeq \left[1+k_0^2(x-x')^2\right]^{-\frac{g}{2\pi\hbar c_s}}$$

קיבלנו לכן שההנחה שהמערכת שוברת את הסימטריה באופן ספונטני ב $T=0$ אינה תקפה ב $d=1$ ($K \xrightarrow{|x-x'|\to\infty} 0$). אני משאיר לכם לבדוק שב $d\geq 2$ $K \xrightarrow{|\vec{r}-\vec{r}'|\to\infty} const$, ב $T=0$, ולכן הסימטריה יכולה להישבר.

ב $T\neq 0$ התרומה העיקרית לאינטגרל עבור $|\vec{r}-\vec{r}'|$ גדול, עדיין באה מ k קטנים אך עתה נוכל לקרב $\frac{1}{e^{\beta\epsilon(k)}-1}-\frac{1}{e^{-\beta\epsilon(k)}-1} \approx \frac{2}{\beta\hbar c_s|k|}$ כל עוד $|k|<\frac{1}{\beta\hbar c_s}$. במקרה זה נקבל שהאקספוננט המגדיר את K הינו

$$\simeq \int_{k\approx 0} \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{2g}{(\hbar c_s)^2\beta} e^{-\beta\hbar c_s|k|} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}-1}{k^2} + H.c.$$

אינטגרל זה מתבדר עבור $d=1,2$ בגבול $|\vec{r}-\vec{r}'|\to\infty$ לערך שלילי אינסופי הגורם ל $K \xrightarrow{|\vec{r}-\vec{r}'|\to\infty} 0$.
לכן הסימטריה לא נשברת באופן ספונטני ב $T>0$ עבור $d=1,2$.

התוצאות שקיבלנו הינן ביטוי למשפט Mermin-Wagner: סימטריה רציפה גלובלית אינה יכולה להישבר באופן ספונטני ב $T=0$ במערכות בעלות מימד $d\leq 1$ ובטמפרטורה סופית במערכות $d\leq 2$ ממדית. הסיבה לכך היא שה gapless Goldstone modes, שהינן תוצאה בלתי נמנעת של שבירה ספונטנית של סימטריה רציפה (בהעדר כוחות ארוכי טווח), מאפשרות פלוקטואציות סביב המצב ששובר את הסימטריה באופן שמשחזר את הסימטריה ב $T=0$ ו $d\leq 1$ (כתוצאה מפלוקטואציות קוונטיות) וב $T>0$, $d\leq 2$ (כתוצאה מפלוקטואציות תרמיות).

ספקטרום העירורים הלינארי חשוב מכיוון שהוא הסיבה לתופעת העל-נוזליות, בהתאם להסבר הבא שניתן לנדאו. נתבונן בנפח נוזל מאקרוסקופי בעל מסה M הזורם בצינור במהירות $\vec{V}$ ביחס לדפנות הצינור. במערכת המעבדה לנוזל תנע $\vec{P}_i = M\vec{V}$ ואנרגיה $E_i = \frac{P_i^2}{2M} + E_0$ כאשר E_0 היא האנרגיה כתוצאה מאינטראקציות בין חלקיקי הנוזל. נעבור כעת לבחון את המצב במערכת הזאת הנעה עם הנוזל בה התנע שלו מתאפס והאנרגיה שלו E_0. במערכת זו דפנות הצינור זזות והנוזל נייח ביחס אליו במהירות $-\vec{V}$. נניח כעת כי כתוצאה מכוחות חיכוך בין הדפנות והנוזל, נוצר עירור בעל תנע $\vec{P}$ ואנרגיה $\epsilon(\vec{P})$. כעת במערכת הנעה במהירות הנוזל המקורית יש לו תנע $\vec{P}$ ואנרגיה $E_0 + \epsilon(\vec{P})$ ולכן במערכת המעבדה תנע $\vec{P}_f = \vec{P}_i + \vec{P}$ ואנרגיה $E_f = \frac{P_f^2}{2M} + E_0 + \epsilon(\vec{P})$.
אנו מניחים כי אנרגיה לא יכולה לעבור בין הנוזל ודפנות הצינור ולכן $E_i = E_f$

$$\Leftarrow \qquad \frac{2\vec{P}_i\cdot\vec{P} + P^2}{2M} + \epsilon(P) = 0$$

תנע העירור האלמנטרי זניח לעומת התנע המאקרוסקופי של הנוזל ולכן נזניח את האיבר $\frac{P^2}{2M}$ ונקבל את התנאי

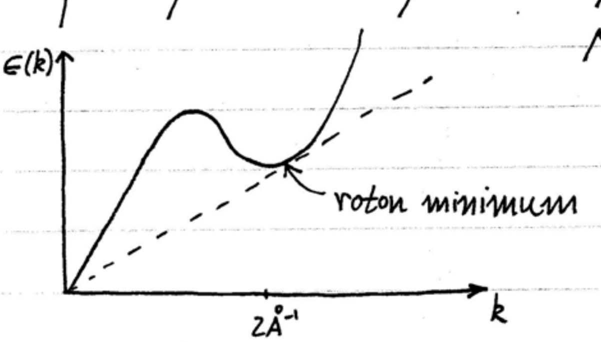
$$\epsilon(P) = -\vec{V}\cdot\vec{P} \qquad (1)$$

אם $\epsilon(P) = cP$ ומכיוון ש $|-\vec{V}\cdot\vec{P}| \leq VP$ נקבל את התנאי הבא לכך שעירור מהצורה שתיארנו יוכל להתרחש:

$$V \geq c$$

מהירות הקול של העירורים קובעת לכן מהירות קריטית שרק מעליה אנרגיה קינטית של הנוזל יכולה להיות מומרת לאנרגיה של עירורים אלמנטריים שלו ובעקבות כך הנוזל מאט. מכיוון שגילינו ש $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$ נגיע למסקנה כי בגז הבוזוני החופשי בו מתחת ל T_c $\mu = 0$ ולכן $C_s = 0$ והמערכת אינה על-נוזלית למרות שעברה התעבות BE. הסיבה לכך היא שספקטרום העירורים בגז החופשי הינו ריבועי ולכן התנאי (1) תמיד יתקיים עבור P קטן דיו. אנו רואים לכן שהאינטראקציות ממלאות תפקיד מכריע ביצירת תופעת העל-נוזליות

ב ^4He נמצא ספקטרום העירורים מסובך מזה שצופה המודל הפשוט שפתרנו. עבור k נמוך הוא אכן ליניארי, אך בוקטורי-גל ארוכים יותר הוא מפתח מינימום לו אחראים הכוחות המורכבים יותר בין אטומי ההליום במערכת הפיזיקלית. העירורים בסביבת המינימום נקראים רוטונים (rotons). מהדיון שערכנו נובע שהמהירות הקריטית היא המהירות המינימלית V המקיימת $Vk=\epsilon(k)$. היא נקבעת לכן ע"י המשיק לעקומת $\epsilon(k)$ בעל השיפוע הקטן ביותר. במערכת הפיזיקלית



המשיק הזה הוא עם הנגזרת במינימום הרוטון ולכן הרוטונים הם אלה הקובעים (לפחות עקרונית) את המהירות הקריטית. למרות זאת הערכת המהירות הקריטית מתוך רוטונים עדיין מספקת ערך הגבוה באופן משמעותי מהמהירות הקריטית הנמדדת בניסויים. הסיבה לכך היא שבמציאות העל-נוזליות מתחילה להרס כתוצאה מיצירת עירורים מסוג אחר בו לא דנו עד כה ושתפגשו בתרגיל הבית. אלו הם קווי מערבולת (vortices) המתחילים להופיע על פני הנוזל וקרוב לדפנות הצינור.

לסיום, נשוב לבחון את הבעיה אך הפעם מנקודת המבט של ההמילטוניאן של המערכת

$$\hat{H}-\mu\hat{N}=\sum_{\vec{k}}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}}+\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4}a^+_{\vec{k}_1}a^+_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_3}a_{\vec{k}_4}\,\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}$$

ראינו כי במערכת שעברה התעבות BE קיים מספר מאקרוסקופי של בוזונים במצב $\vec{k}=0$: $\langle\hat{N}_0\rangle=\langle\hat{a}_0^+\hat{a}_0\rangle=\frac{\mu V}{g}$ וכי $\langle a_0\rangle=\langle a_0^+\rangle=\sqrt{\frac{\mu V}{g}}$. במצב כזה הקומוטטור $a_0a^+-a_0^+a_0=1$ קטן יחסית לערך הממוצע של a_0 ו- a_0^+ והקירוב טוב אם נחליף את האופרטורים של a_0 ו- a_0^+, כלומר לטפל בהם כ-c-numbers שהם ערכי התצפית שלהם. תחת קירוב זה נקבל את ההמילטוניאן האפקטיבי עבור $a_{\vec{k}\neq0}$

$$H=\sum_{\vec{k}\neq0}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}}+\frac{g}{2V}\cdot\frac{\mu V}{g}\sum_{\vec{k}\neq0}\left[a^+_{\vec{k}}a^+_{-\vec{k}}+a_{-\vec{k}}a_{\vec{k}}+4a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}}\right]+\text{איברים עם } 4 \text{ ו-} 3\ a^+_{k},a_{k}$$

כשלא רשמנו את האנרגיה הנובעת מהחלק התלוי רק ב a_0 ו a_0^+ אלא כבר פתרנו. שימו לב כי האיברים שלא שמרנו פרופורציונים ל $\left(\frac{g}{V}\right)^2$ ו $\frac{g}{V}$ (עבור איברים עם 3 ו 4 a_k בהתאמה) ולכן נזניח בגבול $g\to 0$ ביחס לסכום האיברים ששמרנו (הפקטורים $\frac{1}{\sqrt{V}}$ ו $\frac{1}{V}$ מפוצים ע"י מספר האיברים הגדול יותר בסכומים שלא שמרנו). שימו לב כי ההמילטוניאן שקיבלנו אינו משמר את מספר החלקיקים: ביטוי לעובדה שהמצב שבחרנו פתרון אשר שובר את סימטרית הפאזה $U(1)$.

Bogoliubov מצא דרך ללכסן את ההמילטוניאן דרך טרנספורמציה הקרויה על שמו. מכיון שגם $a_{\vec{k}}$ וגם $a^+_{-\vec{k}}$ משנים את תנע המערכת ב $-\vec{k}$ ומכיון שמספר החלקיקים אינו נשמר הגיוני ננסה לערבב אותם לקבל אופרטורים חדשים המשנים את המערכת ב $-\vec{k}$. נדרש שהטרנספורמציה תהיה קנונית כלומר שהאופרטורים החדשים $b_{\vec{k}}$ ו $b^+_{-\vec{k}}$ יקיימו אותם יחסי חילוף כמו ה-a-ים. קל לראות כי טרנספורמציה כזו היא מהצורה

$$b_{\vec{k}} = \cosh\eta_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} + \sinh\eta_{\vec{k}}\, a^+_{-\vec{k}}$$

$$b^+_{-\vec{k}} = \sinh\eta_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}} + \cosh\eta_{\vec{k}}\, a^+_{-\vec{k}}$$

כאשר $\eta_{\vec{k}}=\eta_{-\vec{k}}$ ממשי. קל לבדוק שהטרנספורמציה קנונית

$$[b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}'}] = \cosh\eta_{\vec{k}}\cosh\eta_{\vec{k}'}[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] + \cosh\eta_{\vec{k}}\sinh\eta_{\vec{k}'}[a_{\vec{k}}, a^+_{-\vec{k}'}]$$

$$+\sinh\eta_{\vec{k}}\cosh\eta_{\vec{k}'}[a^+_{-\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] + \sinh\eta_{\vec{k}}\sinh\eta_{\vec{k}'}[a^+_{-\vec{k}}, a^+_{-\vec{k}'}]$$

$$= \cosh\eta_{\vec{k}}\sinh\eta_{\vec{k}'}\,\delta_{\vec{k},-\vec{k}'} - \sinh\eta_{\vec{k}}\cosh\eta_{\vec{k}'}\,\delta_{\vec{k},-\vec{k}'} = 0$$

$$[b_{\vec{k}}, b^{+}_{\vec{k}'}] = \cosh\eta_{\vec{k}} \sinh\eta_{-\vec{k}'} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] + \cosh\eta_{\vec{k}} \cosh\eta_{-\vec{k}'} [a_{\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}]$$

$$+ \sinh\eta_{\vec{k}} \sinh\eta_{-\vec{k}'} [a^{+}_{-\vec{k}}, a_{-\vec{k}'}] + \cosh\eta_{\vec{k}} \cosh\eta_{-\vec{k}'} [a^{+}_{-\vec{k}}, a^{+}_{\vec{k}'}]$$

$$= \cosh\eta_{\vec{k}} \cosh\eta_{-\vec{k}'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'} - \sinh\eta_{\vec{k}} \sinh\eta_{-\vec{k}'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

$$= \left[\cosh^2\eta_{\vec{k}} - \sinh^2\eta_{k}\right] \delta_{\vec{k},\vec{k}'} = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

הטרנספורמציה ההפוכה הנה

$$a_{\vec{k}} = \cosh\eta_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}} - \sinh\eta_{\vec{k}}\, b^{+}_{-\vec{k}}$$

$$a^{+}_{-\vec{k}} = -\sinh\eta_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}} + \cosh\eta_{\vec{k}}\, b^{+}_{-\vec{k}}$$

נכתוב כעת את ההמילטוניאן במונחי ה b-ים לצורך כך אנו זקוקים ל

$$a^{+}_{k} a_{k} = \cosh^2\eta_k\, b^{+}_{k} b_{k} + \sinh^2\eta_k\, b_{-k} b^{+}_{-k} - \sinh\eta_k \cosh\eta_k \left(b^{+}_{k} b^{+}_{-k} + b_{-k} b_{k}\right)$$

$$a^{+}_{k} a^{+}_{-k} = -\sinh\eta_k \cosh\eta_k \left(b^{+}_{k} b_{k} + b_{-k} b^{+}_{-k}\right) + \cosh^2\eta_k\, b^{+}_{k} b^{+}_{-k} + \sinh^2\eta_k\, b_{-k} b_{k}$$

$$\Leftarrow \quad H = \sum_{\vec{k}\neq 0} \Bigg\{ \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu\right) \cosh^2\eta_k - \frac{\mu}{2} \sinh 2\eta_k\right] b^{+}_{k} b_{k} + \left[\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu\right) \sinh^2\eta_k - \frac{\mu}{2} \sinh 2\eta_k\right] b_{k} b^{+}_{k}$$

$$- \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu\right) \sinh 2\eta_k - \frac{\mu}{2} \cosh 2\eta_k\right] \left(b^{+}_{k} b^{+}_{-k} + b_{-k} b_{k}\right) \Bigg\}$$

כדי לאפס את האיבר האחרון נבחר

$$\tanh 2\eta_k = \frac{\mu}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu}$$

$$\Leftarrow \quad \sinh 2\eta_k = \frac{\mu}{\epsilon(k)} \quad , \quad \cosh 2\eta_k = \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\mu}{\epsilon(k)}$$

כאשר

$$\epsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+2\mu\right)}$$

הינו יחס הדיספרסיה שקיבלנו מה saddle-point analysis

$$\Leftarrow \quad H=\sum_{\vec{k}\neq0}\left[\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\mu\right)\cosh 2\eta_k - \mu\sinh 2\eta_k\right]b_k^+b_k + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\neq0}\left[\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\mu\right)(\cosh 2\eta_k - 1) - \mu\sinh 2\eta_k\right]$$

$$=\sum_{\vec{k}\neq0}\epsilon(k)\, b_k^+b_k + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\neq0}\left[\epsilon(k)-\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\mu\right)\right]$$

מצב היסוד של המילטוניאן זה הוא המצב שנהרס על ידי כל ה b_k. המצבים המעוררים נוצרים על ידי ה b_k^+ עם יחס הדיספרסיה $\epsilon(k)$, כפי שגילינו קודם לכן בעזרת אינטגרל המסלול. האיבר השני הינו קבוע שלילי ($\epsilon(k)<\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\mu$ כפי שניתן לאשר בקלות על ידי העלאת משוואה זו בריבוע) ונובע מה zero-point fluctuations סביב $|\phi_0\rangle$.

כיצד נראה מצב היסוד של המערכת? לצורך כך נשתמש ב

$$b_k = U_k a_k U_k^+$$

כאשר

$$U_k = e^{[a_k a_{-k} - a_k^+ a_{-k}^+]\eta_k} \equiv e^{A_k}$$

קל להראות בעזרת שימוש בנוסחת BH:

$$U_k a_k U_k^+ = a_k + [A_k, a_k] + \frac{1}{2!}[A_k[A_k, a_k]] + \cdots$$

$$= a_k + \eta_k a_{-k}^+ + \frac{1}{2!}\eta_k^2 a_k + \frac{1}{3!}\eta_k^3 a_{-k}^+ + \cdots = \cosh\eta_k a_k + \sinh\eta_k a_{-k}^+ = b_k$$

אנו יודעים כי $|\phi_0\rangle$ הינו מצב היסוד ביחס ל a_0 (זהו מצב קוהרנטי של a_0 עם אנרגיה $-\frac{1}{2}\mu^2\frac{V}{g}$).
<u>טענה:</u> מצב היסוד של המערכת הינו $|gs\rangle=\prod_{k\neq0}U_k|\phi_0\rangle$. כדי להוכיח הטענה עלינו להראות כי כל $b_{k\neq0}$ הורס מצב זה. [illegible]:

מכיון שלכל $k\neq 0$ $a_k|\phi_0\rangle=0$ (כי זהו מצב קוהרנטי של a_0) נקבל

$$0=a_k|\phi_0\rangle = U_k^{+}U_k\,a_k\,U_k^{+}U_k|\phi_0\rangle = U_k^{+}b_k U_k|\phi_0\rangle \Rightarrow b_k U_k|\phi_0\rangle = 0$$

לסיום, נחשב את החלק היחסי של החלקיקים הנמצאים מחוץ לקונדנסט במצב היסוד:

$$\frac{N-N_0}{N} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}\neq 0}\langle gs|a_{\vec{k}}^{+}a_k|gs\rangle$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}\neq 0}\langle gs|\left[\cosh\eta_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}}^{+} - \sinh\eta_{\vec{k}}\, b_{-\vec{k}}\right]\left[\cosh\eta_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}} - \sinh\eta_{\vec{k}}\, b_{-\vec{k}}^{+}\right]|gs\rangle$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}\neq 0}\sinh^2\eta_{\vec{k}}$$

$$= \frac{1}{\rho}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sinh^2\eta_{\vec{k}} \qquad :\rho=\frac{N}{V}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{1}{(2\pi)^3}4\pi\int_0^\infty dk\,k^2\,\frac{\cosh 2\eta_k - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2\left[\frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2+\frac{k_0^2}{2}\right)}{\frac{\hbar^2}{2m}k\sqrt{k^2+k_0^2}}-1\right] \qquad k_0=\frac{2}{\hbar}\sqrt{m\mu}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\,\frac{k^2}{2}\left[\frac{k}{\sqrt{k^2+k_0^2}}+\frac{\sqrt{k^2+k_0^2}}{k}-2\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi^2\rho}\left.k^2\sqrt{k^2+k_0^2}-\frac{2}{3}(k^2+k_0^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(k^2+k_0^2)^{3/2}-\frac{2}{3}k^3\right|_0^\infty$$

$$= \frac{k_0^3}{24\pi^2\rho}$$

כלומר, בערך חלקיק אחד בכל נפח אלמנטרי $\xi^3 \simeq \left(\frac{2\pi}{k_0}\right)^3$ נמצא מחוץ לקונדנסט.

שימו לב כי בגבול הגזוני האידאלי $\mu=0$ מתקבל ב-T_c $k_0\to 0$ וה-ξ ה-"coherence length" מתבדר.