כעת משפיתחנו הפורמליזם הקוונטי לתאר מערכות רבות חלקיקים נרצה להשתמש בו כדי לחקור מספר תכונות של מערכות כאלה. נבחן בפרט מערכות בוזוניות בעלות אינטראקציה בין החלקיקים. באפשרותנו לרשום את ההמילטוניאן בשפת הקוונטיזציה השניה ולנסות לפתור. נעשה זאת בהמשך, אך כעת ברצוני להציג ניסוח שקול של הבעיה בעזרת אינטגרלי מסלול. בכך נשיג שתי מטרות: א. נגלה דרך נוספת לקוונטיזציה של הבעיה הקלאסית שאינה דורשת ניסוח המילטוניאני של הבעיה ; ב. נלמד על דרך מקורבת לניתוח המערכת המופיעה באופן טבעי בניסוח זה. לצורך פיתוח הדרך הזאת נזדקק ל:

מצבים קוהרנטיים בוזוניים (bosonic coherent states)

עד כה פרשנו את מרחב Fock על ידי בסיס מצבי האכלוס $|n_1, n_2 \cdots\rangle$. בסיס אחר, שימושי ביותר, הינו בסיס המצבים הקוהרנטיים האנלוגי לבסיס מצבי המקום במכניקה קוונטית. כפי שנראה זהו בסיס שאינו אורתונורמלי. המצבים הקוהרנטיים מוגדרים כמצבים העצמיים של אופרטורי ההשמדה a_i. מכיוון שהללו מתחלפים במקרה הבוזוני, ניתן למצוא מצבים עצמיים סימולטניים לכולם:

$$a_i|\phi\rangle = \phi_i|\phi\rangle$$

כאשר הערכים העצמיים $\{\phi_i\}$ מספרים מרוכבים

$$|\phi\rangle = e^{\sum_i \phi_i a_i^+}|0\rangle$$

נבדוק כי המצבים הקוהרנטיים נתונים על ידי

נשתמש בכך: $[a_i,a_j^+]=\delta_{ij},\ [a_i^+,a_j^+]=0$:

$$a_i|\phi\rangle = e^{\sum_{j=1}^{i-1}\phi_j a_j^+}\, a_i\, e^{\phi_i a_i^+}\, e^{\sum_{j=i+1}^{\infty}\phi_j a_j^+}|0\rangle$$

$$= e^{\sum_{j=1}^{i-1}\phi_j a_j^+}\, a_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_i^n}{n!}(a_i^+)^n\, e^{\sum_{j=i+1}^{\infty}\phi_j a_j^+}|0\rangle$$

נשתמש ב: $[a,(a^+)^n]=n(a^+)^{n-1}$:

$$= e^{\sum_{j=1}^{i-1}\phi_j a_j^+} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_i^n}{n!}\left[n(a_i^+)^{n-1}+(a_i^+)^n a_i\right] e^{\sum_{j=i+1}^{\infty}\phi_j a_j^+}|0\rangle$$

$$= \phi_i\, e^{\sum_{j=1}^{i-1}\phi_j a_j^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_i^{n-1}}{(n-1)!}(a_i^+)^{n-1}\, e^{\sum_{j=i+1}^{\infty}\phi_j a_j^+}|0\rangle$$

באיבר השני בסוגריים ניתן לקדם את a_i ; עד לוואקום ולהורסו! נישאר לכן עם

$$= \phi_i|\phi\rangle$$

$$a_i^+|\phi\rangle = a_i^+ e^{\Sigma \phi_j a_j^+}|0\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi_i}|\phi\rangle$$

נשים לב גם כי
כשהשתמשנו בהלבשת ה a^+.

$$\langle\phi|\phi'\rangle = \langle 0|e^{\Sigma \phi_i^* a_i} e^{\Sigma \phi_i' a_i^+}|0\rangle$$

המצבים הקוהרנטיים אינם אורתוגונליים זה לזה. כדי לחשב המכפלה
נשתמש ב:

<u>נוסחת Baker-Hausdorff</u>: עבור כל שני אופרטורים A ו B

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \cdots$$

<u>הוכחה</u>: נתבונן ב

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$$

ונשים לב ש:

$$\frac{df}{d\lambda} = Af(\lambda) - f(\lambda)A = [A, f(\lambda)]$$

$$\frac{d^2f}{d\lambda^2} = \left[A, \frac{df}{d\lambda}\right] = [A,[A,f(\lambda)]]$$

$$\vdots$$

לכן פיתוח טיילור של $f(\lambda)$ נתון מכיון ש $f(0)=B$:

$$f(\lambda) = B + \lambda[A,B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$$

ועבור $\lambda=1$ נקבל התוצאה המבוקשת.

<u>תוצאה</u>: אם האופרטורים A ו B מתחלפים עם הקומוטטור שלהם $[A,B]$ אזי

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

<u>הוכחה</u>: נתבונן ב

$$f(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$$

$$\frac{df}{d\lambda} = Af(\lambda) + e^{\lambda A} B e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)} - f(\lambda)(A+B)$$

מכיון ש $[A,[A,B]]=0$ נקבל מ B-H:

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + [\lambda A, B] \Rightarrow e^{\lambda A} B = B e^{\lambda A} + \lambda[A,B]e^{\lambda A}$$

$$\frac{df}{d\lambda} = \lambda[A,B]f + [A+B, f]$$ $\Leftarrow$

אבל A ו-B מתחלפים במקרה זה
$$e^{\lambda A} e^{\lambda B}(A+B)e^{-\lambda B}e^{-\lambda A} = e^{\lambda A}\left(A+B+\lambda[B,A]\right)e^{-\lambda A}$$

$$= A+B+\lambda[A,B]+\lambda[B,A] = A+B$$

ומכאן ברור ש $[A+B, f]=0$ ולכן
$$\frac{df}{d\lambda} = \lambda[A,B]f$$

מכיון ש $[A,B]$ חלופי עם f ברור שפתרון המשוואה היא
$$f(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}[A,B]}$$
ועבור $\lambda=1$ נקבל התוצאה המבוקשת.

שימוש בכלל בתוצאה יהיה לנו במקרה בו A ו B חלופים עם $[A,B]$:
$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} = e^{[A,B]}e^B e^A$$

אולם
$$A = \sum_i \phi_i^* a_i \ , \quad B = \sum_j \phi_j' a_j^+ \quad \rightarrow [A,B] = \sum_{ij} \phi_i^* \phi_j' \delta_{ij} = \sum_i \phi_i^* \phi_i'$$

ונקבל
$$\langle\phi|\phi'\rangle = e^{\sum_i \phi_i^* \phi_i'} \langle 0| e^{\sum \phi_i' a_i^+} e^{\sum \phi_i^* a_i} |0\rangle$$

אם נפתח האקספוננט ברור כי רק איבר היחידה יתרום ונשאר עם:
$$= e^{\sum_i \phi_i^* \phi_i'}$$

למעשה המצבים הקוהרנטיים הינם over-complete set של מצבים: ניתן לרשום כל מצב בקומבינציה ליניארית שלהם אך מספרם גדול בהרבה מהנדרש מבסיס מינימלי הפורש את מרחב Fock. נראה כעת כי אופרטור היחידה ניתן להרשם באמצעותם באופן הבא:

$$\hat{I} = \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i} e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} |\phi\rangle\langle\phi|$$

כאשר המידה היא
$$\frac{d\phi^* d\phi}{2\pi i} = \frac{d(\mathrm{Re}\,\phi)\, d(\mathrm{Im}\,\phi)}{\pi}$$

מכיון שכל מצב במרחב Fock ניתן להכתב כסכום לינארי של מצבי אכלוס $|n_1 n_2 \cdots\rangle$ די לנו להראות ש

$$\langle n_1 n_2 \cdots | \hat{I} | m_1 m_2 \cdots \rangle = \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} \cdots$$

ואמנם:

$$\langle n_1 n_2 \cdots | \hat{I} | m_1 m_2 \cdots \rangle = \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i} e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} \langle n_1 n_2 \cdots | \phi \rangle \langle \phi | m_1 m_2 \cdots \rangle$$

$$= \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i} e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots}} \langle 0 | \cdots a_2^{n_2} a_1^{n_1} | \phi \rangle \frac{1}{\sqrt{m_1! m_2! \cdots}} \langle \phi | (a_1^+)^{m_1} (a_2^+)^{m_2} \cdots | 0 \rangle$$

$$= \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i} e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots} \sqrt{m_1! m_2! \cdots}} \phi_1^{*m_1} \phi_1^{n_1} \phi_2^{*m_2} \phi_2^{n_2} \cdots$$

כשהשתמשנו בעובדה

$$\langle 0 | \phi \rangle = \langle 0 | e^{\sum \phi_i a_i^+} | 0 \rangle = 1$$

נעבור משתנים:

$$\phi_j = \rho_j e^{i\theta_j} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{Re}\,\phi_j = \rho_j \cos\theta_j \\ \mathrm{Im}\,\phi_j = \rho_j \sin\theta_j \end{matrix} \qquad \frac{\partial(\mathrm{Re}\,\phi_j, \mathrm{Im}\,\phi_j)}{\partial(\rho_j, \theta_j)} = \begin{vmatrix} \cos\theta_j & -\rho_j \sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \rho_j \cos\theta_j \end{vmatrix} = \rho_j$$

$$= \int_0^{2\pi} \prod_j \frac{d\theta_j}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_j d\rho_j \cdot \rho_j \, e^{-\sum_j \rho_j^2} \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \cdots} \sqrt{m_1! m_2! \cdots}} \rho_1^{n_1+m_1} e^{i(n_1-m_1)\theta_1} \rho_2^{n_2+m_2} e^{i(n_2-m_2)\theta_2} \cdots$$

$$= \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} \cdots \int_0^{\infty} \prod_j d\rho_j \, 2\rho_j \, e^{-\sum_j \rho_j^2} \frac{1}{n_1! n_2! \cdots} \rho_1^{2n_1} \rho_2^{2n_2} \cdots$$

$$= \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} \cdots \prod_j \left(\frac{1}{n_j!} \int_0^{\infty} d(\rho_j^2) \, \rho_j^{2n_j} e^{-\rho_j^2} \right) = \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2} \cdots$$

באופן כללי אנו מעוניינים לחשב במכניקת הקוונטים אמפליטודות מעבר בין מצבים בזמנים שונים או במילים אחרות אלמנט מטריצה של אופרטור ההתפתחות בזמן:

$$\langle \phi_f | T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_f} dt \, H(t)} | \phi_{in} \rangle$$

נחלק את הקטע $[t_{in}, t_f]$ ל-N קטעים באורך $\epsilon = \frac{t_f - t_{in}}{N}$
כך שאלמנט המטריצה המבוקש נתון על ידי

$$t_{in} \equiv t_0, t_1, \cdots t_{N-1}, t_N \equiv t_f$$

$$= \lim_{N\to\infty} \langle \phi_f | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_N} \hat{1} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_{N-1}} \hat{1} \cdots \hat{1} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_1} |\phi_{in}\rangle$$

כאשר $H_n \equiv H(t_n)$. נכניס כעת N-1 עותקים של אופרטור היחידה כאמור לקבל

$$= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \prod_j \frac{d\phi_j^{n*} d\phi_j^n}{2\pi i} e^{-\sum_{n=1}^{N-1}\sum_j \phi_j^{n*}\phi_j^n} \times \prod_{n=1}^{N} \langle \phi^n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(a^+,a)} | \phi^{n-1}\rangle$$

כאשר סימנו ב $\langle \phi^n|$ את המצבים הקוהרנטיים המופיעים בביטוי לאופרטור היחידה ה-n בשרשרת שהכנסנו לתוך אלמנט המטריצה ובנוסף

$$|\phi_{in}\rangle \equiv |\phi^0\rangle \quad , \quad |\phi_f\rangle \equiv |\phi^N\rangle$$

נתבונן כעת באחד מאלמנטי המטריצה שקבלנו במכפלה. עבור $\epsilon \to 0$ נוכל לכתוב:

$$\langle \phi^n | e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(a^+a)} | \phi^{n-1}\rangle = \langle \phi^n | 1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(a^+a) + O(\epsilon^2) | \phi^{n-1}\rangle$$

אנו מניחים כי H_n הוא normal ordered כלומר כל ה a^+ בו מופיעים משמאל ל a (אם מראש H לא כזה אנו יכולים להביאו להיות normal ordered ע"י החלפת מקום a^+ ו a וקבלת התרומות מיחסי החילוף לתוך ביטוי חדש ל H). במצב כזה נקבל

$$= \left[1 - \frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(\phi^{n*}, \phi^{n-1})\right] \langle \phi^n | \phi^{n-1}\rangle + O(\epsilon^2)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(\phi^{n*}, \phi^{n-1})} e^{-\sum_j \phi_j^{n*}\phi_j^{n-1}} + O(\epsilon^2)$$

כאשר $H(\phi^{n*}, \phi^{n-1})$ הינו המספר המרוכב המתקבל מהחלפת כל a_j ב ϕ_j^{n-1} וכל a_j^+ ב ϕ_j^{n*} בביטוי ל H_n.

קיבלנו לכן שאלמנט מטריצת המעבר נתון על ידי

$$\lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\prod_j \frac{d\phi_j^{n*}d\phi_j^n}{2\pi i}\, e^{\sum_j \phi_j^{N*}\phi_j^N}\, e^{-\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_j \phi_j^{n*}(\phi_j^n-\phi_j^{n-1})+\frac{i}{\hbar}\epsilon H_n(\phi^{n*},\phi^{n-1})\right]}$$

נוח להציג את המסלול $\phi_j(t)$ כמייצג את הקבוצה $\{\phi_j^0, \phi_j^1, \dots, \phi_j^N\}$ ולסמן

$$\phi_j^{n*}\left(\frac{\phi_j^n-\phi_j^{n-1}}{\epsilon}\right) \equiv \phi_j^*(t)\frac{\partial}{\partial t}\phi_j(t)$$

$$H_n(\phi^{n*},\phi^{n-1}) \equiv H\left[\phi^*(t),\phi(t),t\right]$$

$$\int_{\phi_j(t_{in})}^{\phi_j^*(t_f)}\prod_j D\phi_j^*(t)\,D\phi_j(t) \equiv \lim_{N\to\infty}\int\prod_{n=1}^{N-1}\prod_j\frac{d\phi_j^{n*}d\phi_j^n}{2\pi i}$$

לרשום את התוצאה שקיבלנו כ:

$$\int_{\phi_j(t_{in})}^{\phi_j^*(t_f)}\prod_j D\phi_j^*(t)\,D\phi_j(t)\, e^{\sum_j\phi_j^*(t_f)\phi_j(t_f)}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f}dt\left\{\sum_j i\hbar\,\phi_j^*(t)\partial_t\phi_j(t)-H\left[\phi^*(t),\phi(t),t\right]\right\}}$$

בגלל האינטגרל מבצעים לנו כי קונפיגורצית הקצה $\phi_j(t_{in})$ ו- $\phi_j^*(t_f)$ נקבעות על ידי המצבים הקוהרנטיים המגדירים את אלמנט מטריצת המעבר שחישבנו. יש לזכור כי הביטוי הרצף הינו אך קיצור לביטוי הבדיד לעיל.

נוכל לקבל ביטוי קומפקטי אף יותר אם נבחר את המצבים הקוהרנטיים $|\phi\rangle$ להיות מצבים עצמיים של שדה האופרטור $\hat{\phi}(x)$ עם ערכים עצמיים $\phi(x)$ כאשר $\phi(x)$ קונפיגורצית שדה קלאסית. כלומר, בהינתן קונפיגורצית שדה קלאסית $\phi(x)$ נוכל לפרוש בבסיס שלם של פונקציות $\phi(x)=\sum_j \phi_j u_j(x)$
אם נבחר ב $|\phi\rangle$ את הערך העצמי של a_j להיות ϕ_j נקבל

$$\hat{\phi}(x)|\phi\rangle = \sum_j \hat{a}_j u_j(x)|\phi\rangle = \sum_j \phi_j u_j(x)|\phi\rangle = \phi(x)|\phi\rangle$$

שדה אופרטורי רגיל

מצב עצמי של שדה האופרטור

הערך העצמי של האופרטור $\hat{\phi}(x)$

נשתמש ב $\phi_j = \int dx\, u_j^*(x)\, \phi(x)$

לקבל
$$\sum_j \phi_j^* \phi_j = \int dx dx' \overbrace{\sum_j u_j(x)\, u_j(x')}^{\delta(x-x')} \phi^*(x)\, \phi(x') = \int dx\, \phi^*(x)\, \phi(x)$$

אם נרשום את H בעזרת צפיפות ההמילטוניאן
$$H(\phi^*(t), \phi(t), t) = \int dx\, \mathcal{H}\left[\phi^*(x,t), \phi(x,t), t\right]$$

ונגדיר את הסימון
$$\int_{\phi(x,t_{in})}^{\phi^*(x,t_f)} D\phi^*(x,t)\, D\phi(x,t) \equiv \int_{\phi_j(t_{in})}^{\phi_j(t_f)} \prod_j D\phi_j^*(t)\, D\phi_j(t)$$

נקבל שהביטוי לאלמנט מטריצת המעבר הופך ל:
$$\int_{\phi(x,t_{in})}^{\phi^*(x,t_f)} D\phi^*(x,t)\, D\phi(x,t)\; e^{\int dx\, \phi^*(x,t_f)\phi(x,t_f)}\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt \int dx \left[i\hbar\, \phi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,t) - \mathcal{H}[\phi^*(x,t), \phi(x,t), t]\right]}$$
$$= \int_{\phi(x,t_{in})}^{\phi^*(x,t_f)} D\phi^*(x,t)\, D\phi(x,t)\; e^{\int dx\, \phi^*(x,t_f)\phi(x,t_f)}\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_{in}}^{t_f} dt \int dx\, \mathcal{L}}$$

כאשר $\mathcal{L}$ הינה צפיפות הלגרנז'יאן של התורה הקלאסית. קיבלנו לכן את המרשם של פיינמן לקוונטיזציה של תורת שדה: אלמנט מטריצת המעבר הקוונטית נתון על ידי סכום על כל אפשרויות ההתפתחות בזמן של השדה מהקונפיגורציה ההתחלתית לקונפיגורציה הסופית כאשר כל "מסלול" קונפיגורציה נכנס לסכום עם משקל הנקבע על ידי הפעולה הקלאסית של המסלול. דרך זו נותנת לקוונטט תורות קלאסיות גם אם אין להן ניסוח המילטוניאני

נוכל להשתמש בטכניקה דומה. כדי לקבל ביטוי ל grand partition function בעזרת אינטגרל מסלול:

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \sum_{n_1 n_2 \cdots} \langle n_1 n_2 \cdots | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n_1 n_2 \cdots \rangle$$
$$= \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i}\, e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} \sum_{n_1 n_2 \cdots} \langle n_1 n_2 \cdots | \phi \rangle \langle \phi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n_1 n_2 \cdots \rangle$$
$$= \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i}\, e^{-\sum_j \phi_j^* \phi_j} \langle \phi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \sum_{n_1 n_2 \cdots} | n_1 n_2 \cdots \rangle \langle n_1 n_2 \cdots | \phi \rangle$$

$$Z = \int \prod_j \frac{d\phi_j^* d\phi_j}{2\pi i}\, e^{-\sum_j \phi_j^*\phi_j} \langle \phi | e^{-\beta(\hat H - \mu \hat N)} | \phi \rangle$$

נחלק את קטע "הזמן המדומה" $\tau \in [0,\beta]$ ל-N קטעים באורך $\epsilon = \frac{\beta}{N}$: $0=\tau_0, \tau_1 \cdots \tau_{N-1}, \tau_N = \beta$.
המצאות של ה Trace בביטוי ל Z גוררת תנאי שפה מחזוריים בזמן המדומה:

$$\phi_j^N = \phi_j^0 \equiv \phi_j$$

ואינטגרציה על ϕ_j^{N*}, ϕ_j^N.

נקבל לכן

$$(1)\quad Z = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} \prod_j \frac{d\phi_j^{n*} d\phi_j^n}{2\pi i}\, e^{-S(\phi^*,\phi)}$$

עם הפעולה האוקלידית

$$S(\phi^*,\phi) = \epsilon \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sum_j \phi_j^{n*} \left[\frac{(\phi_j^n - \phi_j^{n-1})}{\epsilon} - \mu \phi_j^{n-1} \right] + H(\phi^*,\phi) \right\}$$

בגבול הרצף:

$$Z = \int_{\phi(x,\beta)=\phi(x,0)} D\phi^*(x,\tau) D\phi(x,\tau)\, e^{-\int_0^\beta d\tau \int dx \left\{ \phi^*(x,\tau)\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \mu\right]\phi(x,\tau) + \mathcal{H}[\phi^*(x,\tau)\phi(x,\tau)] \right\}}$$

לדוגמא, נחשב את Z עבור בוזונים חופשיים $\mathcal{H} = \phi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\phi$.
נשתמש בנוסחה הבדידה שהיא ההגדרה המדויקת של אינטגרל המסלול. נבחר את בסיס המצבים הקוהרנטיים להיות מצבים קוהרנטיים של אופרטורי ההריסה המתאימים למצבים עם תנע מוגדר $\vec k$. כלומר באינטגרל המסלול (1) האינדקס j הופך ל-$\vec k$ והאינטגרציה הנה על $2N$ המשתנים $\phi_{\vec k}^n \equiv \phi(\vec k, \tau_n)$ ו- $\phi_{\vec k}^{n*} = \phi^*(\vec k, \tau_n)$ $n = 1 \cdots N$ לכל ערך של $\vec k$. מכיון שבבסיס ה a_k: $H = \sum_{\vec k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^+ a_k$ נקבל שהפעולה האוקלידית היא

$$S = \epsilon \sum_{n=1}^{N} \sum_{\vec k} \left\{ \phi^*(\vec k, \tau_n) \left[\frac{\phi(\vec k,\tau_n) - \phi(\vec k, \tau_{n-1})}{\epsilon} \right] + \xi_{\vec k} \cdot \phi^*(\vec k, \tau_n)\phi(\vec k, \tau_{n-1}) \right\}$$

כאן תנאי שפה מחזוריים כך ש-$\vec k$ בדיד

כאשר $\xi_{\vec k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$

נעבור כעת למשתני אינטגרציה חדשים על ידי פיתוח השדה בטורי הפוריה שלו בזמן מדומה:

$$\phi(\vec{k},\tau_n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega_n} \phi(\vec{k},\omega_n)\, e^{-i\omega_n \tau_n}$$

מכיון שפה צריך לקיים תנאי שפה מחזוריים בקטע $[0,\beta]$ כלומר $\phi(\vec{k},0)=\phi(\vec{k},\beta)$ התדירויות המותרות הן

תדירויות Matsubara בוזוניות:
$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}\cdot n \qquad n = 1,2\cdots N$$

הטרנספורמציה בין $\phi(\vec{k},\tau_n)$ ו- $\phi(\vec{k},\omega_n)$ אוניטרית ולכן יעקוביאן הטרנספורמציה הוא יחידה. נראה זאת באופן סמלי:

$$\phi(k,\tau_n) = U\, \phi(\vec{k},\omega_n)$$
$$\phi^*(k,\tau_n) = U^*\, \phi^*(\vec{k},\omega_n)$$

$$J = \det \frac{\partial(\phi^*(\vec{k},\tau_n),\phi(\vec{k},\tau_n))}{\partial(\phi^*(\vec{k},\omega_n),\phi(\vec{k},\omega_n))} = \det\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U\end{pmatrix} = \det U^* \det U = \det U^{*t} \det U$$
$$= \det U^{+} \det U$$
$$= \det U^{+}U = \det I = 1$$

ולכן
$$Z = \int \prod_{\vec{k}} \prod_{\omega_n} \frac{d\phi^*(\vec{k},\omega_n)\, d\phi(\vec{k},\omega_n)}{2\pi i}\, e^{-S}$$

$$S = \epsilon \sum_{\vec{k}} \sum_{n} \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega_n'} \phi^*(\vec{k},\omega_n') e^{i\omega_n'\tau_n} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega_n} \left[\frac{\phi(\vec{k},\omega_n) e^{-i\omega_n\tau_n} - \phi(\vec{k},\omega_n) e^{-i\omega_n\tau_{n-1}}}{\epsilon}\right]$$
$$+ \xi_{\vec{k}} \frac{1}{N} \sum_{\omega_n'} \sum_{\omega_n} \phi^*(\vec{k},\omega_n')\, \phi(\vec{k},\omega_n)\, e^{i(\omega_n'\tau_n - \omega_n\tau_{n-1})} \Bigg\}$$

נשתמש ב:
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i(\omega_m'-\omega_m)\tau_n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i\cdot\frac{2\pi}{\beta}(m'-m)\frac{\beta}{N}\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\frac{(m'-m)}{N}\cdot n} = \delta_{m,m'}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i(\omega_m'\tau_n - \omega_m\tau_{n-1})} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{-i\omega_m\epsilon}\, e^{i(\omega_m'-\omega_m)\tau_n} = e^{-i\omega_m\epsilon}\,\delta_{m,m'}$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_{\omega_n} \left[1 - e^{i\omega_n\epsilon}(1-\epsilon\,\xi_{\vec{k}})\right] \phi^*(\vec{k},\omega_n)\, \phi(\vec{k},\omega_n)$$

האינטגרלים על $\phi(\vec{k},\omega_n)$ ו $\phi^*(\vec{k},\omega_n)$ גאוסים ומכאן התוצאה

$$Z = \prod_{\vec{k}} \prod_{\omega_n=1}^{N \overset{N\to\infty}{}} \frac{1}{1-e^{i\omega_n\epsilon}\left(1-\epsilon\xi_{\vec{k}}\right)}$$

נחשב את:

$$\prod_{\omega_n=1}^{N}\left[1-e^{i\omega_n\epsilon}\left(1-\epsilon\xi_{\vec{k}}\right)\right] = \prod_{n=1}^{N}\left[1-e^{\frac{2\pi i}{N}n}\left(1-\epsilon\xi_{k}\right)\right]$$

$$= 1-\left(1-\frac{\beta\xi_{\vec{k}}}{N}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 1-e^{-\beta\xi_{\vec{k}}}$$

נשתמש ב $\prod_{n=1}^{N}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i}{N}n}\right) = 1-X^N$

וקבלנו את התוצאה המוכרת עבור בוזונים חופשיים:

$$Z = \prod_{\vec{k}} \frac{1}{1-e^{-\beta\xi_{\vec{k}}}}$$

קל להוכיח זאת עבור $N=2^k$. במקרה זה

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i}{N}n}\right) = \prod_{n=1}^{N/2}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i n}{N}}\right)\prod_{n=\frac{N}{2}+1}^{N}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i}{N}n}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{N/2}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i n}{N}}\right)\prod_{m=1}^{N/2}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i}{N}\left(m+\frac{N}{2}\right)}\right)$$

$$= \prod_{n=1}^{N/2}\left(1-Xe^{\frac{2\pi i n}{N}}\right)\prod_{m=1}^{N/2}\left(1+Xe^{\frac{2\pi i m}{N}}\right) = \prod_{n=1}^{N/2}\left(1-X^2e^{\frac{2\pi i n}{N/2}}\right) = \cdots = 1-X^{2^k}$$

או באופן כללי זהו פירוק הפולינום $1-X^N$ לפי שורשיו.

כפי שראינו לעיל, החישוב בעזרת הגרסה הבדידה של אינטגרל המסלול נותן את התשובה המדויקת כנדרש. יחד עם זאת קל יותר להשתמש בניסוח הרציף ועדיף לעשות זאת כאשר הדבר אפשרי. כדי לתת דוגמא למצב בו החישוב בעזרת הניסוח הרציף מסובך נשוב ונחשב את Z עבור בוזונים חופשיים.

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3r \left\{ \phi^*(\vec{r},\tau)\,\partial_\tau\phi(\vec{r},\tau) + \phi^*(\vec{r},\tau)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2-\mu\right]\phi(\vec{r},\tau)\right\}$$

נעבור לאינטגרציה על משתני פורייה של השדה:

$$(1)\quad \phi(\vec{r},\tau) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},\omega_n} \phi(\vec{k},\omega_n)\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_n\tau\right)}$$

כאן

כאשר עתה ה bosonic Matsubara frequencies הינן

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\beta}n \qquad n=0,\pm1,\pm2\cdots$$

שימו לב כי הטרנספורמציה (1) אינה אוניטרית במובן שחסר מקדם הנרמול המתאים (השוו לפקטור $\frac{1}{\sqrt{N}}$ במקרה הבדיד) כתוצאה מכך היעקוביאן הטרנספורמציה אינו 1 אלא מספר (אינסופי). נכיר בעובדה זו אך נמשיך הלאה תוך התעלמות ממנו ונראה אם אנו מקבלים את התלות הנכונה בפרמטרים של הבעיה עד כדי כופל מספרי שאינו מעניין אותנו.

כמו כן, את ערכי ω_n קיבלנו מהגבול $N\to\infty$ של המקרה הבדיד: $n=1..N$ $\omega_n=\frac{2\pi}{\beta}n$ על ידי הזזת $\omega_n\to\omega_{n-N}$ עבור $n=\frac{N}{2}\dots N$. מכיוון שבמקרה הבדיד $e^{-i\omega_{n-N}\tau_m}=e^{-i\omega_n\tau_m}$.

נקבל

$$S=\sum_{\vec{k},\omega_n}\beta\left(-i\omega_n+\xi_{\vec{k}}\right)\phi^*(k,\omega)\phi(k,\omega)$$

$$Z=\prod_{\vec{k}}\prod_{\omega_n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta(-i\omega_n+\xi_k)}=\prod_{\vec{k}}\underbrace{\frac{1}{\beta\xi_k}}_{\text{תרומת } \omega_n=0}\underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^2+(\beta\xi)^2}}_{\text{תרומת } \omega_{-n} \text{ ו- } \omega_n}$$

$$=\prod_{\vec{k}}\frac{1}{\beta\xi_k}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi n)^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\beta\xi_k}{2\pi n}\right)^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8\pi^2n^2}\prod_{k}\frac{1}{\sinh\frac{\beta\xi_k}{2}}$$

כשהשתמשנו ב $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)=\frac{\sinh\pi x}{\pi x}$. אנו רואים כי בדרך חישוב זו לא קיבלנו את התשובה הנכונה גם בהתעלם מהכופל המספרי. הבעיה נובעת מההתכנסות האיטית מדי של אינטגרל המסלול היוצרת בעיה בלקיחת הגבול $N\to\infty$ בשלב ביניים בחישוב (במעבר לגבול הרציף) ולא בסופו. המצב טוב יותר בחישוב גדלים ממוצעים כגון

$$\langle N\rangle=\frac{\mathrm{Tr}\,\hat{N}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}{\mathrm{Tr}\,e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z$$

עבורם ההתכנסות מהירה יותר. מעבר לכך, מכיוון שהביטוי הינו מנה של שני אינטגרלי מסלול היעקוביאן המספרי שנובע מהטרנספורמציה שעשינו מתבטל בין המונה והמכנה, ואין צורך לכן לדאוג לגביו.

$$\langle N\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{\vec{k}}\sum_{\omega_n}-\ln\left[\beta(-i\omega_n+\xi_k)\right]=\frac{1}{\beta}\sum_{\vec{k}}\sum_{\omega_n}\frac{1}{-i\omega_n+\xi_k}$$

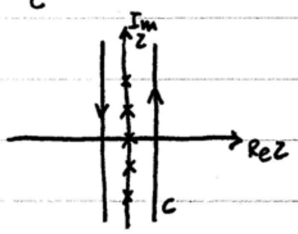
כיצד לחשב סכום מהצורה $\sum_{\omega_n} h(\omega_n)$? הפתרון הוא להשתמש בפונקציה $g(z)$ לה קטבים בנקודות $z=i\omega_n$ ובמשפט השארית.

נבחר ב
$$g(z) = \frac{\beta}{e^{\beta z}-1}$$

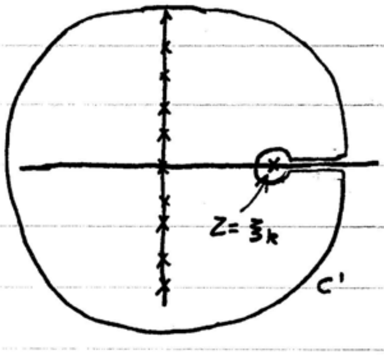
לה קטבים ב $z=i\omega_n = i\frac{2\pi n}{\beta}$ עם שארית (residue) יחידה.
משפט השארית מוליך ל

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\, g(z)\,h(-iz) = \sum_{\omega_n} \mathrm{Res}\; g(z)\,h(-iz)\Big|_{z=i\omega_n} = \sum_{\omega_n} h(\omega_n)$$

כאשר מסלול האינטגרציה במישור המרוכב הינו



במקרה שלנו $h(\omega_n) = \frac{-1}{\beta(i\omega_n-\xi_k)}$ כך של $h(-iz) = \frac{-1}{\beta(z-\xi_k)}$



קוטב ב $z=\xi_k$ עם שארית $\frac{-1}{\beta}$. נחשב את האינטגרל על המסלול המקורי C על ידי עיוות למסלול סגור ברדיוס השואף לאינסוף תוך המנעות מהכלה של נקודות סינגולריות של האינטגרנד. במקרה שלנו עלינו להמנע מהקוטב ב $z=\xi_k$. מכיון שהאינטגרנד דועך לפחות כמו $\frac{1}{z}$ התרומה מהמסלול המעגלי באינסוף מתאפסת. התרומה היחידה לאינטגרל על C' באה מהקטע המקיף את הקוטב ב $z=\xi_k$ עם התוצאה

$$(-1)\,\mathrm{Res}\; g(z)\,h(-iz)\Big|_{z=\xi_k} = (-1)\cdot\frac{\beta}{e^{\beta\xi_k}-1}\cdot\left(\frac{-1}{\beta}\right) = \frac{1}{e^{\beta\xi_k}-1}$$

האינטגרציה מסביב לקוטב הוא עם כיוון השעון

ובסך הכל נקבל, כנדרש,
$$\langle N\rangle = \sum_{k} \frac{1}{e^{\beta\xi_k}-1} = \sum_{k} n_B(\xi_k)$$

כאשר $n_B(\xi) = \frac{1}{e^{\beta\xi}-1}$ היא פונקצית האכלוס הבוזונית.