מבוא לתורת השדות

המושג של שְניוּת חלקיק-גל (particle-wave duality) אומר לנו שתכונות האלקטרון והפוטון דומות מאוד ברמה הבסיסית. למרות הבדלים במסה ובמטען שניהם יכולים לעבור התאבכות גלית ושניהם יכולים להראות כחלקיקים ממוקמים בזמן שהם פוגעים בחלקיקים אחרים או נקלטים בגלאי.
למרות זאת הם מופיעים בפיסיקה שנלמדה עד כה באופנים שונים מאוד. אלקטרונים מוצגים ברמה הקלאסית כאחת מאבני הבניין היסודיות של החומר. אור, לעומת זאת, מוצג על ידי השדה האלקטרומגנטי הקלאסי ופוטונים מופיעים, כפי שנבנה במושג, רק לאחר קוונטיזציה של שדה זה.

כיצד יש לגשר על הפער שתארנו? אפשרות אחת היא לבחור את החלקיק כמושג היסודי ולהשתמש בו לבנות תאור קוונטי של העולם. זו הדרך בה נקטנו עד כה במכניקה קוונטית של אלקטרונים לדוגמה. בדרך זו השדה האלקטרומגנטי מופיע כגבול קלאסי של מערכת בעלת מספר גדול מאוד של פוטונים קוונטיים.
האפשרות האחרת היא לבחור בשדה כיסודי ולהתבונן בחלקיקים כישויות המתגלות כאשר השדה הקלאסי מקוונטט, כמו בהקשר האלקטרומגנטי. בדרך זו עלינו להניח "שדה אלקטרוני" קלאסי שהאלקטרון כחלקיק בעל מסה ומטען מוגדרים יופיע כאופן תנודה שלו לאחר תהליך הקוונטיזציה.

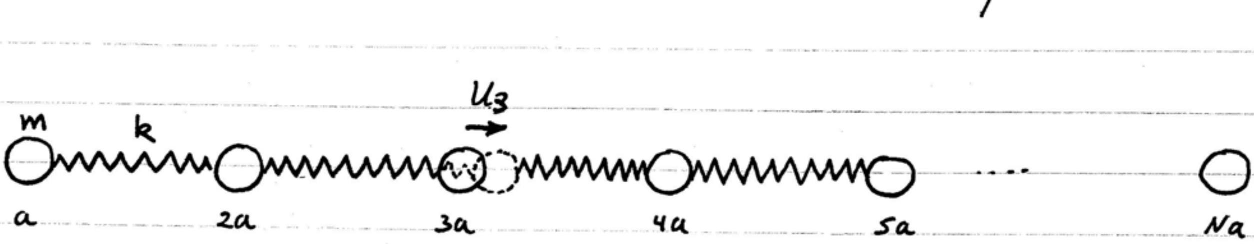
מתברר כי הדרך השניה הבוחרת בשדה כגודל הבסיסי שימושית יותר, וזאת משתי סיבות:

א. משילוב תורת היחסות הפרטית עם מכניקת הקוונטים נובע שמספר החלקיקים אינו נשמר.
כדי לראות זאת נתבונן בחלקיק בקופסה באורך L. מעקרון אי-הודאות נובע כי בתנע שלו קיימת אי ודאות $\Delta P \geq \frac{\hbar}{L}$. כתוצאה מכך קיימת פלוקטואציה באנרגיה שלו מסדר גודל $\Delta E \geq \frac{\hbar c}{L}$ כשמשתמשים בקשר היחסותי $E=\sqrt{p^2c^2+(mc^2)^2}$ בגבול $p \gg mc$. אך בגבול זה כאשר אי הודאות האנרגטית גדולה מ $2mc^2$ אנו יכולים לייצר זוג חלקיק אנטי-חלקיק מהואקום.
לכן, כשחלקיק בעל מסה m ממוקם באזור מסדר גודל של $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ (Compton wave length) לא נוכל לומר יותר שיש לנו חלקיק אחד! כל נסיון לכן לרשום תורה מסויימת קוונטית של מספר קבוע של חלקיקים נידון לכשלון. עלינו למצוא פורמליזם שיטפל במערכות עם מספר חלקיקים משתנה.

בפרק הקודם בחנו פורמליזם שכזה - קוונטיזציה שניה וגילינו כי הוא מושג באופן טבעי לתיאור של שדה אופרטורי $\hat{\psi}(x)$. האם ניתן להבין פורמליזם זה כתוצאה תהליך קוונטיזציה של תורת שדות קלאסית? כפי שנראה התשובה על כך חיובית.

ב. ראינו כי תוך הקוונטיזציה מושגת לדרישות סימטריה ברורות ממערכת של חלקיקים זהים. בפורמליזם הקוונטיזציה השניה הדגשנו את אלגברת יחסי החילוף (או האנטי חילוף) בין האופרטורים בתורה כגומות a ו a^+ או $\psi(x)$ ו $\psi^+(x)$ כדרך יורשות לקיום דרישות סימטריה אלה. נראה בהמשך כי אותם יחסי חילוף נובעים באופן טבעי מכללי הקוונטיזציה הרגילה בעת שנבצע תהליך קוונטיזציה לתורת שדות קלאסית מתאימה. מעבר לכך, על ידי קוונטיזציה של תורת שדות קלאסיות יחסותיות ניתן גם לקבל את הקשר בין הספין של החלקיקים והסטטיסטיקה הקוונטית אותה הם מקיימים - לא נראה זאת במפורש בקורס הנוכחי.

נפנה לכן תחילה לבחון כיצד מופיעות תורות שדה בהקשר הקלאסי. בשלב מאוחר יותר נבצע אותן קוונטיזציה. באופן כללי תורת שדה משמשת לתאור מערכות בעלות מספר אינסופי של דרגות חופש. כדי להבין כיצד יכולה להתקבל תורת שדה כגבול של מערכת בדידה נתבונן בדוגמא של N מסות (כל אחת בעלת מסה m) הקשורות זו לזו באמצעות קפיצים (בעלי קבוע קפיץ k) לשרשרת חד-ממדית. נניח כי אורכם הטבעי של הקפיצים הינו a כך, שבמצב שיווי המשקל של השרשרת המסות נמצאות בקואורדינטות $R_j = ja$ $j=1,2,\cdots N$.



נסמן ב u_j את הסטיה של המסה ה j ממצב שיווי המשקל שלה ב $R_j=ja$.

נתבונן בתאור הקלאסי של המערכת הבדידה ובגבול הרצף שלו:

<u>המערכת הבדידה</u>

<u>דרגות החופש</u>: N ההעתקים $u_j(t)$ $j=1\cdots N$

<u>לגרנז'יאן</u>:

$$L=\sum_{j=1}^{N}\underbrace{\frac{m}{2}\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2}_{\text{אנרגיה קינטית}}-\underbrace{\frac{k}{2}\left(u_j-u_{j-1}\right)^2}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית אלסטית}}$$

(הנחנו תנאי שפה מחזוריים $u_{-1}=u_N$)

<u>משוואות אוילר לגרנז'</u>: N משוואות $j=1\cdots N$

$$m\frac{d^2u_j}{dt^2}-k\left(u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j\right)=0$$

<u>תנעים צמודים</u>: $P_j=\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{du_j}{dt}\right)}=m\frac{du_j}{dt}$

<u>סוגרי פואסון</u>: $\{u_i,P_j\}=\delta_{ij}$

<u>המילטוניאן</u>:

$$H=\sum_{j=1}^{N}P_j\dot{q}_j-L=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2m}P_j^2+\frac{k}{2}\left(u_j-u_{j-1}\right)^2$$

<u>המערכת הרציפה</u>

בגבול הרצף $a\to 0$ ו $N\to\infty$ כך שאורך השרשרת קבוע. $L=Na$

האינדקס הבדיד j הופך לפרמטר רציף $x\in[0,L]$

ואילו ההעתק הבדיד $u_j(t)$ הופך לשדה $u(x,t)$

<u>שים לב</u>: X הינו אינדקס רציף <u>ולא</u> דרגת חופש.

$$L=a\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}\right)\left(\frac{du_j}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}(ka)\left(\frac{u_j-u_{j-1}}{a}\right)^2$$

$$\rightarrow\int_0^L dx\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{B}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

כאשר $\rho=\frac{m}{a}$ צפיפות המסה הליניארית ו $B=ka$ ה bulk modulus

נוכל להמיר במשוואה דיפרנציאלית חלקית לשדה u:

$$\left(\frac{m}{a}\right)\frac{d^2u_j}{dt^2}-(ka)\left(\frac{u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j}{a^2}\right)=0$$

$$\rightarrow\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-B\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

נגדיר את צפיפות התנע הצמוד לשדה u:

$$\frac{P_j}{a}=\left(\frac{m}{a}\right)\frac{du_j}{dt}\rightarrow\pi(x)=\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\{u(x),\pi(x')\}=\delta(x-x')$$

$$H=\int_0^L dx\left[\frac{1}{2\rho}\pi^2(x)+\frac{B}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

בדוגמאות לעיל הגענו למשוואות התנועה של המערכת הרציפה מתוך הגבול של משוואות אוילר-לגרנז' עבור המערכת הבדידה. נראה כעת כיצד נוכל לקבל את משוואות התנועה ישירות מתוך הביטוי ללגרנז'יאן בגבול הרציף. המוטיבציה לכך אינה רק בקיצור התהליך. במרבית המקרים נקודת ההתחלה התאורטית תהיה לגרנז'יאן של תורת שדות כלשהי, שאין לה בהכרח מקבילה בדידה ממנה היא נגזרת.

הלגרנז'יאן הינו פונקציונל של השדה $\phi(\vec{r},t)$ ונגזרותיו $\vec{\nabla}\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}$.
כמו שבמכניקה של חלקיק נקודתי L תלוי ב-q וב-$\dot{q}$ אך לא ב-$\ddot{q}$ בתורת השדות נניח תלות ב-ϕ וב-$\dot{\phi}$ אך לא ב-$\ddot{\phi}$. עקרונית הלגרנז'יאן יכול להיות תלוי בנגזרות מרחביות גבוהות יותר של השדה כמו $\nabla^2\phi$. בתורות מסוימות תלות כזו לא תתכן אם מקבלים את התלות בנגזרת הזמנית ב-$\dot{\phi}$ בגלל אינוריאנטיות לורנץ. גם בתורות הלא יחסותיות שנכיר הדבר לא יתרחש ונניח לכן

$$L(t)=\int d^3r\, \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \vec{\nabla}\phi\right)$$

כאשר $\mathcal{L}$ נקראת צפיפות הלגרנז'יאן. משוואות התנועה נגזרות מדרישת הפעולה המינימלית $\delta S=0$
כאשר הפעולה הינה:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(t)$$

כלומר אנו מחפשים התפתחות בזמן של קונפיגורציית השדה שמביאה את S לאקסטרמום תחת וריאציה $\delta\phi$ שעבורה נדרוש $\delta\phi(t_1)=\delta\phi(t_2)=0$ וכמו כן $\delta\phi(r\to\infty)=0$.

$$0=\delta S=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3r\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\cdot\delta(\vec{\nabla}\phi)\right]$$

חילוף הוריאציה והנגזרת:

$$=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3r\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\vec{\nabla}\delta\phi\right]$$

אינטגרציה בחלקים:

$$=\int_{t_1}^{t_2} dt\int d^3r\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right)-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\right)\right]\delta\phi\ +$$ איברי שפה שמתאפסים בגלל הדרישות על $\delta\phi$

מכיון ש-$\delta\phi$ שרירותית נקבל לבסוף את משוואות אוילר-לגרנז' במקרה הרציף!

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$$

דוגמאות של לגרנג'יאני שדה

<u>שדה Klein-Gordon</u>: נתבונן בלגרנז'יאן לשדה הסקלרי הממשי $\phi(\vec{r},t)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla}\phi\right)^2\right] - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \qquad (c=\hbar=1)$$

שממנו נגזרת משוואת Klein-Gordon כמשוואת אוילר-לגרנז' של התורה:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0$$

משוואה זו הוצעה ב 1927 על ידי אוסקר קליין וולטר גורדון לתאור אלקטרונים יחסותיים. כפי שהתברר היא אינה מתאימה למטרה זו (האלקטרונים הינם בעלי ספין $1/2$) אך היא מתארת בהצלחה את הפיונים חסרי הספין. הפיונים הינם החלקיקים המורכבים משני קווארקים (מזונים) הקלים ביותר. החלפתם בין שני נוקלאונים בגרעין מסבירה את הכח החזק הקושר את הנוקלאונים - לפחות בגרסה פשוטה של הפיסיקה.

<u>שדה שרדינגר</u>: נתבונן כעת בלגרנז'יאן לשדה הסקלרי <u>המרוכב</u> $\Psi(\vec{r},t)$:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Psi^*\cdot\vec{\nabla}\Psi - V(\vec{r},t)\Psi^*\Psi$$

$\Psi(\vec{r},t)$ מכיל שני שדות בלתי תלויים: $Re\Psi$ ו $Im\Psi$ ויש להשתמש במשוואת אוילר-לגרנז' עבור כל אחד מהם. לחלופין, כל שתי קומבינציות ליניאריות בלתי תלויות של $Re\Psi$ ו $Im\Psi$ יכולות לשמש כשני הרכיבים הבלתי תלויים עבורם נגזר המשוואות. נוח לבחור את Ψ ו Ψ^* כקומבינציות אלה. עבור Ψ^* נקבל את משוואת אוילר-לגרנז'

$$-\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + V\Psi = 0$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad \Leftarrow$$

עבור ψ נקבל את משוואת אוילר-לגרנג' $\quad \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + V\psi^* = 0$

שהיא הצמוד המרוכב של המשוואה הראשונה.

קיבלנו ש-ψ מקיימת משוואה הנראית בדיוק כמו משוואת שרדינגר עבור פונקציית הגל אך שימו לב הפרשנות שלה שונה מאוד באופן עקרוני. בדרך בה קיבלנו את המשוואה ψ היא שדה קלאסי ללא הפרשנות ההסתברותית של פונקציית הגל. כפי שנראה בהמשך קוונטיזציה של תורת שדות קלאסית זו תוליך אותנו באופן ישיר לתוצאות הקוונטיזציה השניה שקיבלנו בפרק הקודם.

<u>השדה האלקטרומגנטי:</u> בעזרת ביטוי השדות החשמליים המגנטיים $\vec{E}(\vec{r},t)$ ו-$\vec{B}(\vec{r},t)$ באמצעות הפוטנציאלים הסקלרי והוקטורי $\phi(\vec{r},t)$ ו-$\vec{A}(\vec{r},t)$ דרך

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

מובטח קיומן של שתי משוואות מקסוול $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ו-$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$.

נראה כעת כי שתי המשוואות הנוספות עבור מערכת ללא מטענים וזרמים חיצוניים נובעות כמשוואות לגרנג' מהלגרנז'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)^2 - \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2\right]$$

הפקטור $\frac{1}{8\pi}$ אינו הכרחי כאן אך הוא מתאים כאשר מוסיפים ללגרנז'יאן צימוד לצפיפות מטען וזרם חיצוניים.

$$= \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)^2\right]$$

משוואת אוילר-לגרנג' ל-ϕ:

$$\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

משוואת אוילר-לגרנג' ל-A_z:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_z$$

ויחד עם המשוואות ל-A_x ו-A_y נקבל $\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

סימטריות וחוקי שימור

במכניקה קלאסית סימטריה הינה טרנספורמציה של המערכת שאינה משנה את משוואות התנועה. ברור שאם תחת טרנספורמציה של קונפיגורצית שדה כלשהיא $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$ צפיפות הלגרנג'יאן אינה משתנה, כלומר $\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi)$, תנאי זה מקיים משוואות התנועה ל-ϕ' זהות לאלו של ϕ. למעשה דרישה זו מגבילה מדי. קל לראות שמשוואות התנועה אינן משתנות אם עבור קונפיגורציה כלשהי מתקיים

$$\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi) + \underbrace{\partial_\mu F^\mu(\phi, \delta\phi)}_{\delta\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}(\phi) + \partial_t F^0 + \partial_x F^x + \partial_y F^y + \partial_z F^z$$

במצב כזה בו $\delta\mathcal{L}$ הוא איבר דיברגנס נקבל בתנאי שהשדה דועך ב $|t|,|r| \to \infty$ $\quad S(\phi') = S(\phi)$ לכל קונפיגורציה ϕ וכיוון שהתנאי $\delta S = 0$ תחת וריאציה של השדה מוביל לאותן משוואות תנועה עבור ϕ ו-ϕ'.
(למעשה די לדרוש ש $\phi \to 0$ ב $|r| \to \infty$ מכיון שמשוואות התנועה מתקבלות מוריאציות שדה המתאפסות ב $|t| \to \infty$ עבורן הוריאציה של האיבר $\partial_t F^0$ מתאפסת בהכרח).

<u>משפט נתר</u> - (Noether's theorem) מבטיח כי כל סימטריה כזאת של הלגרנג'יאן מובילה לקיומו של חוק שימור

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t j^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

כלומר, אם נגדיר את המטען בתוך נפח V

$$Q = \int_V d^3r\, j^0$$

נקבל שהוא משתנה בזמן בהתאם ל

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\int_A d\vec{s} \cdot \vec{j}$$

כשהשתמשנו במשפט גאוס במעבר האחרון. במילים אחרות, כל שינוי ב Q בנפח V נובע משטף הזרם $\vec{j}$ אל מחוץ לנפח. זוהי משוואת הרציפות ל Q. אם $\vec{j}$ דועך מהר מספיק עבור $|r| \to \infty$ אזי $Q = \int d^3r\, j^0$ אינו משתנה בזמן.

<u>הוכחה:</u> נבחן את השינוי ב $\mathcal{L}$ תחת הטרנספורמציה עבור <u>קונפיגורצית שדה ϕ המקיימת את משוואות התנועה</u>

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)$$

$$= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$$

כשבמעבר האחרון השתמשנו בעובדה שהאבר הראשון מתאפס כתוצאה ממשוואות התנועה.

אך אם הטרנספורמציה היא סימטריה של הלגרנג'יאן אנו גם יודעים באופן כללי ש: $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)$

ולכן תחת התפתחות בזמן לפי משוואות התנועה נקבל:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - F^\mu(\phi)$$

כאשר $\partial_\mu J^\mu = 0$

<u>דוגמאות</u>

<u>סימטרית $U(1)$ ושימור מספר החלקיקים</u>: לגרנג'יאן שרדינגר שהצגנו אינוריאנטי תחת הטרנספורמציה

$$\psi(\vec{r},t) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(\vec{r},t), \qquad \psi^*(\vec{r},t) \rightarrow e^{-i\alpha}\psi^*(\vec{r},t)$$

עבור α קבוע ממשי כלשהו. סימטריה זו תחת הכפלת השדה בפאזה נקראת סימטרית $U(1)$.
במקרה זה $F^\mu=0$. ברור שהלגרנג'יאן אינווריאנטי תחת גרסה אינפיניטסימלית של הטרנספורמציה:

$$\psi(\vec{r},t) \rightarrow \psi(\vec{r},t) + i\,\delta\alpha\,\psi(\vec{r},t) \equiv \psi + \delta\psi$$
$$\psi^*(\vec{r},t) \rightarrow \psi^*(\vec{r},t) - i\,\delta\alpha\,\psi^*(\vec{r},t) \equiv \psi^* + \delta\psi^*$$

ממשפט נתר נקבל שצפיפות הגודל הנשמר הינה

$$\rho \equiv J^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\delta\psi^*$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\psi^*\, i\delta\alpha\,\psi - \frac{i\hbar}{2}\psi\,(-i\delta\alpha\,\psi^*) = -\hbar\,\delta\alpha\,\psi^*\psi$$

וצפיפות הזרם של הגודל הנשמר הינה

$$\vec{J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi^*)}\delta\psi^*$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\cdot i\delta\alpha\,\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\left(-i\delta\alpha\,\psi^*\right)$$

$$= -\hbar\delta\alpha\,\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \vec{\nabla}\psi^*\cdot\psi\right)$$

מלבד הפקטור $-\hbar\delta\alpha$ אנו מזהים את התוצאה עם צפיפות וזרם ההסתברות המוכרים. קיבלנו לכן ששימור ההסתברות (המטען) בתורת שרדינגר משקף את אינווריאנטיות לגרנז'יאן שרדינגר תחת טרנספורמציית $U(1)$ (הכפלת ψ ו-ψ^* בפאזה).

<u>סימטריה להעתקות במרחב ובזמן ושימור התנע והאנרגיה</u>

נעתיק את המערכת (השדה) במרחב ובזמן

$$\phi(x^\nu) \rightarrow \phi(x^\nu+\epsilon^\nu)$$

כאשר $x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$

בשיעורים אינפיניטסימליים ϵ^ν :

$$= \phi(x^\nu) + \epsilon^\nu\partial_\nu\phi(x^\nu)$$

תחת טרנספורמציה זו צפיפות הלגרנז'יאן משתנה כ:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\epsilon^\nu\partial_\nu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\epsilon^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi$$

נשים לב כי אם $\mathcal{L}$ לא תלוי באופן מפורש ב-x^ν אלא רק באופן בלתי מפורש דרך התלות ב-ϕ נקבל ש

$$\epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L} = \epsilon^\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\partial_\nu\phi + \epsilon^\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\partial_\mu\phi$$

ולכן במקרה זה

$$(1)\quad \delta\mathcal{L} = \epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L}$$

והעתקות הינן סימטריות של הלגרנז'יאן עם $F^\mu = \epsilon^\mu\mathcal{L}$

שימו לב שאם $\mathcal{L}$ היא פונקציה מפורשת של x^ν, לדוגמא אם הוא מכיל איבר כ-$V(x^\nu)\phi^2$ אזי $\epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L}$ יכיל איבר נוסף $\epsilon^\nu\partial_\nu V\cdot\phi^2$ ולא נוכל לרשום את $\delta\mathcal{L}$ בצורה (1).

אם הלגרנג'יאן סימטרי תחת הזזה בכיוון x^ν משפט נתר מבטיח את קיומו של ה(ארבע) זרם הנשמר

$$(J_\nu)^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \equiv T^\mu{}_\nu$$

כשהצבנו $\epsilon^\nu=1$ מכיוון שאם J_ν נשמר כך גם כל מכפלה שלו בקבוע.

$T^\mu{}_\nu$ נקרא ה energy-momentum tensor והוא מקיים

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$$

הגודל הנשמר תחת סימטרית הזזה בזמן (לאורך x^0) הוא

$$E = \int d^3r\, T^{00}$$

$$= \int d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\partial_t\phi - \mathcal{L}\right]$$

זו האנרגיה הכוללת של השדה. לדוגמא אם לגרנג'יאן שרדינגר מכיל צימוד לשדה חיצוני $V(\vec{r})$ שאינו תלוי בזמן הוא עדיין סימטרי תחת הזזות בזמן ונקבל שהאנרגיה הנשמרת שלו היא

$$E = \int d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\partial_t\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\partial_t\psi^* - \mathcal{L}\right] = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi + V(\vec{r})\psi^*\psi\right]$$

הגודל הנשמר תחת סימטרית הזזה לאורך הציר המרחבי x^i $i=1,2,3$ הוא

(מכיוון ש T^0_i נשמר כך גם $T^{0i}=-T^0_i$)

$$P^i = \int d^3r\, T^{0i}$$

$$= -\int d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)}\partial_i\phi$$

זהו רכיב התנע הנשמר בכיוון x^i. לדוגמא, לגרנג'יאן שרדינגר בהעדר צימוד לשדה חיצוני סימטרי תחת הזזות מרחביות ונקבל עבורו

$$\vec{P} = -\int d^3r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)}\vec{\nabla}\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi^*)}\vec{\nabla}\psi^*\right]$$

$$= -\int d^3r \left[\frac{i\hbar}{2}\psi^*\vec{\nabla}\psi - \frac{i\hbar}{2}\psi\vec{\nabla}\psi^*\right] = \int d^3r\, \psi^*(-i\hbar\vec{\nabla})\psi$$

כשביצענו אינטגרציה בחלקים על האיבר השני. קל לזהות את התוצאה עם הביטוי המוכר לערך התצפית של התנע.

הניסוח ההמילטוניאני של תורת השדות

נזכיר כי במכניקה של מערכת בודדה עם N דרגות חופש $q_j,\ j=1\cdots N$ התנע הצמוד קנונית ל q_j מוגדר בעזרת

$$(1)\quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$$

וההמילטוניאן:

$$(2)\quad H(q_j,p_j) = \sum_{j=1}^{N} p_j \dot q_j - L(q_j,\dot q_j)$$

הינו טרנספורם לג'נדר של $L(q,\dot q)$ ותלוי ב q ו p שכן הדיפרנציאל שלו הינו

$$dH = \sum_{j=1}^{N}\left[\dot q_j\, dp_j + p_j\, d\dot q_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\, d\dot q_j\right]$$

תוך שימוש בהגדרת p_j,

$$= \sum_{j=1}^{N}\left[\dot q_j\, dp_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j\right]$$

מכאן אנו מקבלים ש

$$(3)\quad \dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

שימוש במשוואת אוילר לגרנז':

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \dot p_j$$

אלו הן משוואות המילטון השקולות למשוואות אוילר-לגרנז'. נוכל לרשום אותן בצורה סמטרית עוד יותר תוך שימוש במושג של סוגרי פואסון המוגדרים לכל שתי פונקציות של q ו p $A(q,p)$, $B(q,p)$ באופן הבא:

$$(4)\quad \{A,B\} = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_j}\right]$$

ברור ש $\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0$ ו $\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$. ומשוואות המילטון הינן

$$\dot q_j = \{q_j, H\}\ , \quad \dot p_j = \{p_j, H\}$$

ועבור פונקציה $A(q,p,t)$ נקבל:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\partial A}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial A}{\partial p_j}\dot p_j\right] + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

כשהשתמשנו במשוואות המילטון.

ננסה כעת להכליל פורמליזם זה למקרה של תורת השדות.

באנלוגיה למשוואות (1) ו(2) נגדיר את צפיפות התנע הצמוד לשדה ϕ:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}$$

ואת ההמילטוניאן ש$H=\int d^3r\,\mathcal{H}$ המוגדר דרך צפיפותו:

$$\mathcal{H} = \Pi\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}$$

כדי לקבל את האנלוג למשוואות המילטון (3) נגדיר את הנגזרת הפונקציונלית של פונקציונל של שדה ביחס לשדה: אם F פונקציונל של השדה ונגזרותיו

$$F = \int d^3r\, \mathcal{L}\left(\phi, \vec{\nabla}\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

השינוי בF תחת שינוי $\delta\phi$ הינו

$$\delta F = \int d^3r\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)}\delta(\vec{\nabla}\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]$$

אם $\delta\phi \to 0$ עבור $r\to\infty$

$$= \int d^3r\left[\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \vec{\nabla}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{\nabla}\phi}\right)}_{\frac{\delta F}{\delta\phi}}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]$$

$$= \int d^3r\left[\frac{\delta F}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]$$

$\frac{\delta F}{\delta\phi}$ הוא הנגזרת הפונקציונלית של F ביחס לϕ

$$\delta H = \int d^3r\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta\Pi + \Pi\,\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\right]$$

שימוש בהגדרת Π:

$$= \int d^3r\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta\Pi - \frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi\right]$$

ניתן לכן לחשוב על H כפונקציונל של ϕ ו Π ונקבל את משוואות המילטון לשדה וצפיפות התנע:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Pi}\ ,\qquad \frac{\delta L}{\delta\phi} = -\frac{\delta H}{\delta\phi}$$

שימוש באוילר-לגרנז':

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}\right) = \frac{\partial\Pi}{\partial t}$$

<u>דוגמא:</u> נתבונן בלגרנז'יאן שדה שרדינגר. כדי שיראו משוואות התנועה לא משתנות אם מוסיפים ל-$\mathcal{L}$ נגזרת - דיברגנס $\partial_\mu F^\mu$. אם נוסיף $\partial_t(\frac{i\hbar}{2}\psi^*\psi)$ נקבל

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi - V\psi^*\psi$$

$$\Pi_\psi = i\hbar\psi^*$$

$\Leftarrow$ התנע הצמוד ל-ψ הינו

ובנוסף לזה ל-ψ^* אין תנע צמוד $\Pi_{\psi^*}=0$

$$\mathcal{H} = \Pi_\psi\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Pi_{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \mathcal{L}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^*\cdot\vec{\nabla}\psi + V\psi^*\psi$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\Pi_\psi\cdot\vec{\nabla}\psi + V\Pi_\psi\psi\right]$$

ונקבל H כפונקציה של ψ ו-Π_ψ בלבד:

משוואת המילטון הראשונה נותנת

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Pi_\psi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Pi_\psi} - \vec{\nabla}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\Pi_\psi)}$$

$$= -\frac{i}{\hbar}V\psi + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\psi$$

וזו בדיוק משוואת שרדינגר ל-ψ. משוואת המילטון השניה נותנת

$$\frac{\partial\Pi_\psi}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\psi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} + \vec{\nabla}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)}$$

$$= \frac{i}{\hbar}V\Pi_\psi - \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Pi_\psi$$

משוואת שרדינגר ל-ψ^*:

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^*$$

האנלוג לסוגרי פואסון (4) המוגדר כעת עבור שני פונקציונלים של השדה ולצפיפות התנע הצמוד

$$A = \int d^3r\, \mathcal{A}(\phi, \vec{\nabla}\phi, \pi, \vec{\nabla}\pi, t) \qquad , \qquad B = \int d^3r\, \mathcal{B}(\phi, \vec{\nabla}\phi, \pi, \vec{\nabla}\pi, t)$$

היא

$$\{A, B\} = \int d^3r \left[\frac{\delta A}{\delta \phi}\frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi}\frac{\delta B}{\delta \phi} \right]$$

מכאן קל לקבל את סוגרי פואסון הקאנונים אם נתבונן בסוגרי פואסון של

$$A = \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_1)$$
$$B = \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_2)\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_2)$$

$$\{\phi(\vec{r}_1), \phi(\vec{r}_2)\} = \int d^3r \left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot 0 - 0\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) \right] = 0$$

באופן דומה נקבל

$$\{\pi(\vec{r}_1), \pi(\vec{r}_2)\} = 0$$

ולבסוף אם נבדוק את המקרה עבור $B = \int d^3r\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_2)\pi(\vec{r}) = \pi(\vec{r}_2)$

$$\{\phi(\vec{r}_1), \pi(\vec{r}_2)\} = \int d^3r \left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) - 0 \right] = \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

לסיום נתבונן בנגזרת הזמנית של פונקציונל כללי A. כאשר $\delta\pi \to 0$ $\delta\phi \to 0$ עבור $|r| \to \infty$ נקבל

$$\frac{dA}{dt} = \int d^3r \left[\frac{\delta A}{\delta \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\delta A}{\delta \pi}\frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right]$$

שימוש במשוואות המילטון:

$$= \int d^3r \left[\frac{\delta A}{\delta \phi}\frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta A}{\delta \pi}\frac{\delta H}{\delta \phi} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right]$$

$$= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

כאשר $\frac{\partial A}{\partial t} = \int d^3r\, \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$

קוונטיזציה קנונית של תורת השדות

כעת משהגדרנו סוגרי פואסון הקלאסיים עבור השדה וכתבנו התנע הצמוד לו נוכל להשתמש במרשם המוכר לקוונטיזציה של מערכת שניתן לתאר בצורה המילטונית: יש להחליף כל סוגר פואסון בקומוטטור:

$$\{A,B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}]$$

באופן זה נקבל

$$[\hat{\phi}(\vec{r}_1),\hat{\phi}(\vec{r}_2)] = [\hat{\pi}(\vec{r}_1),\hat{\pi}(\vec{r}_2)] = 0$$

$$[\hat{\phi}(\vec{r}_1),\hat{\pi}(\vec{r}_2)] = i\hbar\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

מסתבר כי המרשם לעיל שהומצא עבור מערכת חד-חלקיקית אכן מתאים לקוונטיזציה של מערכת בוזונית אך שבמקרה של תורת שדות קיימת אפשרות נוספת (כפי שגילינו בתחילת הפרק על קוונטיזציה שניה) והיא להחליף את סוגרי פואסון הקלאסיים באנטי קומוטטורים. אפשרות זו מתאימה למערכות פרמיוניות עבורן

$$\{\hat{\phi}(\vec{r}_1),\phi(\vec{r}_2)\} = \{\hat{\pi}(\vec{r}_1),\hat{\pi}(\vec{r}_2)\} = 0 \quad , \quad \{\hat{\phi}(\vec{r}_1),\hat{\pi}(\vec{r}_2)\} = i\hbar\,\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

כדוגמא נחזור לדון בשדה שרדינגר עבורו ראינו ש $\Pi_\psi = i\hbar\psi^*$. במקרה הבוזוני נקבל מתוך תנאי הקוונטיזציה לעיל

$$[\hat{\psi}(\vec{r}_1),\hat{\psi}(\vec{r}_2)] = [\hat{\psi}^+(\vec{r}_1),\psi^+(\vec{r}_2)] = 0 \quad , \quad [\hat{\psi}(\vec{r}_1),\hat{\psi}^+(\vec{r}_2)] = \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

כפי שאמנם קיבלנו באופן ישיר בפרק פורמליזם הקוונטיזציה השניה.

עם ההחלפה $\Pi_\psi \to i\hbar\hat{\psi}^+$ נקבל שההמילטוניאן הינו

$$H = \int d^3r\left(\frac{-i}{\hbar}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}(i\hbar\hat{\psi}^+)\vec{\nabla}\hat{\psi} + V\,i\hbar\,\hat{\psi}^+\psi^+\right]$$

ואחרי אינטגרציה בחלקים של האיבר הראשון:

$$= \int d^3r\left[\hat{\psi}^+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\hat{\psi} + V\hat{\psi}^+\hat{\psi}\right]$$

לאחר הקוונטיזציה משוואת התנועה בזמן הקלאסית

$$\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

הופכת ל:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

כלומר, דרך קוונטיזציה זו מובילה אותנו לתמונת הייזנברג עבור האופרטורים.

לסיום, אם נבצע קוונטיזציה את הפונקציה של השדה Ψ בדומה שלם של פונקציות: $\Psi(\vec{r})=\sum_j a_j u_j(\vec{r})$
מקדמי הפיתוח יהפכו לאופרטורים:

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_j \hat{a}_j u_j(\vec{r})$$

בדיקת יחסי החילוף עבור Ψ ו Ψ^+ מלמדת ש:

$$\sum_{ij} [\hat{a}_i,\hat{a}_j]\, u_i(\vec{r}_1)u_j(\vec{r}_2) = 0$$

$$\sum_{ij} [\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+]\, u_i^*(\vec{r}_1)u_j(\vec{r}_2) = 0$$

מכיון שהמכפלות $u_i(\vec{r}_1)u_j(\vec{r}_2)$ אינן תלויות זו בזו נקבל

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j] = [\hat{a}_i^+,\hat{a}_j^+] = 0$$

כמו כן:

$$\sum_{ij} [\hat{a}_i,\hat{a}_j^+]\, u_i(\vec{r}_1)u_j^*(\vec{r}_2) = \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

משלמות ה u_i נובע

$$\sum_{ij} \left([\hat{a}_i,\hat{a}_j^+] - \delta_{ij}\right) u_i(\vec{r}_1)u_j^*(\vec{r}_2) = 0$$

ומהשיקול שביצענו לעיל אנו מוצאים ש

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_j^+] = \delta_{ij}$$

ושקיבלנו את האלגברה של אופרטורי היצירה והחיסול שהגדירה לנו את הקוונטיזציה השניה.