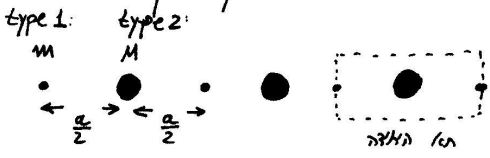


התבוננו במערכת של M יונים במרחק a זה מזה. המסה של כל יון היא m והמרחק בין יונים סמוכים הוא a . נניח שהמערכת היא חד-ממדית. נרשום את המרחקים בין יונים סמוכים: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$. נניח שהמערכת היא חד-ממדית. נרשום את המרחקים בין יונים סמוכים: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$.



$$R_j = ja$$

$$\begin{cases} 0 \leq j < M \\ \frac{a}{2} \leq j < M \end{cases}$$

$$H = \sum_j \frac{1}{2M} P_{j,1}^2 + \frac{1}{2M} P_{j,2}^2 + \frac{B}{2} (u_{j,1} - u_{j,2})^2 + \frac{B}{2} (u_{j,2} - u_{j+1,1})^2$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} u_{j,1} = -B [(u_{j,1} - u_{j,2}) - (u_{j-1,2} - u_{j,1})]$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} u_{j,2} = -B [(u_{j,2} - u_{j,1}) + (u_{j,2} - u_{j+1,1})]$$

$$u_{j,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k u_{k,\alpha} e^{ikja} \quad (\alpha=1,2)$$

הקטור k הוא וקטור המרחב ההפוך. $k = \frac{2\pi}{Na} n$, $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$. נרשום את המרחקים בין יונים סמוכים: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$.

$$\begin{pmatrix} m \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & M \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B & B(1+e^{-ika}) \\ B(1+e^{ika}) & -2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \end{pmatrix}$$

$$\sum_j e^{-ikja} \cdot m \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} u_{k',1} e^{ik'ja} = \sum_j e^{-ikja} (-B) \left[\frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{k'} u_{k',2} e^{ik'ja} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} u_{k',2} e^{ik'ja} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k'} u_{k',2} e^{i(k'-1)ja} \right]$$

$$\sum_j e^{i(k-k')ja} = N \delta_{k,k'} \Rightarrow \text{עלנו להפוך}$$

$$u_{k\alpha}(t) = u_{k\alpha} e^{-i\omega_k t}$$

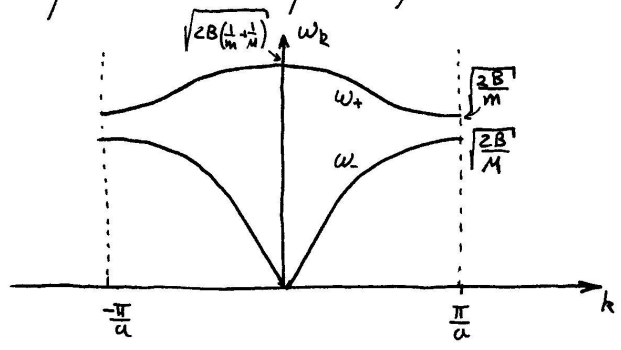
$$\begin{pmatrix} m\omega_k^2 - 2B & B(1 + e^{-ika}) \\ B(1 + e^{ika}) & M\omega_k^2 - 2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \end{pmatrix} = 0$$

הנדרש למצוא את התנאים למערכת

$$(m\omega_k^2 - 2B)(M\omega_k^2 - 2B) - (2B \cos \frac{ka}{2})^2 = 0$$

$$\omega_{\pm}^2 = B \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \left(\sin \frac{ka}{2}\right)^2} \right]$$

יש שני ענפים של ω_k עבור k קטן כל עוד m ו- M זהים זהו ענף ω_+ וזהו ענף ω_- .
 (2) המערכת היא $N \times N$ והיא הסימטרית.



למשל $\frac{u_1}{u_2} \rightarrow 1$! $\omega_- \rightarrow \left[\frac{mM a^2 B}{(m+M)^2} \right]^{1/2} |k|$ עבור $k \rightarrow 0$

הענף ω_- הוא ענף קולב (longitudinal) והענף ω_+ הוא ענף טרנסברסלי (transverse).
 $(u_{j\alpha} = \frac{1}{\sqrt{V}} u_{j\alpha})$

למשל $\frac{u_1}{u_2} \rightarrow -\frac{M}{m}$! $\omega_+ \rightarrow \sqrt{2B \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) + c(k)^2}$ כאשר $c(k)$ הוא מהירות הקולב

הענף ω_+ הוא ענף טרנסברסלי והענף ω_- הוא ענף קולב.

המערכת היא $N \times N$ והיא הסימטרית. עבור $k \neq 0$ יש שני ענפים של ω_k והם ω_+ ו- ω_- .
 הענף ω_+ הוא ענף טרנסברסלי והענף ω_- הוא ענף קולב. (הענף ω_- הוא קולב ל- 180°)

