הרעיון הבסיסי שמשיכה חלשה עלולה לקשר אלקטרונים לזוג הוצג ע"י Cooper ב 1956. Cooper הראה כי ים פרמי אינו יציב כנגד יצירת זוגות קשורים ללא קשר לגודל האינטראקציה בין האלקטרונים כל עוד היא מושכת. תוצאה זו תלויה באופן הכרחי בקיום האיסור של פאולי ובקיומו של ים פרמי שכן אנו יודעים כי ללא הים זה יצירת זוג קשור בשלושה ממדים דורשת פוטנציאל מושך בחוזק הגדול מערך קריטי.

כדי לראות כיצד מתרחשת קשירת הזוג נתבונן במודל פשוט של שני אלקטרונים הנוספים לכדור פרמי ב $T=0$. נניח כי שני האלקטרונים עוברים אינטראקציה בינם לבין עצמם אך לא עם האלקטרונים בים פרמי פרט לכך שכתוצאה מעקרון פאולי אינם יכולים לעבור למצבים המאוכלסים ע"י האלקטרונים בים. משוואת שרדינגר לפונקצית הגל של הזוג $\Psi(\vec r_1,\vec r_2,\sigma_1\sigma_2)$ (σ - ספין) הינה:

בקואורדינטות מרכז המסה $\vec R = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$ והקואורדינטה היחסית $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + V(r)\right]\Psi(R,r,\sigma_1\sigma_2) = E\,\Psi(R,r,\sigma_1\sigma_2)$$

the reduced mass $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

אנו מעוניינים למצוא את מצב היסוד של הבעיה ולהראות שהאנרגיה שלו קטנה מ $2E_F$. במצב כזה ברור כי האלקטרונים יצרו מצב קשור עם אנרגיה הקטנה מהאנרגיה המינימלית שיכולה להיות לזוג ללא האינטראקציה $2E_F$ (המצבים האנרגטיים הנמוכים ביותר בהם ניתן לשים את האלקטרונים ללא אינטראקציה נמצאים על משטח פרמי בגלל עקרון האיסור של פאולי וקיום כדור פרמי המלא).

הבעיה ניתנת להפרדת משתנים

$$\Psi(R,r,\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{L^3}}e^{i\vec K\cdot\vec R}\,\psi(r)\,\chi(\sigma_1,\sigma_2)$$

כשמשתמשים בעובדה שהחלק בהמילטוניאן התלוי ב R הינו האנרגיה הקינטית הרגילה שתורם לאנרגיה $\frac{\hbar^2 K^2}{2(m_1+m_2)}$ וברור לכן שמצב היסוד הינו עם $K=0$.

פונקצית הגל Ψ של הזוג נדרשת להיות אנטיסימטרית תחת החלפת שני האלקטרונים. לכן אם $\chi(\sigma_1,\sigma_2)$ פונקציה אי זוגית תחת החלפת σ_1 ו σ_2 $\psi(r)$ צריכה להיות סימטרית תחת $r \to -r$ (החלפת מקום האלקטרונים) ולהפך אם χ זוגית. אנו מניחים כי $V(r)$ מתאר פוטנציאל מושך הקטן עם r לכן הזוג ירוויח יותר אנרגיה אם $\psi(r)$ תהיה גדולה עבור r קטנים.

מצב היסוד יהיה לכן עם $\Psi(r)$ הזוגית ב r (אם Ψ אי זוגית הוא מתאפס עבור $r=0$) ועבור χ נקבל $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$. נפתח את $\Psi(r)$ בגלים חופשיים:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{k>k_F} f_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

כשלוקחים בחשבון באופן מפורש את העובדה ש Ψ יכולה לערב רק מצבים מעל לים פרמי המלא, בגלל עקרון פאולי. נציב את Ψ במשוואת שרדינגר ונפעיל על $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ לקבל

$$\left(E - 2\epsilon_{\vec{k}}\right) f_{\vec{k}} = \sum_{k'>k_F} V_{\vec{k}\vec{k}'} f_{\vec{k}'}$$

כאשר

$$V_{\vec{k},\vec{k}'} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \int d^3r\, V(\vec{r})\, e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}$$

נניח כעת אינטראקציה פשוטה במיוחד מהצורה

$$V_{\vec{k},\vec{k}'} = \begin{cases} -V & \xi_{\vec{k}}, \xi_{\vec{k}'} < \hbar\omega_c \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כאשר $\xi_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} - E_F$, ו $\hbar\omega_c$: cut off energy.

עבור אינטראקציה שכזו המשוואה ל $f_{\vec{k}}$ נהיית

עבור $\vec{k}$ עם $\xi_{\vec{k}} < \hbar\omega_c$ אחרת $f_{\vec{k}}=0$:

$$f_{\vec{k}} = V \frac{\sum_{k'>k_F} f_{\vec{k}'}}{2\epsilon_{\vec{k}} - E}$$

נסכם את שני צידי המשוואה על $k_F<|\vec{k}|$

$$\sum_{\substack{k>k_F \\ \xi_k<\hbar\omega_c}} f_{\vec{k}} = \sum_{\substack{k'>k_F \\ \xi_{k'}<\hbar\omega_c}} f_{\vec{k}'} \cdot \sum_{\substack{k>k_F \\ \xi_k<\hbar\omega_c}} \frac{V}{2\epsilon_{\vec{k}} - E}$$

נצמצם $\sum_{k>k_F} f_{\vec{k}}$ לקבל

$$\frac{1}{V} = \sum_{\substack{k>k_F \\ \xi_k<\hbar\omega_c}} \frac{1}{2\epsilon_{\vec{k}} - E}$$

$$= g(E_F)\int_{E_F}^{E_F+\hbar\omega_c} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - E}$$

$$= \frac{1}{2} g(E_F) \ln\left(\frac{2E_F - E + 2\hbar\omega_c}{2E_F - E}\right)$$

נעבור לאינטגרציה על ϵ תוך שימוש בכך שצפיפות המצבים $g(\epsilon)$ ליד $\epsilon=E_F$ שם עיקר תרומתו של האינטגרל קבועה בערך.

$$E \approx 2E_F - 2\hbar\omega_c\, e^{-\frac{2}{g(E_F)\cdot V}}$$

עבור אינטראקציה חלשה כך ש $Vg(E_F) \ll 1$ נקבל ואכן קיבלנו מצב עם אנרגיה הקטנה מ $2E_F$.

שימו לב: 1. המצב קשור גם עבור אינטראקציה חלשה כרצוננו.
2. אנרגיית הקשר $2E_F - E$ לא אנליטית ב V: $2\hbar\omega_c e^{-\frac{2}{g(E_F)V}}$.