עד כה התעלמנו מהעובדה שהאלקטרונים הקשורים משרים בגביש שדות חשמליים המשתנים בהתאם לאופן בו מפוזרים האלקטרונים במערכת. שדות חשמליים אלה מובילים לתופעה חשובה כיאור - סיכוך:
אם נציב לתוך הגביש מטען חיובי (בנוסף לרקע החיובי האחיד הקבוע אותו אנו מניחים כדי לקבל מערכת נייטרלית מלכתחילה) אלקטרונים ימשכו אליו, ויצרו אזור מטען שלילי סביבו שיסכך (ימסך) את השדה הנוצר ממנו.

כדי לטפל בנושא הסיכוך נוח להציג שני פוטנציאלים חשמליים. הראשון ϕ^{ext} נובע ממטען החיובי שהוספנו, לו צפיפות מטען ρ^{ext}. שני גדלים אלה מקושרים ע"י משוואת פואסון

$$-\nabla^2\phi^{ext}(\vec{r},t) = 4\pi\rho^{ext}(\vec{r},t)$$

(אנו עובדים ב 3 מימדים)

הפוטנציאל השני הינו הפוטנציאל החשמלי הכללי ϕ הנובע ממטען החיצוני, האלקטרונים והרקע החיובי האחיד. הוא מקיים

$$-\nabla^2\phi(\vec{r},t) = 4\pi\rho(\vec{r},t)$$

כאשר

$$\rho(\vec{r},t) = \rho^{ext}(\vec{r},t) + \underbrace{\rho^{e}(\vec{r},t) + \rho^{b}(\vec{r},t)}_{\rho^{ind}(\vec{r},t)}$$

מכאן שאנו מתחילים עם מערכת שבה צפיפות המטען האלקטרונית ρ^e שווה בגדלה (למינוס) צפיפות הרקע החיובי. ההפרש בינהם לאחר הכנסת ρ^{ext} הינו צפיפות המטען המושרה ρ^{ind}.

בתנאי ש ϕ^{ext} קטן נוכל להניח שקיים קשר לינארי בינו ובין הפוטנציאל הכללי ϕ. התחום בו הנחה זו נכונה נקרא linear response ובו מתקיים

$$\phi^{ext}(\vec{r},t) = \int d^3r'dt' \, \epsilon(\vec{r},\vec{r}',t,t')\,\phi(\vec{r}',t')$$

בגז אלקטרונים הומוגני ללא שדות חיצוניים נוספים (פרט ל ϕ^{ext}) התלות בזמן ϵ תלוי רק במרחק $\vec{r}-\vec{r}'$ וב $t-t'$

$$= \int d^3r'dt' \, \epsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\,\phi(\vec{r}',t')$$

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ϵ הינה הפונקציה הדיאלקטרית של גז האלקטרונים. היא מקשרת גם בין השדה $\vec{D}$ הנוצר מהמטען החיצוני למערכת ושדה $\vec{E}$ הנוצר מכלל המטענים $\vec{D}(\vec{r},t)=\int d^3r'dt'\,\epsilon(\vec{r}-\vec{r}',t-t')\vec{E}(\vec{r}',t')$ עבור שדות שאינם תלויים במקום ובזמן $\vec{D}(\vec{r},t)=\epsilon\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$ כאשר $\epsilon=\int d^3r'dt'\,\epsilon(\vec{r},t')$, הוא הקבוע הדיאלקטרי.

אם נעבור להצגת Fourier נקבל

$$\epsilon(\vec{r},t)=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\epsilon(\vec{q},\omega)$$

$$\epsilon(\vec{q},\omega)=\int d^3r\,dt\,e^{-i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\epsilon(\vec{r},t)$$

נקבל

$$\phi^{ext}(\vec{q},\omega)=\epsilon(\vec{q},\omega)\,\phi(\vec{q},\omega)$$

או בצורה אחרת

$$\phi(\vec{q},\omega)=\frac{1}{\epsilon(\vec{q},\omega)}\,\phi^{ext}(\vec{q},\omega)$$

כך רואים שהפוטנציאל הכללי מוקטן פי $\frac{1}{\epsilon(\vec{q},\omega)}$ ביחס לפוטנציאל החיצוני.

לצורך חישוב $\epsilon(\vec{q},\omega)$ קל יותר בדרך כלל לחשב את הפונקציה $\chi(\vec{q},\omega)$ (density density corr. fun.) המקשרת בין הפוטנציאל הכללי והצפיפות המטען המושרה:

$$\rho^{ind}(\vec{q},\omega)=\chi(\vec{q},\omega)\,\phi(\vec{q},\omega)$$

אם נרשום את משוואות פואסון של ϕ^{ext} ו-ϕ בהצגת פוריה:

$$q^2\phi^{ext}(\vec{q},\omega)=4\pi\rho^{ext}(\vec{q},\omega)$$
$$q^2\phi(\vec{q},\omega)=4\pi\rho(\vec{q},\omega)$$

נקבל

$$4\pi\underbrace{\left[\rho(\vec{q},\omega)-\rho^{ext}(\vec{q},\omega)\right]}_{\rho^{ind}(\vec{q},\omega)}=q^2\left[\phi(\vec{q},\omega)-\phi^{ext}(\vec{q},\omega)\right]$$

$$\|\qquad\qquad\qquad\qquad\|$$

$$4\pi\chi(\vec{q},\omega)\,\phi(\vec{q},\omega)\qquad q^2\left[1-\epsilon(\vec{q},\omega)\right]\phi(\vec{q},\omega)$$

$$\Rightarrow\boxed{\epsilon(\vec{q},\omega)=1-\frac{4\pi}{q^2}\chi(\vec{q},\omega)}$$

בקירוב Thomas-Fermi מניחים כי $\phi(\vec{r})$ אינו תלוי בזמן ומשתנה על פני סקלות אורך הגדולות בהרבה מ λ_F.
הקירוב מניח כי ניתן לקרב את המצב המקומי של האלקטרונים בנקודה $\vec{r}$ על ידי המצב של גז אלקטרונים חופשיים
בשינוי אחד שהאנרגיות העצמיות של האלקטרונים בו מוסטות ב $-e\phi(\vec{r})$ ביחס למקרה החופשי.
צפיפות האלקטרונים בנקודה $\vec{r}$ בנוכחות הפוטנציאל ϕ היא תהיה לכן

$$n(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \underbrace{\frac{\overset{\text{ספין}}{2}}{e^{\beta\left[\frac{\hbar^2k^2}{2m} - e\phi(\vec{r}) - \mu\right]}+1}}_{\text{מספר האכלוס התרמי של הרמה עם האנרגיה } \frac{\hbar^2k^2}{2m}-e\phi(\vec{r})}$$

צפיפות האלקטרונים בגז ללא הפוטנציאל היא

$$n_0(\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2}{e^{\beta\left[\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu\right]}+1}$$

צפיפות המטען המושרה היא לכן

$$\rho^{ind}(\vec{r}) = (-e)\left[n_0\left(\mu + e\phi(\vec{r})\right) - n_0(\mu)\right]$$

$$\xrightarrow{\phi \text{ קטן}} (-e)\frac{\partial n_0}{\partial \mu}\cdot\phi(\vec{r})$$

$\Leftarrow$ $\chi(\vec{q})$ אינו תלוי ב q, בקירוב זה

$$\chi(\vec{q}) = -e^2\frac{\partial n_0}{\partial \mu}$$

והמקדם הדיאלקטרי בקירוב זה היא

$$\epsilon(\vec{q}) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2}\frac{\partial n_0}{\partial \mu}$$

ונוח לרשום גם כ:

$$= 1 + \frac{k_0^2}{q^2}$$

כאשר k_0: Thomas Fermi wave vector נתון ע"י

$$k_0 = \left[4\pi e^2\frac{\partial n_0}{\partial \mu}\right]^{1/2} \xrightarrow{T \ll T_F} \left[4\pi e^2 g(\varepsilon_F)\right]^{1/2} = \left[\frac{4}{\pi}\frac{me^2}{\hbar^2}k_F\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\cdot(3\pi^2)^{1/6}\left(\frac{n}{a_0^3}\right)^{1/6}$$

כאשר $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ הוא ה Bohr radius

שים לב כי k_0 משתנה כ $n^{1/6}$ וערך מעשי הינו מסדר גודל של $\mathring{A}^{-1}$.

למרחק הזה k_0^{-1} משמעות פיזיקלית ברורה:

נניח כי ρ^{ext} היא מטען Q נקודתי בראשית $\Leftarrow$ $-\nabla^2\phi^{ext}(\vec{r}) = 4\pi Q\,\delta(\vec{r})$

נעבור המשוואה לטרנספורם פורייה לקבל

$$\phi^{ext}(\vec{q}) = \frac{4\pi Q}{q^2}$$

$$\Leftarrow \quad \phi(\vec{q}) = \frac{1}{\epsilon(\vec{q})}\phi^{ext}(\vec{q}) = \frac{4\pi Q}{q^2+k_0^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{4\pi Q}{q^2+k_0^2} \overset{\text{תרגיל}}{=} \frac{Q}{r} e^{-k_0 r}$$

הסיבה גם לכך שהפוטנציאל הכללי נקרא פוטנציאל Yukawa. הוא דועך אקספוננציאלית עבור $r > k_0^{-1}$.
k_0^{-1} נקרא לכן ה screening length.
שים לב שמכיון ש $k_0^{-1} \sim n^{-1/6}$ האזור צפיפות האלקטרונים משפרת הסיכוך (k_0^{-1} קטן), ולהפך אם נקטין את n.

הפונקציה הדיאלקטרית אותה חישבנו בקירוב Thomas Fermi נכונה רק כאשר צפיפות המטען החיצוני ושמה הפוטנציאל הכללי $\phi(\vec{r})$ משתנים לאט על פני סקלה של λ_F. למעשה החישוב שעשינו עבור הפוטנציאל של מטען נקודתי חורג מגבולות השימוש של קירוב זה, למרות שהמסקנה הסופית אלה הגיוני נכונה במקרים בהם צפיפות המטען החיצוני חלקה על פני λ_F.

כדי למצוא את הפונקציה הדיאלקטרית במקרה בו הפוטנציאל משתנה מהר על פני סקלות אורך של λ_F, ובמקרה בו הוא תלוי בזמן נציג את הטיפול של Lindhard, (או RPA).

נניח כי אנו מפעילים ב $t=-\infty$ פוטנציאל חיצוני חלש $\phi^{ext}(\vec{r},t)$. כל עוד פוטנציאל זה חלש ואנו נמצאים בתחום ה linear responce הפוטנציאל הכללי $\phi(\vec{r},t)$ גם הוא יהא קטן (ושווה 0 ב $t=-\infty$) ונוכל לחשב תוך שימוש בתורת ההפרעות התלויה בזמן את האופן בו פונקציות הגל האלקטרוניות משתנות כתוצאה מהימצאות $\phi(\vec{r},t)$.
ב $t=-\infty$ פונקציות אלו הן הגלים המישוריים $|k\rangle$ של גז האלקטרונים החופשי. בסדר הראשון בתורת ההפרעות נקבל שפונקצית הגל שהיו מתוארת $|k\rangle$ משתנה בתמונת האינטראקציה ל

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle_I = |\vec{k}\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{i\frac{E_{k'}-E_k}{\hbar}t'} \langle \vec{k}'|(-e)\phi(r,t')|\vec{k}\rangle \cdot |\vec{k}'\rangle$$

נכתוב את ϕ בהצגת פורייה

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\, \phi(\vec{q},\omega)\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$= |\vec{k}\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} (-e)\,\phi(\vec{q},\omega)\, e^{i\left(\frac{E_{\vec{k}+\vec{q}}-E_{\vec{k}}}{\hbar}-\omega\right)t'} |\vec{k}+\vec{q}\rangle$$

$$= |\vec{k}\rangle + \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}(-e)\,\phi(\vec{q},\omega)\,\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_{\vec{k}+\vec{q}}-E_{\vec{k}}-\hbar\omega)t}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}\,|\vec{k}+\vec{q}\rangle$$

כאשר משתנה האינטגרציה $t'=-\infty$ נעלם כי לפי ההנחה ϕ נעלם שם עם לוקחים את ה $\omega\to\omega+i\delta$.
נחזור ל e $|\Psi\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}|\Psi\rangle_S$ כך שבתמונת שרדינגר $|\vec{k}\rangle$ מתפתח ל

$$|\Psi_{\vec{k}}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\vec{k}}t}\left[|\vec{k}\rangle + \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}(-e)\,\phi(\vec{q},\omega)\,\frac{e^{-i\omega t}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}\cdot|\vec{k}+\vec{q}\rangle\right]$$

אנו מניחים כי ב $t=-\infty$ הרמות $|\vec{k}\rangle$ היו מאוכלסות בהתאם להתפלגות שווי משקל עם מספרי אכלוס מאולצים $f_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}}-\mu)}+1}$. צפיפות האלקטרונים סביב זמן t תהיה לכן

$$\rho(\vec{r},t) = (-e)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\overset{\text{ספין}}{2}\cdot f_{\vec{k}}\,\left|\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2$$

נחשב עד סדר ראשון ב ϕ:

$$= (-e)\int\frac{d^3k}{4\pi^3}f_{\vec{k}}\,|\langle\vec{r}|\vec{k}\rangle|^2 \longleftarrow \text{צפיפות האלקטרונים הלא מופרעת}$$

$$+e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,2f_{\vec{k}}\left[\phi(q,\omega)\frac{e^{-i\omega t}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} + \phi^*(q,\omega)\frac{e^{i\omega t}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right]$$

מכיון ש ϕ ממשי $\phi^*(q,\omega)=\phi(-q,-\omega)$. נשנה משתנים באיבר השני $q\to -q$, $\omega\to-\omega$, $k\to k+q$ ונקבל

$$\rho^{ind}(\vec{r},t) = e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\,e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,2\cdot\frac{f_{\vec{k}}-f_{\vec{k}+\vec{q}}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}\cdot\phi(q,\omega)$$

אז לאחר טרנספורם פוריה הפוך של משוואה זו נקבל כי

$$\chi(\vec{q},\omega) = 2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{f_{\vec{k}}-f_{\vec{k}+\vec{q}}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}+\hbar\omega}$$

לחישוב התגובה הנ"ל כדלקמן:

נתבונן ראשית במצב בו הפוטנציאל אינו תלוי בזמן ($\omega=0$) ומשתנה לאט מאוד במרחב $q\to0$ קבוע

כעת

$$\chi = e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\cdot2\,\frac{f(E_{\vec{k}+\vec{q}})-f(E_{\vec{k}})}{E_{\vec{k}+\vec{q}}-E_{\vec{k}}} \xrightarrow{q\to0} e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,2\,\frac{\partial f(E_{\vec{k}})}{\partial E_{\vec{k}}} = -e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,2\cdot\frac{\partial f(E_{\vec{k}})}{\partial\mu}$$

נעבור מאינטגרציה על $\vec{k}$ לאינטגרציה על ε דרך צפיפות המצבים $g(\varepsilon)$ לקבל

$$= -e^2\int d\varepsilon\, \overset{\text{כולל ספין}}{g(\varepsilon)}\, \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial\mu} = -e^2\frac{\partial}{\partial\mu}\int d\varepsilon\, g(\varepsilon)f(\varepsilon) = -e^2\frac{\partial n_0}{\partial\mu}$$

כמו שמצאנו כבר קודם לכן במסגרת קירוב Thomas Fermi תקף תחת הנחות אלה.

חישוב $\chi(\vec{q})$ עבור $\vec{q}$ כללי (לאו דווקא קטן) כאשר $\omega=0$ וב $T=0$ אינו קשה גם כן:
(השאר חישוב זה כתרגיל)

$$\chi(q) = 2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{f_{\vec{k}}-f_{\vec{k}+\vec{q}}}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}}$$

$$= 2e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,f_{\vec{k}}\left[\frac{1}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}+\vec{q}}}+\frac{1}{E_{\vec{k}}-E_{\vec{k}-\vec{q}}}\right]$$

$$\xrightarrow{T\to 0}\ \frac{e^2}{4\pi^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\int_0^{k_F}dk\,k^2\left[-\frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m}(2kq\cos\theta+q^2)}+\frac{1}{\frac{\hbar^2}{2m}(2kq\cos\theta-q^2)}\right]$$

$$= \frac{me^2}{\pi^2\hbar^2 q}\int_0^{k_F}dk\,k\ln\left|\frac{q^2-2qk}{q^2+2qk}\right|$$

$$= \frac{me^2}{\pi^2\hbar^2}\,\frac{1}{q}\cdot\Big|_0^{k_F}\ -\frac{kq}{2}-\frac{q^2}{8}\ln\left|\frac{q-2k}{q+2k}\right|+\frac{k^2}{2}\left|\frac{q-2k}{q+2k}\right|$$

$$= -e^2\frac{mk_F}{\pi^2\hbar^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1-x^2}{4x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]$$

נסמן $x=\frac{q}{2k_F}$

שימו לב כי $\chi(q)$ ולכן גם $\epsilon(q) = 1-\frac{4\pi\chi(q)}{q^2}$ אינן אנליטיות ב $q=2k_F$. ניתן למצוא את המקור לכך בחדות של פונקציית פרמי ב $T=0$.
כתוצאה מכך אם נעבור על חישוב הפוטנציאל הממוסך של מטען נקודתי נמצא כי במרחק r גדול מהמטען הפוטנציאל מתנהג כ:

$$\phi(r)\sim\frac{1}{r^3}\cos(2k_F r)$$

קיבלנו לכן כי אם אנו לוקחים בחשבון מצב בו ϕ משתנה מהר על פני סקלה של λ_F (בניגוד להנחה של קירוב T-F) הפוטנציאל לא דועך יותר אקספוננציאלית אלא כמו $\frac{1}{r^3}$. בנוסף לכך הוא מבצע אוסצילציות: Friedel oscillations עם וקטור גל של $2k_F$.

נתבונן כעת ב $\epsilon(\vec{q},\omega)$ עבור $\vec{q}$ ו ω סופיים ונשים לב שמכיוון ש $\phi(\vec{q},\omega) = \frac{1}{\epsilon(\vec{q},\omega)} \phi^{ext}(\vec{q},\omega)$

במקרה בו $\epsilon(\vec{q},\omega)=0$ המערכת תגיב בעוצמה רבה מאוד להפרעה קטנה ביותר. למעשה אם $\epsilon=0$ הדבר אומר לנו כי במערכת יכול להתהוות ϕ גם ללא פוטנציאל חיצוני ϕ^{ext}. אלו הם המצבים אשר למערכת ערכים עצמיים עם אנרגיה ω ווקטור גל $\vec{q}$.

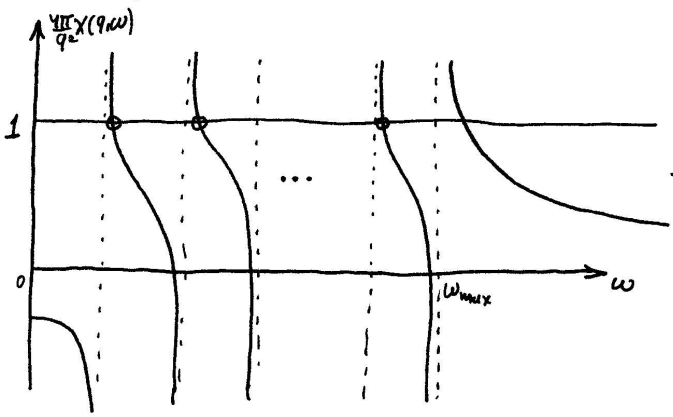
התנאי לקיום של ערכים אלה הוא לכן
$$\frac{4\pi}{q^2}\chi(\vec{q},\omega) = 1$$

נתבונן ב $\chi(\vec{q},\omega)$ של לינדהרד

$$\begin{aligned}
\chi(\vec{q},\omega) &= 2e^2 \sum_{\vec{k}} \frac{f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}+\vec{q}}}{E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}} + \hbar\omega} \\
&= 2e^2 \sum_{\vec{k}} \left[\frac{f_{\vec{k}}(1-f_{\vec{k}+\vec{q}})}{E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}} + \hbar\omega} - \frac{f_{\vec{k}+\vec{q}}(1-f_{\vec{k}})}{E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}} + \hbar\omega} \right] \\
&= 2e^2 \sum_{\vec{k}} \left[\frac{f_{\vec{k}}(1-f_{\vec{k}+\vec{q}})}{E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}} + \hbar\omega} - \frac{f_{-\vec{k}}(1-f_{-\vec{k}-\vec{q}})}{E_{-\vec{k}-\vec{q}} - E_{-\vec{k}} + \hbar\omega} \right] \\
&= 2e^2 \sum_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(1-f_{\vec{k}+\vec{q}}) \left[\frac{1}{E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}+\vec{q}} + \hbar\omega} - \frac{1}{E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}} + \hbar\omega} \right] \qquad : f_{\vec{k}} = f_{-\vec{k}} \\
&\xrightarrow{T\to 0} 2e^2 \sum_{\substack{k<k_F \\ |k+q|>k_F}} \left\{ \frac{1}{\hbar[\omega - \omega_{\vec{k}}(\vec{q})]} - \frac{1}{\hbar[\omega + \omega_{\vec{k}}(\vec{q})]} \right\}
\end{aligned}$$

כאשר $\hbar\omega_{\vec{k}}(\vec{q}) = E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}}$ וזו האנרגיה של עירור אלקטרון-חור בגז האלקטרונים החופשיים בו אנו מעבירים אלקטרון ממצב $\vec{k}$ מתחת ל Fermi Surface למצב $\vec{k}+\vec{q}$ מעל ל F.S.

נתבונן בפונקציה $\frac{4\pi}{q^2}\chi(\vec{q},\omega)$ עבור q נתון כפונקציה של ω. לפונקציה זו יהיו קטבים ב $\omega = \pm\omega_{\vec{k}}(\vec{q})$
(הפונקציה סימטרית ב ω)



הנקודות המסומנות בעיגול מתאימות לעירורי אלקטרון-חור במערכת. שימו לב שהאנרגיות של עירורים אלו זזו מעט ימינה לערכי $\omega_{\vec{k}}(\vec{q})$ של האלקטרונים ללא אינטראקציות.

האנרגיה הגבוהה ביותר האפשרית לעירור אלקטרון חור היא כאשר $k=k_F$ ו־$\vec{k}$ ו־$\vec{q}$ מקבילים אז $\omega_k(\vec{q})=\omega_{max}$

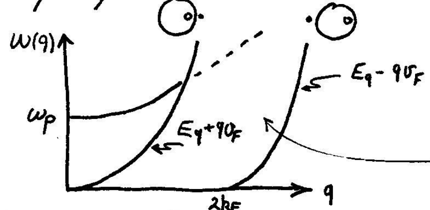
$$\omega_{max} = \frac{k_F q}{m} + \frac{q^2}{2m}$$

אך ראינו גם כי קיים עירור נוסף בעל אנרגיה $\omega>\omega_{max}$
ניתן להראות כי עבור $q \ll \frac{\omega}{v_F}$ ו־$\omega>\omega_{max}$

$$\frac{4\pi}{q^2}\chi(q,\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[1+\frac{3}{5}\left(\frac{q v_F}{\omega}\right)^2+\dots\right]$$

כאשר $\omega_p=\left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{1/2}$ תדירות הפלסמה אותה מצאנו בדיון הקודם ה Drude mode. מכאן אנו מסיקים כי לעירור הזה יש ערכים עם יחס דיספרסיה:

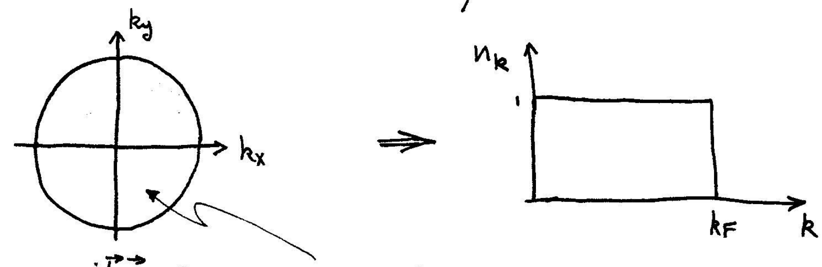
$$\omega(q) = \omega_p\left[1+\frac{3}{10}\frac{v_F^2}{\omega_p^2}q^2+\dots\right]$$



במקרה הדיון הקודם כשעסקנו במודל Drude מצאנו רק את הנקודה $q\to 0$ של עירור זה.
בניגוד לעירורי האלקטרון חור המערבים רק עירור של אלקטרון אחד מתחת לים Fermi הרי שתנודת הפלסמה
הזו מערבת את תנועת כל האלקטרונים יחד: collective mode.

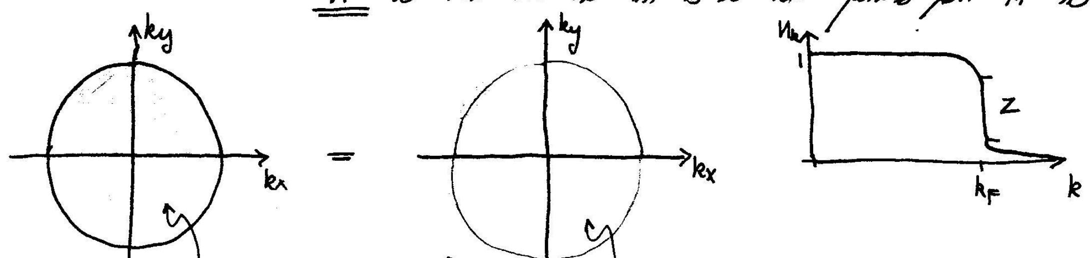
ברצוני לסיים פרק זה בדיון כללי וקצר על השפעת האינטראקציות האלקטרוניות. ראינו כי במקרה ה screening length הינו מסדר גודל של המרחק הבין-אלקטרוני. אנו מגיעים לכך כי האינטראקציות ישנו באופן משמעותי את המסקנות הנובעות ממודל האלקטרונים החופשיים בו השתמשנו (ונמשיך להשתמש) לתאור מתכות. היה זה לנדאו (Landau) שהראה כי כל עוד אנו מתעניינים בתכונות הנקבעות על ידי האלקטרונים ליד משטח פרמי ובטמפרטורות הנמוכות $T\ll T_F$ ניתן להמשיך לתאר את המערכת בקירוב כאוסף חלקיקים חופשיים (או בעלי אינטראקציה חלשה ליתר דיוק) המקיימים את עקרון פאולי. חלקיקים אלה אינם האלקטרונים המקוריים אלא עצמים מורכבים יותר הנקראים quasi particles ושונים במסתם מהאלקטרונים. באופן גס ה quasi particle הינו האלקטרון המקורי בתוספת ענן העירורים שהוא מושך בתנועתו סביבו (עירורי אלקטרון-חור). מסתו גדולה יותר מהאלקטרון החופשי כתוצאה מענן זה הנישא איתו. תאור זה נכון כל עוד האינטראקציות אינן חזקות מאוד או מושכות (מקרה בו מתקבלות בטמפרטורות נמוכות מצבי על-מוליכות).

מערכות בהן התאור של Landau תקף נקראות בשם Fermi liquid (נוזל פרמי).
ב Fermi liquid קיימת התאמה חד-חד ערכית בין המצבים של הגז החופשי לאלה של המערכת עם אינטראקציות
למשל מצב היסוד של הגז החופשי הינו כדור פרמי האלקטרוני המלא



המצב הינו אלקטרון עם פונקצית גל $\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

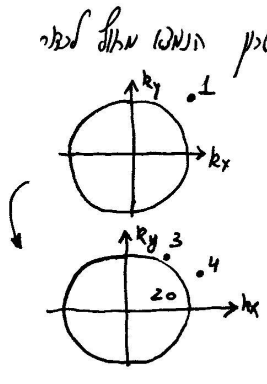
אם נדליק באופן אדיאבטי את האינטראקציות מצב זה יהפוך למצב היסוד של ה Fermi liquid. מכיון
(הפעלת אינטראקציה לכן qp)
שה q.p הינם פרמיונים מצב יסוד זה יהיה כדור פרמי מלא של qp



מצבים של qp עם תנע $\vec{k}$ = מצבים של אלקטרונים עם פונקצית גל $\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

מכיון שה q.p הינו אלקטרון + ענן של זוגות אלקטרון-חור במונחי המצבים האלקטרוניים מצב זה אינו כדור המלא באופן חד אלא מבוזר סביב משטח פרמי. עדיין קיימת קפיצה ב $k=k_F$ בגרף המומנטום n_k אך קפיצה זו קטנה מ 1 ונהוג לסמנה ב Z. גודלו של Z תלוי בחוזק האינטראקציות והוא מגדיר כמה ה qp קרוב או רחוק מהאלקטרון החופשי.

באופן דומה המצב המעורר בגז החופשי בו בנוסף לכדור פרמי המלא קיים אלקטרון הנמצא מחוץ לכדור יתאים למצב דומה עבור q.p.



בין שני מצבים אלה קיים יחס עם זמן חיים סופי. בעוד שהמצב האלקטרוני החופשי הינו מצב עצמי (מעורר) של המערכת הרי שהמצב המקביל עבור qp אינו מצב עצמי. הסיבה היא האינטראקציה שעדיין קיימת בין qp. בעקבות אינטראקציות אלה המצב ההתחלתי יכול לדעוך למצב בו ה qp מעביר אנרגיה המתאימה ליצור זוג q.p + quasi hole.

נרצה לחשב את זמן החיים של המצב ההתחלתי בעל אנרגיה ϵ_1 כתוצאה מהדעיכה שלו למצבים הסופיים מהסוג שתארנו. נעשה זאת ב $T=0$ תוך הנחה ש V קבוע ואינו תלוי בתנע.
נשתמש ב Fermi golden rule כדי לקבל

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{2\pi}{\hbar}|V|^2 \underbrace{\rho_f(\epsilon_1)}$$

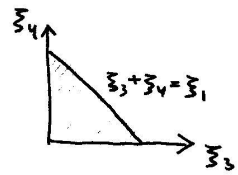
צפיפות המצבים הסופיים עם אנרגיה ϵ_1

המצב הסופי מורכב מ N q.p. במצבים עם ϵ_4 ו ϵ_3 החלקיקים כתוצאה מעקרון פאולי צריכים להיות מעל לפרמי
כלומר ⇐ $\epsilon_3>\epsilon_F$, $\epsilon_4>\epsilon_F$! ו quasi hole ב ϵ_2 ⇐ $\epsilon_2<\epsilon_F$.
אם נסמן ב $\xi=\epsilon-\epsilon_F$ ו $g(\xi)$ את צפיפות המצבים הגז חלקיקים נקבל

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{2\pi}{\hbar}|V|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2\, g(\xi_2)\theta(-\xi_2)\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_3\, g(\xi_3)\theta(\xi_3)\int_{-\infty}^{\infty} \xi_4\, g(\xi_4)\theta(\xi_4)\delta(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4)$$

בחישוב זה אנו מתעלמים מהדרישה הנוספת של שימור התנע בתהליך, כלומר: $\vec{k}_1=\vec{k}_3+\vec{k}_4-\vec{k}_2$.
ניתן להראות כי השמטת דרישה זו אינה משנה את התוצאה שנקבל מהשיקול הנ"ל (בכל מקרה התוצאה הנ"ל תהווה חסם תחתון על זמן החיים. הדרישה הנוספת רק יכולה להגדיל את חיי הדעיכה).

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_1} = \frac{2\pi}{\hbar}|V|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_3\, d\xi_4\, \underbrace{\theta(\xi_1-\xi_3-\xi_4)\theta(\xi_3)\theta(\xi_4)}\, g(\xi_3+\xi_4-\xi_1)g(\xi_3)g(\xi_4)$$



$$= \frac{2\pi}{\hbar}|V|^2 \int_0^{\xi_1} d\xi_3 \int_0^{\xi_1-\xi_3} d\xi_4\, g(\xi_3+\xi_4-\xi_1)g(\xi_3)g(\xi_4)$$

$$\simeq \frac{2\pi}{\hbar}|V|^2 g_0^3 \int_0^{\xi_1} d\xi_3 \int_0^{\xi_1-\xi_3} d\xi_4$$

עבור q.p. ליד משטח פרמי (ξ_1 קטן) נוכל לקרב
$g_0=g(\xi=0)$

$$= \frac{\pi}{\hbar}|V|^2 g_0^3\, \xi_1^2$$

שים לב כי זמן החיים של ה q.p. מתבדר ($\frac{1}{\tau_1}$ קטן) ככל שהוא קרוב יותר למשטח פרמי (ξ_1 קטן יותר)
זמן החיים הוא אינסופי עבור q.p. בעלי אנרגית פרמי.

באופן כללי יותר נקבל שעבור אינטראקציה חלשה מספיק בין qp כך ש $g_0 V < 1$ ומכיון ש $g_0 \sim \frac{1}{\epsilon_F}$ מתקיים עבור $\xi \ll \epsilon_F$

$$\frac{1}{\tau_1} \ll \xi$$

משמעות הדבר שמצבי ה qp מוגדרים היטב ליד משטח פרמי - מכיון שהרוחב האנרגטי של המצבים קטן מאוד ביחס לאנרגיה שלהם. מסיבה זו ניתן להחליף את האלקטרונים ב qp במודל בהם השתמשנו.
ניתן להראות כי בטמפרטורה סופית (וכן חישוב מפורט יותר) ש

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{\pi |V|^2}{64 \epsilon_F^3} \left[(\pi T)^2 + \xi^2 \right]$$

ולכן הרוחב האנרגטי מתנהג כ ξ^2 או T^2 - בהתאם לגדול מבין שניהם.
מכיון שראינו כי תכונות המערכת נקבעות על ידי האלקטרונים ליד משטח פרמי כל עוד השפעת המעורבים הינם באנרגיות הקטנות מאוד מ ϵ_F והטמפרטורה נמוכה בהרבה מ T_F נקבל כי שימוש במודל בו מוחלפים האלקטרונים מוחלפים ב qp. עם מסה השונה ממסת האלקטרון החופשי יתאר באופן סביר את תכונות המערכת כל עוד האינטראקציה לא חזקה מדי.
במהלך 20 השנים האחרונות התגלו מספר גדול של מערכות בהן הנחות ה Fermi liquid אינן מתקיימות - לדוגמא הרוחב האנרגטי של ה qp גדול מהאנרגיה שלהם עובדה האומרת שכל מושג ה qp הופך חסר משמעות