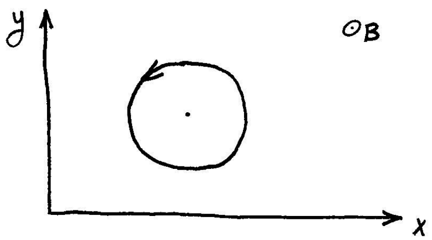
בשיעור זה אספר לכם בקצרה על הבעיה של חלקיק טעון (אלקטרון) הנע במישור דו-מימדי תחת השפעת שדה מגנטי הניצב למישור. נראה כי התאור הקוונטי של הבעיה מוליך לתופעה יחודית: אפקט הול הקוונטי עבורו ניתנו כבר שני פרסי נובל.

נתחיל בהצגת התאור הקלאסי של התנועה. נתבונן באלקטרון (מטען $-e$, $e>0$) הנע במישור x-y עם שדה מגנטי אחיד B לאורך ציר z.



האלקטרון נע במעגל כתוצאה מכח לורנץ $-\frac{e}{c}\vec{V}\times\vec{B}$ הפועל עליו.
נסמן ב R את רדיוס המעגל ונקבל מהחוק השני של ניוטון לתנועה מעגלית

$$V=\frac{eB}{mc}\cdot R \quad \Leftarrow \quad \frac{e}{c}V\cdot B = m\frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{eB}{mc}$$

תדירות הסיבוב (cyclotron frequency)

קלאסית רדיוס הסיבוב ומרכז המעגל (x_0,y_0) שרירותיים $(E\propto R^2)$.

נתבונן בתאור הקוונטי של הבעיה. ההמילטוניאן הינו
(נתעלם מ לשדה המגנטי)

$$H=\frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{P}}+\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \quad ; \left(\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

בהצבת אופרטורי המהירות אותם נמצא ממשוואות הייזנברג לאופרטור $\vec{r}$ ההמילטוניאן נתן לכתיבה גם כ:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{[\vec{r},H]}{i\hbar}=\frac{\vec{P}}{m}+\frac{e}{mc}\vec{A}$$

$$H=\frac{m}{2}\left(\hat{V}_x^2+\hat{V}_y^2\right)$$

אלא שאופרטורי $\hat{V}_x$ ו $\hat{V}_y$ אינם מתחלפים

$$[V_x,V_y]=\frac{e^2}{mc}\left\{[P_x,A_y]+[A_x,P_y]\right\}$$

$$=\frac{e^2}{mc}(-i\hbar)\left(\partial_x A_y-\partial_y A_x\right)$$

$$=-i\hbar\frac{e^2}{mc}\cdot B$$

יש ברשותנו החופש לבחור את הכיול בו נפתור את הבעיה. כדאי לנצל חופש זה כדי להביא אותה לצורה הפשוטה ביותר.

נבחר לעבוד בכיול לנדאו (Landau gauge) $\vec{A}=(0,\ BX)$

בו ההמילטוניאן הינו

$$H=\frac{\hat{P}_x^2}{2m}+\frac{1}{2m}\left(\hat{P}_y+\frac{eB}{c}X\right)^2$$

מכיון ש $[H,\hat{P}_y]=0$: בכיול זה, ניתן למצוא פונקציות עצמיות סימולטניות של H ו־$\hat{P}_y$. נבחר

$$\Psi=\frac{1}{\sqrt{L_y}}e^{\frac{i}{\hbar}P_y y}\varphi(x)$$

ונציב במשוואת שרדינגר ל־Ψ; $H\Psi=E\Psi$ כדי לקבל משוואת שרדינגר אפקטיבית ל־φ:

$$E\varphi=\left[\frac{\hat{P}_x^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}(X-X_0)^2\right]\varphi$$

כאשר $X_0=-\frac{P_y}{m\omega}$ (שימו לב: כאן P_y הינו מספר - הערך העצמי של $\hat{P}_y$).
זוהי משוואה לאוסצילטור הרמוני סביב הנקודה X_0. היא ניתנת לכתיבה גם כך:

$$E\varphi=\frac{\hbar\omega}{2}\left[-l_B^2\partial_x^2+\left(\frac{X-X_0}{l_B}\right)^2\right]\varphi$$

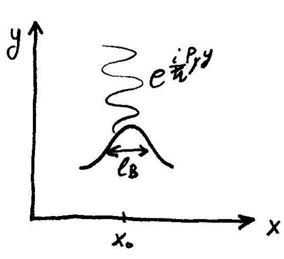
כשהגדרנו את האורך המגנטי (magnetic length) $l_B=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$: רדיוס הסיבוב
והוצאנו החוצה את אנרגיה $\frac{\hbar\omega}{2}$.

הפתרונות ל־φ הינם הפתרונות המוכרים לאוסצילטור ההרמוני

$$\varphi_n(x)=C_n e^{-\frac{(X-X_0)^2}{2l_B^2}}H_n\left(\frac{X-X_0}{l_B}\right)$$

$$C_n=2^{-\frac{n}{2}}(n!)^{-1/2}\pi^{-1/4}l_B^{-1/2}$$

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$



בכיול זה פונקציות הגל מוגבלות לאזור באורך מסדר גודל l_B לאורך ציר X אבל מתפרשות על כל המערכת לאורך ציר y : זהו ביטוי לעקרון אי הוודאות

שימו לב כי המצבים שמצאנו מנוונים בימד. האנרגיה אינה תלויה כלל ב $P_y \Leftrightarrow X_0$. עובדה נכונה
גם קלאסית. נמצא את גודל הניוון.

נניח תנאי שפה מחזוריים בציר y $\Leftarrow$ $\Delta P_y = \frac{2\pi\hbar}{L_y} \Rightarrow \Delta X_0 = \frac{2\pi}{L_y}\frac{\hbar}{m\omega}$

אם אורך המשטח בציר x הוא L_x נוכל לספור כמה מצבים:

$$2\frac{L_x}{\Delta X_0} = 2\cdot L_x L_y \cdot \frac{m\omega}{2\pi\hbar}$$

ספין

$$= \frac{1}{\pi}\frac{A}{\ell_B^2}$$

A: שטח המישור

$$= 2\frac{\Phi}{\phi_0}$$

$\Phi = AB$ שטף השדה המגנטי דרך המישור

$\phi_0 = \frac{hc}{e}$: flux quantum

כל רמה (רמת Landau) מנוונת בניוון מאקרוסקופי הפרופורציוני לגודל המישור ולעוצמת השדה המגנטי.

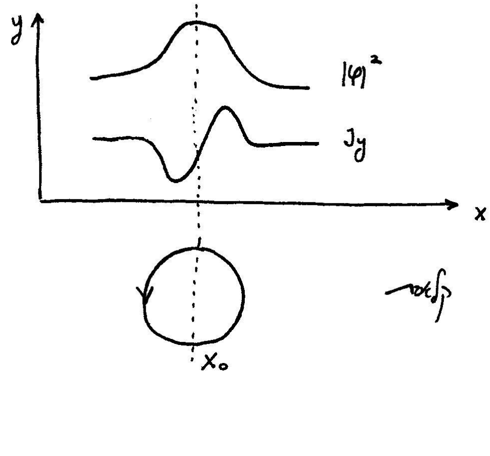
ניתן להבין היקשר הזה כמייצג תנועת האלקטרונים במעגלים לאורך כל המישור. כדוגמה ניקח אלקטרונים במוליך למחצה GaAs
בו לאלקטרונים מסה אפקטיבית $m^* = 0.065 m_e$. בשדות מגנטים מסדר גודל של 10 טסלה
$\omega \sim 10^{13}$ Hz , $\ell_B \sim 100$ Å.

זכרו כי צפיפות הזרם של המצבים שמצאנו היא:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi\right) + \frac{e}{mc}\vec{A}|\psi|^2$$

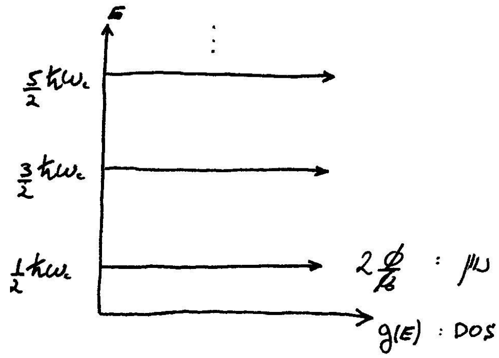
בכיוון שלנו $J_x = 0$ מכיוון ש $\psi^* \partial_x \psi$ ממשי ו $A_x = 0$.

$$J_y = \left[\frac{\hbar}{m}\frac{P_y}{\hbar} + \frac{eB}{mc}x\right]|\varphi|^2 = \omega(x - X_0)|\varphi|^2$$



נקבל כמו לבעיה הקלאסית:

נתבונן בספקטרום שמצאנו:



נניח כי במערכת N אלקטרונים ונתבונן בהתנהגות הפוטנציאל הכימי ב $T=0$ (כך שהוא שווה לאנרגיה של הרמה העליונה המאוכלסת) עם השדה המגנטי.

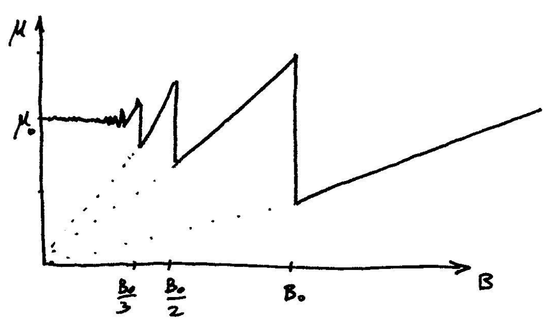
בשדות מגנטיים גבוהים כך ש $N < 2\frac{\Phi}{\Phi_0}$ כל האלקטרונים נמצאים ברמת לנדאו הראשונה. הפוטנציאל הכימי יהיה לכן
$$\mu = \frac{1}{2}\hbar\omega_c = \frac{1}{2}\frac{\hbar e}{mc}B$$

עם הקטנת השדה המגנטי ניוון הרמות קטן עד שכאשר $N = 2\frac{\Phi}{\Phi_0}$ האלקטרונים יתחילו לאכלס את רמת לנדאו השניה. הדבר מתרחש כאשר השדה המגנטי הוא
$$B = B_0 = \frac{n\Phi_0}{2} \qquad \left(n = \frac{N}{A}\right)$$

בנקודה זו הפוטנציאל הכימי קופץ מ $\mu = \frac{1}{2}\mu_0$ ל $\mu = \frac{3}{2}\mu_0$ כאשר
$$\mu_0 = \frac{\hbar e}{mc}B_0 = \pi\frac{\hbar^2}{m}n$$
הוא הפוטנציאל הכימי (כמו פרמי) ב $B=0$.

אם נמשיך להקטין את השדה המגנטי ונקטין את ניוון הרמות הפוטנציאל הכימי ישנה כ: $\mu = \frac{3}{2}\frac{\hbar e}{mc}B$ עד שבנקודה $2\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{N}{2} \Leftrightarrow B = \frac{B_0}{2}$ רמת לנדאו השלישית תתחיל להתמלא. הפוטנציאל הכימי יקפוץ מ: $\mu = \frac{3}{2}\cdot\frac{\hbar e}{mc}\cdot\frac{B_0}{2} = \frac{3}{4}\mu_0$ ל $\mu = \frac{5}{2}\frac{\hbar e}{mc}\frac{B_0}{2} = \frac{5}{4}\mu_0$

באופן כללי μ עובר קפיצות כאשר $B = \frac{B_0}{i}$ עבור i שלם כאשר הוא מתקרב בהתמדה לערכו ב $B=0$



כפונקציה של $\frac{1}{B}$ μ מבצע קפיצות ל
$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{B_0} = \frac{2}{n\Phi_0}$$

התנהגות מחזורית דומה ב $\frac{1}{B}$ נצפה בכל גודל התלוי בצפיפות המצבים ב E_F. ב $T=0$ כמעט כל
התכונות האלקטרוניות במתכות נובעות מתוך הצפיפות הזו. נתבונן בגודל אחד: המגנטיזציה: $M=-\frac{\partial\Omega}{\partial B}$
כאשר Ω היא ה grand partition function

$$\Omega=-k_BT\sum_i \ln\left[1+e^{-\beta(E_i-\mu)}\right] \qquad \beta=\frac{1}{k_BT}$$

נתבונן בגבול $T\to 0$

$$\Omega_{T\to0}=\sum_i (E_i-\mu)\,\theta(\mu-E_i)$$

במקרה שלנו

$$=2\frac{\phi}{\phi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\hbar\omega_c\left(n+\frac12\right)-\mu\right]\theta\left[\mu-\hbar\omega_c\left(n+\frac12\right)\right]$$

נסמן ב $\bar{n}$ את הערך השלם של $\frac{\mu}{\hbar\omega_c}-\frac12$

$$=2\frac{\phi}{\phi_0}\sum_{n=0}^{\bar n}\hbar\omega_c\left(n+\frac12\right)-\mu$$

נסמן $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\left(n+\frac12\right)\right)$

$$=2\frac{\phi}{\phi_0}\int_0^{\bar x}dx\,f(x)\left[\hbar\omega_c x-\mu\right]$$

כאשר $\bar{x}=\frac{\mu}{\hbar\omega_c}$

כדי לחשב את ההתנהגות האוסצילטורית נפרש את $f(x)$ כטור פורייה: $f(x)=1+2\sum_{p=1}^{\infty}\cos 2\pi p\left(x-\frac12\right)$

$$=2\frac{\phi}{\phi_0}\int_0^{\bar x}\left[1+2\sum_{p=1}^{\infty}\cos 2\pi p\left(x-\frac12\right)\right]\left(\hbar\omega_c x-\mu\right)$$

$$=2\frac{\phi}{\phi_0}\left[-\frac{\mu^2}{2\hbar\omega_c}-\frac{\hbar\omega_c}{2\pi^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\left[1-\cos 2\pi p\cdot\frac{\mu}{\hbar\omega_c}\right]\right]$$

ניתן לראות כי Ω מכיל חלק אוסצילטורי $\cos\left(\frac{\mu mc}{\hbar e}\cdot\frac{2\pi}{B}\right)$ עם מחזור

נקרב את הפוטנציאל הכימי שלו עבור $B=0$: $\frac{\pi\hbar^2}{m}n$ $\qquad \Delta\left(\frac{1}{B}\right)=\frac{\hbar e}{mc\mu}=\frac{2}{n\phi_0}$

באופן דומה גם המגנטיזציה תציג התנהגות אוסצילטורית כזו: אפקט De Haas - van Alphen
ניתן לראות כי קיימים גם איברים עם תדירות גבוהה יותר שהן הרמוניות של התדירות הבסיסית הנ"ל. אבל
אלה מדועכים ע"י האיבר $\frac{1}{p^2}$ וניתן להראות כי הן מדועכות אקספוננציאלית מהר יותר בטמפרטורה סופית.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

נעבור להתבונן בתנועת האלקטרון הנע בשני ממדים תחת השפעת שדה מגנטי קבוע הניצב למישור ובנוסף נוסף פוטנציאל התלוי בקואורדינטה x בלבד: $U(x)$.

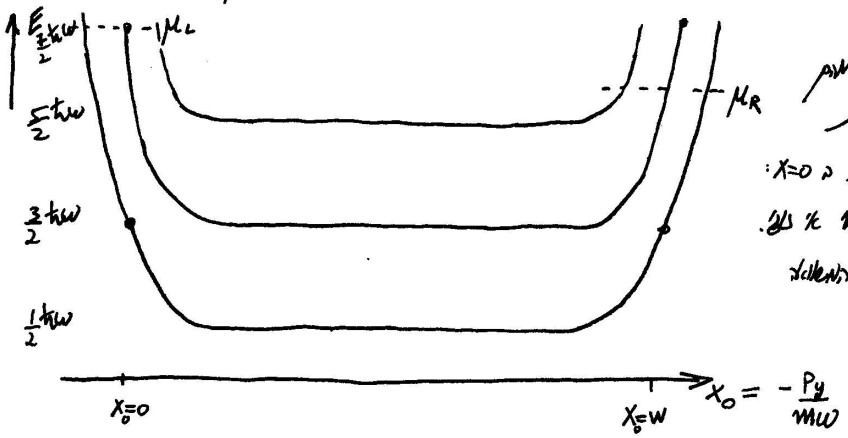
לצורך הדגמה נעסוק במקרה בו האלקטרון מוגבל לנוע בפס $0<x<W$ דהיינו

$$U(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<W \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

כדי לשמור על $[H,\hat{P}_y]=0$ נבחר גם הפעם בכיול $\vec{A}=(0,Bx)$. שים לב כי במקרה זה ובניגוד למקרה הקודם הכיול $(-By,0)$ אינו מאפשר פתרון פשוט לבעיה מכיון ש $[H,\hat{P}_x]\neq 0$ מפאת $U(x)$.
בכיול זה P_y הינו מספר קוונטי טוב ונחפש פתרון מהצורה

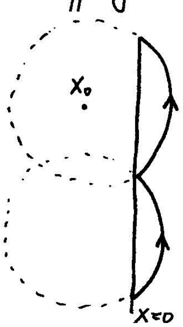
$$\psi(x,y)=e^{\frac{i}{\hbar}P_y y}\varphi(x)$$

כדי שנמצא $\varphi(x)$ צריך לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית המתאימה לאוסצילטור הרמוני סביב $X_0=-\frac{P_y}{m\omega}$ אלא שהפעם במקום תנאי השפה $\varphi(-\infty)=\varphi(\infty)=0$ עלינו לקיים $\varphi(0)=\varphi(W)=0$.
מכיון ש $\varphi_n(x)$ המתאימה לאוסצילטור ההרמוני מרוכזת בטווח $\sqrt{n}\,\ell_B$ סביב X_0 אזי נצפה שהיא לא תושפע באופן משמעותי כל עוד X_0 מרוחק מהקירות מרחק גדול מזה. כאשר X_0 קרוב מספיק לקירות פונקצית הגל צריכה להשתנות כדי לענות על האוסצילטור החדש ואיתה גדלה גם האנרגיה:



לדוגמא ב $X_0=0$ אנו יודעים מהן הפתרונות: אלו הן הפונקציות של האוסצילטור ההרמוני המתאפסות ב $x=0$: הפונקציות הן עבור n אי זוגי. עבור X_0 אחרים יש לפתור המשוואה נומרית.

כאשר המצבים עם אנרגיות השונות מהאנרגיה של האוסצילטור החופשי מתאימים skipping orbits בהם האלקטרונים מתנגשים על הקירות.
לדוגמא עבור $X_0<0$:



מהי המהירות, או ליתר דיוק ערך התוחלת של אופרטור המהירות, של מצבים אלה? מתוך ידיעת $\varphi(x)$ ניתן לחשב זאת. אני אראה דרך חלופית שמשמשת אותנו גם בהמשך.

כפי שראינו לאחר ההצבה $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}P_y y}\varphi(x)$, φ מקיים את המשוואה
כאשר ההמילטוניאן האפקטיבי ל φ הינו פונקציה של P_y

$$E\varphi = H(P_y)\varphi$$

$$H(P_y) = \frac{\hat{P}_x^2}{2M} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{P_y}{m\omega} + X\right)^2 + U(X)$$

נניח כי מצאנו את הפונקציות והערכים העצמיים של $H(P_y)$ ועכשיו נחשב כיצד האנרגיות העצמיות משתנות כשמשנים את $H(P_y+\Delta P_y)$ עבור ΔP_y קטן. נתייחס ל $H(P_y+\Delta P_y) - H(P_y)$ כהפרעה קטנה ונחשב בתורת ההפרעות מסדר ראשון

ההפרעה השווה ל $H(P_y)$ מאושרת לסדר ראשון ב ΔP_y

$$H(P_y+\Delta P_y) - H(P_y) = \frac{m\omega^2}{2}\cdot 2\left(\frac{P_y}{m\omega} + X\right)\frac{\Delta P_y}{m\omega}$$

$$= \omega\left(\frac{P_y}{m\omega} + X\right)\Delta P_y = \hat{V}_y \Delta P_y$$

השינוי בסדר ראשון ב E_n:

$$\Delta E_n = \langle \varphi_n | H(P_y+\Delta P_y) - H(P_y) | \varphi_n \rangle$$

$$= \langle \varphi_n | V_y | \varphi_n \rangle \cdot \Delta P_y$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_n | V_y | \varphi_n \rangle = \frac{\partial E_n}{\partial P_y}$$

ללא $U(x)$ E_n אינה תלויה ב P_y ולכן $\langle V_y \rangle = 0$.
בנוכחות $U(x)$ E_n תלויה ב P_y (דרך X_0). ליד $X_0=0$ היא פונקציה יורדת של X_0 ולכן עולה של P_y ושם $\langle V_y \rangle > 0$. התופעה ההפוכה קיימת ליד $X_0=W$. בהתאמה ל skipping orbits הקלאסיים.

הזרם החשמלי הנישא על ידי מצב עם X_0 כלשהו הוא:

$$I_{X_0} = \frac{(-e)}{L_y}\frac{\partial E_n(P_y)}{\partial P_y} = \frac{e}{L_y}\frac{1}{m\omega}\frac{\partial E_n(X_0)}{\partial X_0}$$

הזרם הכולל בכבל (Hall bar)
כאשר רק הרמה התחתונה מלאה

$$I = \sum_{X_0} I_{X_0} = \frac{e}{L_y}\frac{1}{m\omega}\frac{1}{\Delta X_0}\sum_{X_0}\frac{\partial E_n(X_0)}{\partial X_0}\Delta X_0$$

$$\longrightarrow \frac{e}{h}\int_{X_{0L}}^{X_{0R}}\frac{\partial E_n}{\partial X_0}dX_0 = \frac{e}{h}(\mu_R - \mu_L)$$

$$\Delta X_0 = \frac{h}{m\omega}\frac{1}{L_y}$$

כאשר $\mu_{L,R}$ היה האנרגיה של המצב העליון המאוכלס בדופן השמאלית והימנית של ה Hall bar

במקרה בו יש n רמות לנדאו מלאות נקבל $I = n\frac{e}{h}(\mu_R-\mu_L)$

$\frac{\mu_R-\mu_L}{e}$ היה הפרש הפוטנציאלים שמודד וולטמטר בין שתי השפות אז בעולם

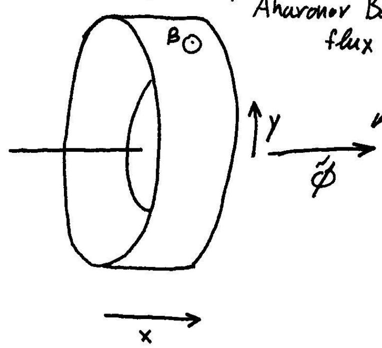
עבור n רמות מלאות נקבל

$$I_y = n\frac{e^2}{h}V_x \Rightarrow \sigma_{yx} = n\frac{e^2}{h}$$

$\longrightarrow$ המנה הקוונטית למוליכות

ניתן לראות זאת בדרך נוספת: נסגור את ה Hall bar למעגל לאורך ציר y:

ונעביר שטף מגנטי $\tilde{\phi}$ לאורך קו שהוא מחוץ בתוך המעגל Aharonov Bohm flux



קו שטף זה מתואר ע"י הוקטור פוטנציאל $A_x=0$

$$A_y = \frac{\tilde{\phi}}{L_y}$$

נשים לב שאם נסתובב במישור הנ"ל סביב קו השטף

$$\oint \vec{A}\,d\vec{l} = \tilde{\phi}$$

ואם נבחר את מסלול האינטגרציה לאורך המעגל ואת $\vec{A}$ כפי שהוצג למעלה נקבל את הדרוש.

במקרה זה ההמילטוניאן שלנו היה

$$H = \frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left[\hat{P}_y + \frac{e}{c}\left(BX + \frac{\tilde{\phi}}{L_y}\right)\right]^2$$

קל לראות שאם נבחר $\psi = e^{\frac{i}{\hbar}\left(P_y - \frac{e}{c}\frac{\tilde{\phi}}{L_y}\right)y}\varphi(x)$, $\varphi(x)$ תקיים אותה המשוואה כמו קודם לכן. ההבדל הוא שכעת בגלל תנאי השפה המחזוריים של ψ לאורך ציר y ערכי P_y המותרים משתנים לפי

$$P_y - \frac{e}{c}\frac{\tilde{\phi}}{L_y} = \frac{2\pi}{L_y}\cdot\hbar\cdot \text{integer}$$

$$\Rightarrow P_y = \frac{h}{L_y}\left(\text{integer} + \frac{\tilde{\phi}}{\phi_0}\right)$$

לכן אם נגדיל את $\tilde{\phi}$ מ 0 ל ϕ_0 P_y ישתנה ב $\frac{h}{L_y}$ $\Leftarrow$ X_0 ישתנה ב $\Delta X_0 = -\frac{1}{m\omega}\frac{h}{L_y}$

כלומר כל מצב יעבור למצב השכן אליו כאשר רק X_0 יקטן ב ΔX_0.

התוצאה הכוללת של הגדלת השטף מ 0 ל ϕ_0 תהיה לכן במקרה בו n רמות לנדאו מלאות העברת n אלקטרונים מהשפה ב $X=W$ לשפה ב $X=0$. $\Leftarrow$ $I_x = -\frac{n(-e)}{\Delta t}$

כאשר Δt היה הזמן בו שונה השטף.

מצד שני מחוק פרדיי $\oint E_y\,dy = \frac{1}{c}\frac{\Delta\tilde{\phi}}{\Delta t}$ $\Leftarrow$ $E_y = -\frac{1}{L_y c}\frac{\phi_0}{\Delta t}$

$$J_x = \frac{I_x}{L_y} = -ne\frac{c}{\Phi_0}E_y \qquad \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = -\nu\frac{e^2}{h}$$

התוצאה הזו אינה מפתיעה היא מזדהה עם התוצאה הקלאסית שקיבלנו ממודל Drude. קיבלנו אותה עבור המצב בו $\nu = \frac{N}{\Phi/\Phi_0}$ כלומר ν רמות לנדאו מלאות. ניתן להראות שקיבלנו כי אם הרמה העליונה אינה מלאה עדיין נקבל התוצאה הקלאסית:

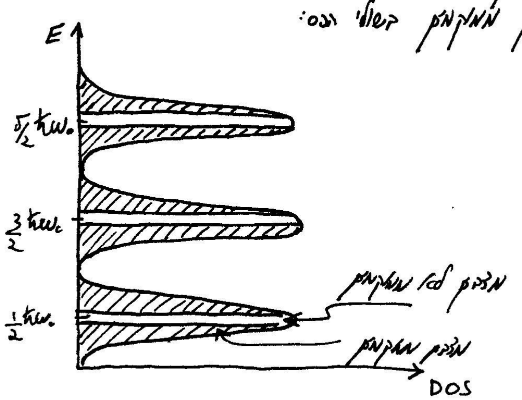
$$\sigma_{xy} = -\frac{N}{\Phi/\Phi_0}\frac{e^2}{h} = -\frac{\overset{\text{צפיפות האלקטרונים}}{n_e} ec}{B}$$

$$\Rightarrow \rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{B}{n_e ec}$$

כאשר $\sigma_{xx}=0$ או לפחות $\sigma_{xx}\ll\sigma_{xy}$

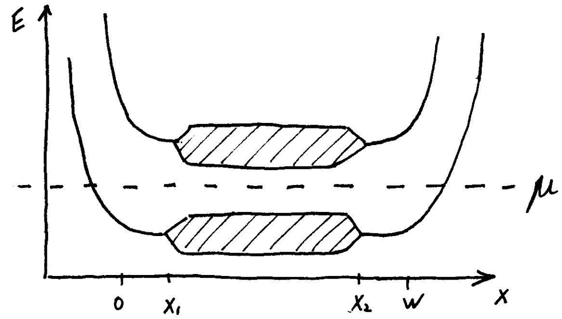
ב 1980 גילה von Klitzing ש ρ_{xy} מפגינה מישורים כפונקציה של B סביב ערכי B בהם מספר שלם של רמות לנדאו מלאות. עבור אותם ערכי B התנגדות האורך נעלמת - ראו גרף שהוצג לעיל. זהו אפקט הול הקוונטי השלם integer quantum Hall effect. מוליכות Hall מקוונטת במישורים אלו לערכים $\nu\frac{h}{e^2}$ בדיוק מוחלט של 10^{-10}. Laughlin סיפק את ההסבר הבסיסי לאפקט מיד לאחר גילויו (אי הסדר הקיים בדגמים ממלא בו תפקיד מרכזי).

כפי שראינו בדגם הנקי כל המצבים היו מצבים שאינם ממוקמים. הם גלים חופשיים בכיוון y ולכן יכולים לשאת זרם בכיוון זה. מסתבר כי כשנכניס אי סדר מרבית המצבים הופכים למצבים הממוקמים בשני הכיוונים המרחביים ולכן אינם יכולים לשאת זרם: כל רמת לנדאו מתרחבת לרצועה בה קיימים מצבים לא ממוקמים ליד מרכז הרמה ומצבים ממוקמים בשוליים כנ"ל:



כאשר אנו מעלים את B הפוטנציאל הכימי נע לרמות נמוכות יותר.
כאשר μ נמצא באזור המצבים הממוקמים מוליכות Hall אינה משתנה ונתונה על ידי $\nu\frac{e^2}{h}$ כאשר ν הוא מספר רמות לנדאו מתחת ל μ.
ניתן להראות כי למרות שיש לנו כאן מצבים לא ממוקמים מאוכלסים ומוסיף למקרה הנקי לא אלה נושאי זרם גדול יותר כך שבסך הכל המוליכות נתונה על ידי הביטוי הנ"ל.
כאשר μ נמצא באזור המצבים הלא ממוקמים σ_{xy} משתנה כאשר μ נע דרכם.

Halperin נתן את הניתוח הבא למאמר הנ"ל. נתבונן ב Hall bar הטבעתי שלנו ונניח כי
אי הסדר קיים רק באזור המרכזי $(0<)\ X_1<X<X_2\ (<W)$.
במקרה זה אנו מצפים כי המצבים המרוכזים באזורים $X_2<X<W$, $0<X<X_1$ יהיו קרובים מאוד למצבים
המחושבים כבר קודם. בפרט הם יהיו לא ממוקמים לאורך ציר y ויתאימו ל skipping orbits קלאסיים.
באזור האמצעי הלא מסודר המצבים הנקיים שהיו נמצאים יהפכו לבסוף לאוסף של מצבים שרובם ממוקם



נניח כי הפוטנציאל הכימי נמצא בין שני פסים ממוקמים.

נחזור כעת אל הטבעת כאשר נפעיל את ה AB flux דרך הטבעת. כאשר נגדיל את השטף ב ϕ_0
אנו יודעים מה יקרה למצבים הלא ממוקמים באזורים $X_2<X<W$! $0<X<X_1$: הם יזוזו למצב עם X_0
הבא ב ΔX_0. המצבים הממוקמים לעומת זאת לא ישתנו. הם יקבלו פקטור פאזה $e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{c}\frac{\phi}{L_y}y_0}$
כאשר y_0 היא המיקום לאורך ציר y בו המצב ממוקם.
כעת נראה כי אם נניח שבאזור הלא מסודר יש רק מצבים ממוקמים נקבל סתירה. נניח שלאחר
הגדלת ϕ ב ϕ_0 נקבל "חור" ליד X_1, אלקטרון נוסף מעל μ ליד $X=0$, חור תחת μ ליד $X=W$
ואלקטרון נוסף ליד $X=X_2$ שמכיון שלפי הנחה אין לו לאן ללכת בתוך האזור הלא מסודר (כל המצבים שם
ממוקמים ולא השתנו בעקבות הגדלת השטף) הגענו לכדי סתירה לעקרון הנ"ל. בסך הכל אנו מוצאים
כי האנרגיה של ה Hall bar לאחר שינוי השטף עלתה ב $\hbar\omega_c$ יחסית לאנרגיה של המצב ההתחלתי
אבל העובדה שבמצב ההתחלתי, האנרגיה לפי שינוי השטף, עושה את המעבר מתאפס: היא שווה
ל $\int J_y E_y dx$ ומכיון שאין זרם במצב בו $J_y=0$ נובע הדבר. הגענו לכן לסתירה.
כתוצאה מכך חייב להיות מצב לא ממוקם אחד במרכז הרמה באזור הלא מסודר שהאלקטרון
שבו יעבור לאזור $X<X_1$, האלקטרון הנוסף המגיע מימין מהאזור $X_2<X$ יגיע אליו.
בסך הכל נקבל שבדיוק שינוי השטף יזיז אלקטרון אחד לכל רמת לנדאו מ $X=W$ ל $X=0$
לכן מוליכות Hall נשמרת כפי שחושבה במקרה הנקי, כל עוד μ נמצא בין
האנרגיות של המצבים הלא ממוקמים. כשמשנים את B μ יעבור דרך כל אחד מהם באזור של המצבים
הלא ממוקמים - שם σ_{xy} אינה מקוונטטת.
ניתן להראות מהנדסה שקיימים מישורים נוספים ב ρ_{xy} כאשר מצבים רמת לנדאו התחתונה מלאה באופן חלקי
- fractional quantum Hall effect - נושא לכל פרק בפני עצמו!