מכניקה סטטיסטית א' - תרגיל בית מספר 4

1. א. הפונקציה היוצרת של משתנה אקראי X מוגדרת על־ידי $f(k) = \langle e^{ikX} \rangle$. הראו ש- $\langle X^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n f}{dk^n}$ וחשבו את הפונקציה היוצרת של משתנה אקראי גאוסי עם תוחלת וסטיית תקן נתונים. ב. הפונקציה $f_c(k) = \log f(k)$ היא פונקצייה יוצרת קומולנטים: על־פי הגדרה הקומולונט $\langle\langle X^n \rangle\rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n f_c}{dk^n}$. חשבו את הקומולנטים ממעלה 1 עד 4 של משתנה אקראי כללי במונחי המומנטים שלו, והראו שכל הקומולנטים ממעלה 3 ויותר של משתנה אקראי גאוסי הם 0.

2. מודל מציאותי יותר של ריסון הוא כזה שבו כח הריסון תלוי לא רק במהירות הרגעית אלא גם במהירות בזמנים קודמים

$$\frac{du}{dt} = -\int_{-\infty}^{t} dt' \gamma(t-t') u(t') + \xi \tag{1}$$

כאשר $\gamma(t)$ היא פונקציה שדועכת לאפס בזמנים מספיק ארוכים. חשבו את פונקציית הקורלציה $\langle \tilde{u}(\omega) \tilde{u}(\omega')^* \rangle$, של $\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$ בהנתן $\tilde{\gamma}(\omega)$ וה־power spectrum $\tilde{\xi}(\omega)$ של הרעש. ב. מה צריך להיות $\tilde{\xi}(\omega)$ כדי שהאנרגיה הקינטית $\langle \frac{mu^2}{2} \rangle$ תהייה שווה ל- $\frac{T}{2}$.

3. א. חשבו את צפיפות ההתפלגות $p_t(\vec{r})$ של המקום בזמן t של חלקיק בראוני שבזמן 0 היה ב־$\vec{r}_0$, והראו ש־$p_t(\vec{r})$ היא פתרון של משוואת דיפוזיה ב. חשבו את צפיפות ההתפלגות $p_t(\vec{r})$ של המקום בזמן t של חלקיק בראוני שבזמן 0 צפיפות התפלגות שלו היא פונקציה שרירותית $p_0(\vec{r})$. מה צריכה להיות $p_0(\vec{r})$ על מנת ש־$p_t(\vec{r})$ תהייה גאוסית.

4. חוק סטוקס אומר שכח הגרר שמפעיל נוזל בעל צמיגות דינמית η על כדור ברדיוס a שנע במהירות מספיק נמוכה הוא $\vec{F} = -6\pi a \eta \vec{v}$. נסתכל על תווך נוזלי שמכיל כדורים בעלי רדיוס זהה a בצפיפות אחידה n ליחידת נפח. א. חשבו את השונות $\langle \Delta N^2 \rangle$ של מספר הכדורים בנפח V בהנחה שמיקומי הכדורים בלתי־תלויים מבחינה סטטיסטית. ב. נניח שחצי מהכדורים טעונים במטען זהה q וחצי במטען $-q$. חשבו את המוליכות החשמלית של התווך ואת הפלוקטואציות בזרם בו בשיווי משקל.