מכניקה סטטיסטית א' - תרגיל בית מספר 1

מועד הגשה: יום ה' 26.11.09

1. עבור חלקיק ספין $\frac{1}{2}$, נגדיר את המצבים העצמיים$\langle\downarrow|,\langle\uparrow|$ של s_z, עם ערכים עצמיים $\pm\frac{\hbar}{2}$ בהתאמה. א. הראו שכל מצב $\alpha|\uparrow\rangle+\beta|\downarrow\rangle$ (עם $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$) הוא מצב עצמי של $\vec{s}\cdot\hat{n}$ עבור וקטור יחידה $\hat{n}$ כלשהו, בעוד שמדידת $\vec{s}\cdot\hat{n}$ תיתן $\pm\frac{\hbar}{2}$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ לכל $\hat{n}$ במצב מעורב שהוכן ב־$|\uparrow\rangle$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ וב־$|\downarrow\rangle$ בהסתברות $\frac{1}{2}$. ב. הראו שהמטריצה $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (בבסיס $\langle\downarrow|,\langle\uparrow|$) היא אופרטור הצפיפות של מערכת שהוכנה בהסתברות $\frac{1}{3}$ במצב עצמי עם ערך עצמי $+\frac{\hbar}{2}$ של כל אחד מהאופרטורים s_x, $\frac{-s_x\pm\sqrt{3}s_y}{2}$.

2. נתונה מערכת סגורה של ספינים $\frac{1}{2}$ בעלי מומנט דיפול מגנטי m בהשפעת שדה מגנטי H, עם אנרגיה כוללת $E=(1-2\alpha)mHN$. חשבו את $\langle E\rangle$ ואת σ_E בתת־מערכת שמכילה $\frac{N}{2}$ ספינים. חשבו את ההסתברות שהאנרגיה של תת־המערכת היא 0 עבור $\alpha=\frac{1}{3}$. מה צריך להיות N כדי שההסתברות תהיה קטנה מ־10^{-100}?

3. א. חשבו את האנטרופיה $S(E)$ של מערכת סגורה המורכבת מ־N אוסצילטורים הרמוניים בעלי תדר זהה ω, עם אנרגיה כוללת E. חשבו את ההתנהגות האסימפטוטית של S עבור $E\gg N\hbar\omega$. ב. חשבו את $S(E)$ באמצעות מכניקה סטטיסטית קלאסית, ומצאו את תחום התקפות של הקירוב.

4. א. חשבו את סטיית התקן σ_E באוסצילטור הרמוני עם תדר ω מצומד לאמבט חום בטמפרטורה T. חשבו את ההתנהגות האסימפטוטית של σ_E בגבולות $T\ll,\gg\hbar\omega$. ב. חשבו את האנרגיה החופשית, האנטרופיה, והאנרגיה של מערכת של N אוסצילטורים הרמוניים בעלי תדר זהה ω מצומדת לאמבט חום בטמפרטורה T, והראו ש־$S(E)$ המתקבל זהה לזה של תרגיל 3.

5. חשבו את הנפח ושטח הפנים של כדור במרחב בעל N ממדים. רמז: ניתן להיעזר באינטגרלים גאוסיים.

6. חשבו את האנטרופיה, האנרגיה וקיבול החום בנפח קבוע של א. גז אידיאלי מונואטומי בעל ספין כולל $S>0$, בהנחה שמצבים בעלי m_S שונים מנוונים. ב. גז אידיאלי דו־אטומי הטרונוקלארי, כלומר המולקולות מורכבות משני אטומים שונים. בהזנחת רמות האנרגיה הויברציוניות והאלקטרוניות, ההמילטוניאן של המולקולה במערכת מרכז המסה שווה ל־$H_{\rm int}=\frac{L^2}{2I}$, כאשר $\vec{L}$ הוא וקטור התנע הזויתי המולקולרי, ו־I מומנט ההתמד שלה. הניחו ש־$T\gg\frac{\hbar^2}{I}$.

7. קיבול החום בלחץ קבוע מוגדר על־ידי $C_p=T(\frac{\partial S}{\partial T})_P$. בעזרת יחסי מקסוול, מצאו זהות תרמודינמית שמקשרת את C_v ו־C_p, שממנה נובע ש־$C_p>C_v$. חשבו את C_p-C_v בגז אידיאלי.

8. א. הראו שבתהליכים ספונטניים שמתרחשים במערכת שהטמפרטורה והלחץ בה קבועים, פוטנציאל גיבס יכול רק לרדת, $dG\leq 0$ כאשר אי השיויון מתייחס לתהליכים בלתי־הפיכים. ב. הראו שניתן לגזור את התפלגות גיבס הגרנד־קנונית מהדרישה שמערכת פתוחה בשיווי משקל מביאה את הפוטנציאל התרמודינמי Ω למינימום.