Jonathan FREUNDLICH

SUR L'ESPACE-TEMPS ET LA CAUSALITE EN RELATIVITE RESTREINTE

La représentation de l'espace et du temps est un questionnement qui traverse les ages et les civilisations. Notre expérience de l'espace et du temps est tout d'abords une expérience subjective, à partir de laquelle nous sommes amenés à imaginer un espace et un temps plus universels, cadres de notre perception, qui permettraient d'accorder notre perception avec celle des autres êtres humains. Ainsi, Henri Bergson écrit : *« nous percevons le monde matériel, et cette perception nous paraît, à tord ou à raison, être à la fois en nous et hors de nous »*[1]. Le caractère irréversible (anisotrope) du temps nous pousse à le traiter de manière radicalement différente de l'espace, et ce d'autant plus que nous rencontrons une certaine difficulté à isoler conceptuellement l'instant[2].

La Physique, c'est à dire l'étude de la nature et du monde qui nous entoure, nécessite une description précise de l'espace et du temps, sans faire appel à la subjectivité de l'observateur. L'espace euclidien est apparu historiquement comme une réponse adéquate a notre perception intuitive de l'espace physique : Il serait le cadre homogène et continu des mouvements et des phénomènes physiques.

> *« Il est homogène (sans région privilégiée), isotrope (sans direction privilégiée), infini (sans bornes), continu (sans éléments ultimes).[...] C'est précisément parce qu'il est un pur réceptacle, vide de lui-même et indifférent à son contenu, qu'il peut faire l'objet d'une géométrie a priori, totalement indépendante de la physique qui, au contraire, le présuppose »*

(R. Blanché, *La Science actuelle et le rationalisme*, PUF)

Ainsi, lorsque Newton pose les bases de la mécanique classique en 1685, il présuppose l'existence d'un espace et d'un temps universels et absolus.

> *« L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile »*
>
> *« Le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule indifféremment et s'appelle durée »*

(Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* 1685)

La relativité restreinte va continuer à utiliser un cadre spatio-temporel abstrait, mais l'espace et le temps ne vont plus être considérés comme des absolus et vont être étroitement liés l'un à l'autre. Après avoir précisé le référentiel de l'observateur, les évènements physiques sont déterminés par quatre coordonnées, trois d'espace et une de temps. L'espace à quatre dimensions ainsi conçu est appelé *espace-temps*. Il reste néanmoins un certains nombre de postulats sur la nature de cet espace-temps, postulats qui, comme nous le verrons, suffisent à définir le cadre conceptuel de la relativité restreinte et nous permettrons de retrouver la notion intuitive de causalité.

---

1 H. Bergson, *Durée et Simultanéité*

2 Saint Augustin, Confessions : *« Comment donc, ces deux temps, le passé et l'avenir, sont-ils, puisque le passé n'est plus et l'avenir n'est pas encore? Quant au présent, s'il était toujours présent, s'il n'allait pas rejoindre le passé, il ne serait pas du temps, il serait l'éternité. »*

I / Construction d'un invariant à partir des propriétés de l'espace-temps relativiste[3]

1) Postulats

La relativité restreinte introduit un nouveau cadre afin de décrire les lois de la nature de manière plus cohérente que la mécanique classique. Ce nouveau cadre, défini par un certains nombres de postulats, s'identifie à l'ancien lorsqu'on considère des systèmes mus par des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière.

- Tout d'abords, bien que cela ne soit souvent pas mentionné, tellement cela paraît évident, nous postulons la validité de notre approche des évènements en Physique : **chaque événement est défini par trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps**. Cela semble bien naturel, correspondant à notre vision du monde, mais d'une certaine manière, cela signifie que nous regardons désormais l'univers (qui pourrait exister sans référence à l'homme) par les yeux de l'homme et même par ce que nous croyons -peut être à tord- être le regard de l'homme.

- **Homogénéité de l'espace-temps** : On ne se préoccupe pas de l'influence de la matière sur l'espace temps et on postule que celui-ci est homogène, c'est-à-dire ayant les mêmes propriétés en chaque point de l'espace et à n'importe quel instant. Les origines des repères et des référentiels sont arbitraires pour pour l'expression des lois physiques.

- **Isotropie de l'espace** : On postule que l'espace est isotrope, c'est-à-dire que toutes les directions dans l'espace sont équivalentes.

- **Principe de relativité** : Étant donné qu'il est impossible de déceler le mouvement absolu d'un référentiel en mouvement rectiligne uniforme et que l'on cherche en Physique à énoncer des lois de la nature avec une exigence d'universalité[4], il est nécessaire que les lois physiques puissent être énoncées dans tous les référentiels en translation rectiligne uniforme, appelés référentiels galiléens. On postule donc l'existence de référentiels dans lesquels les lois physiques ont la même forme.

- **Causalité** : on suppose que la notion de causalité a toujours un sens en relativité restreinte. Ainsi, si un phénomène E_1 est cause d'un autre phénomène E_2, alors E_1 doit avoir lieu avant E_2, et l'énoncé « E_2 a lieu après E_1 » est intrinsèque, c'est-à-dire indépendant du référentiel choisi.

3 Dans cette première partie, je suis la démarche d'Henri Poincaré, reprise par Jean Hladik et Michel Chrysos dans *Introduction à la relativité restreinte* (DUNOD)

4 Nous admettons que cette approche est pertinente, car sinon la Physique perd son sens.

Historiquement, ces postulats ne sont pas les seuls qu'Einstein utilisa (parfois de manière implicite), puisqu'il ajouta en tant que postulat issu de l'expérimentation le postulat de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. En fait, l'existence d'une vitesse limite est déductible des autres postulats, vitesse limite que l'on peut à posteriori assimiler à la vitesse de la lumière. Ainsi que l'a énoncé Jean-Marc Levy-Leblond et que le rappellent Jean Hladik et Michel Chrysos dans *Introduction à la relativité restreinte*, la forme de postulat que donne Einstein à l'invariance de la vitesse de la lumière serait même déstabilisateur, dans la mesure où rien ne semble nous pousser à croire que les propriétés de l'espace et du temps soient tributaires de celles de la lumière :

« Pourtant, la démarche heuristique d'Einstein, toute couronnée de succès et justifiée historiquement qu'elle ait pu être, n'est guère satisfaisante sur le plan épistémologique. La principale critique que l'on peut lui adresser est d'établir ce que nous avons appelé une « super-loi », appelée à régir tous *les phénomènes physiques en définissant leur cadre spatio-temporel commun à partir des propriétés d'un agent physique particulier : comment comprendre, dans une telle perspective, que la relativité einsteinienne, fondée sur l'analyse de la seule propagation de la lumière, ait vocation à s'appliquer aux interactions nucléaires, de nature pourtant essentiellement différente – et y soit effectivement valide ? »*
(J. M. Lévy-Leblond, *Aux contraires*)

2) La transformation spéciale de Lorentz-Poincaré

Le référentiel par rapport auquel sont définies les grandeurs physiques n'est qu'un intermédiaire, tandis que les phénomènes physiques possèdent un caractère « intrinsèque ». Afin de rendre compte de l'équivalence des différents référentiels galiléens pour décrire les phénomènes physiques, il est nécessaire de posséder des formules permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre. En relativité restreinte, ce sont les **formules de transformation de Lorentz-Poincaré** qui permettent de passer des coordonnées d'un référentiel galiléen à un autre. Il est possible d'établir ces formules de transformation uniquement à partir des propriétés postulées de l'espace et du temps et du principe d'équivalence.

On considère un évènement quelconque. Dans le référentiel galiléen **(R)**, cet évènement est repéré dans l'espace par ses coordonnées cartésiennes **x,y,z** et dans le temps par une valeur de temps **t**. On considère un autre référentiel **(R')** en translation uniforme à la vitesse **v** par rapport à **(R)** dans lequel l'évènement considéré est repéré dans l'espace et dans le temps par les coordonnées **x',y',z',t'**. On se ramène au cas ou cette translation s'effectue selon l'axe des x et on choisit comme « évènement zéro » la coïncidence entre les deux repères à **t = t' = 0**.

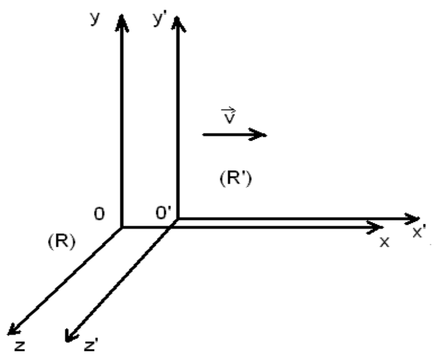


Figure 11: (R') en translation par rapport à (R)

On cherche des relations entre les deux systèmes de coordonnées **x,y,z,t** et **x',y',z',t'**. Afin de respecter les propriétés d'homogénéité de l'espace et du temps, les formules cherchées doivent être linéaires :

$$\begin{cases} x'=a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 t \\ y'=a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2 t \\ z'=a_3 x+b_3 y+c_3 z+d_3 t \\ t'=a_4 x+b_4 y+c_4 z+d_4 t \end{cases}$$

1. *Considérations géométriques – structure de l'espace-temps*

- **Montrons tout d'abords que x' et t' ne dépendent que de x et t**

On a $\mathbf{x'=a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 t}$
Par rotation autour de (Ox) ou (O'x'), y et z se transforment, contrairement à x et t.
Par rotation de $\pi/2$: $\mathbf{x'=a_1 x+b_1 z-c_1 y+d_1 t}$ et $\mathbf{(b_1+c_1)y=(b_1-c_1)z}$ pour tout couple (y,z)
Par rotation de $-\pi/2$: $\mathbf{x'=a_1 x-b_1 z+c_1 y+d_1 t}$ et $\mathbf{(b_1-c_1)y=-(b_1+c_1)z}$ pour tout couple (y,z)
Par conséquent $\mathbf{(b_1+c_1)^2+(b_1-c_1)^2=0}$ et $\mathbf{b_1=c_1=0}$ d'où $\mathbf{x'=a_1 x+d_1 t}$

De même $\mathbf{t'=a_4 x+d_4 t}$, et comme les coefficients dépendants *a priori* de v.

$$\begin{cases} x'=a_1(v)x+d_1(v)t \\ t'=a_4(v)x+d_4(v)t \end{cases} \qquad (1)$$

- **Montrons ensuite que y' ne dépend que de y et z' que de z**

On a $\mathbf{y'=a_2x+b_2y+c_2z+d_2t}$
Par rotation de $\pi/2$ autour de (Ox), cette relation devient $\mathbf{z'=a_2x+b_2z-c_2y+d_2t}$
Par symétrie par rapport au plan (xOy), on obtient $\mathbf{y'=a_2x+b_2y-c_2z+d_2t}$
et $\mathbf{-z'=a_2x-b_2z-c_2y+d_2t}$
En identifiant les différentes expressions de y', $\mathbf{c_2z=-c_2z}$ pour tout z, d'où $\mathbf{c_2=0}$
En identifiant les différentes expressions de z', $\mathbf{a_2=d_2=0}$
Et il vient alors

$$\begin{cases} y'=a_2x+b_2y+d_2t \\ z'=b_2z \end{cases}$$

Or les directions Oy (O'y') et Oz (O'z') sont équivalentes, donc il est nécessaire d'avoir des relations semblables, et comme les coefficients dépendent *a priori* de v,

$$\begin{cases} y'=a(v)y \\ z'=a(v)z \end{cases} \qquad (2)$$

On a donc finalement

$$\boxed{\begin{cases} x'=a_1(v)x+d_1(v)t \\ t'=a_4(v)x+d_4(v)t \\ y'=a(v)y \\ z'=a(v)z \end{cases}} \qquad (3)$$

- **Transformation de x et de t**

x' et t' dépendent linéairement de x et t.

- On considère le mouvement de l'origine (O') de (R') dans le référentiel (R):
  $x'=0 \Leftrightarrow x-vt=0$ d'où : x' = a_1(v) (x-vt)
  x' = γ(v) (x-vt) en notant γ(v) = a_1(v)

- De manière symétrique pour le mouvement de (O) (x=0) dans (R') :

$$-v=\frac{x'}{t'}=\frac{-\gamma(v)vt}{d_4(v)t}=-v\frac{\gamma(v)}{d_4(v)} \quad \text{d'où} \quad d_4(v)=\gamma(v)$$

On a donc
$$\begin{cases} x'=\gamma(v)(x-vt) \\ t'=\gamma(v)t+a_4(v)x \end{cases}$$

Ce qui peut être récrit
$$\begin{cases} x'=\gamma(v)(x-vt) \\ t'=\gamma(v)(t-\alpha(v)x) \end{cases} \qquad (4)$$

2. Principe d'équivalence

- **Groupe des transformations de Lorentz-Poincaré**

Le principe de relativité nécessite que l'ensemble des transformations cherchées, pour des vitesses v quelconques, forme un *groupe,* au sens mathématique.

Définition d'un groupe : Un ensemble G d'éléments quelconques A, B, C, etc... muni de la loi # de composition interne (le composé A#B de deux éléments quelconques de G est un élément de G) est un groupe si la loi # vérifie :
- la loi # est associative ($\forall (A,B,C)\in G^3, (A\#B)\#C=A\#(B\#C)$)
- il existe un élément neutre E ($\forall A\in G, A\#E=E\#A=A$)
- tout élément a un inverse ($\forall A\in G, \exists A', A\#A'=A'\#A=E$)

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des transformations T_i qui permettent le passage d'un référentiel équivalent à un autre et on note par le symbole # la loi de composition entre deux transformations de ce type. Ainsi on note T_1 la transformation des coordonnées qui fait passer d'un référentiel galiléen R à un autre R', T_2 lors du passage de R' à R" et T_3 de R à R". **$\mathcal{T}$ doit former un groupe quand les référentiels considérés sont équivalents** puisqu'on a les propriétés suivantes :

- *la loi # est une loi de composition interne* : les passages de R à R' puis de R' à R" correspondent à une transformation T_1 # T_2 qui conduit à une même transformation T_3 que lors du passage direct de R à R" ; on a donc $T_1 \# T_2 = T_3$ et la composée appartient à $\mathcal{T}$;
- *associativité* : les éléments de $\mathcal{T}$ sont des transformations ;
- *élément neutre* : La transformation identité T_0 qui fait correspondre les coordonnées de R à elles mêmes est une transformation de $\mathcal{T}$ et constitue son élément neutre ;
- *inverse* : Si la transformation T_1 fait passer de R à R', on repasse de R' à R par la transformation inverse, notée T_1^{-1}, appartenant également à $\mathcal{T}$. Étant revenu au référentiel initial, on a $T_1 \# T_1^{-1} = T_0$ et de même $T_1^{-1} \# T_1 = T_0$.

Selon la propriété de groupe des transformations de Lorentz-Poincaré, si l'on effectue deux transformations successives de systèmes de coordonnées, la transformation composée doit être de même forme que chacune des transformations initiales. On considère trois référentiels R, R' et R". La vitesse de R' par rapport à R est égale à v ; celle de R" par rapport à R' à u (toujours dans la direction Ox).

- **<u>Transformation de x et t : valeur de</u>** $\gamma(v)$

On a : $\begin{cases} x' = \gamma(v)(x - vt) \\ t' = \gamma(v)(t - \alpha(v)x) \end{cases}$ ainsi que : $\begin{cases} x'' = \gamma(u)(x' - ut') \\ t'' = \gamma(u)(t' - \alpha(u)x') \end{cases}$

En combinant ces relations, on obtient :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(u)\gamma(v)[1 + u\alpha(v)](x - \dfrac{u+v}{1+u\alpha(v)}t) \\ t'' = \gamma(u)\gamma(v)[1 + v\alpha(u)](t - \dfrac{\alpha(u)+\alpha(v)}{1+v\alpha(u)}x) \end{cases} \qquad (5)$$

Notons w la vitesse du référentiel R" par rapport à R. Les coordonnées précédentes sont de la forme générale :

$$\begin{cases} x'' = \gamma(w)(x - wt) \\ t'' = \gamma(w)(t - \alpha(w)x) \end{cases}$$

Les expressions de $\gamma(w)$ qui figurent dans (5) devant être identiques, on a :

$$[1 + u\alpha(v)] = [1 + v\alpha(u)]$$

D'où $\dfrac{\alpha(v)}{v} = \dfrac{\alpha(u)}{u} = b$ où b est une constante, comme les vitesses u et v sont arbitraires.

La fonction $\alpha(v)$ est donc de la forme :

$$\alpha(v)=b\,v$$

De plus, compte tenu de la forme des équations (5), la vitesse relative est exprimée par :

$$w=\frac{u+v}{1+b\,vu} \qquad (6)$$

La fonction $\gamma(v)$ s'obtient à partir de la transformation inverse :

Si on a $\begin{cases} x'=\gamma(v)(x-vt) \\ t'=\gamma(v)(t-bvx) \end{cases}$

en utilisant la propriété de groupe des transformations de Lorentz-Poincaré, on doit avoir

$$\begin{cases} x=\gamma(-v)(x'+vt') \\ t=\gamma(-v)(t'-\alpha(-v)x') \end{cases}$$

Or le postulat d'isotropie de l'espace garantie une invariance par réflexion et implique donc qu'on ait $\gamma(-v)=\gamma(v)$

et $\alpha(-v)=-\alpha(v)$

(en effet, par réflexion, on a $\begin{cases} -x'=\gamma(-v)(-x+vt) \\ t'=\gamma(-v)(t+\alpha(-v)x) \end{cases}$ en plus de $\begin{cases} x'=\gamma(v)(x-vt) \\ t'=\gamma(v)(t-\alpha(v)x) \end{cases}$)

D'où : $\begin{cases} x=\gamma(v)(x'+vt') \\ t=\gamma(v)(t'+bvx') \end{cases}$

et : $\begin{cases} x=\gamma^2(v)(x-vt+v[t-bv\,x])=\gamma^2(v)[1-bv^2]x \\ t=\gamma^2(v)(t-bvx+bv[x-vt])=\gamma^2(v)[1-bv^2]t \end{cases}$

D'où : $\gamma(v)=\dfrac{1}{\sqrt{1-b\,v^2}}$

On a retenu la valeur positive de $\gamma(v)$ car c'est la seule compatible avec $\gamma(0)=1$ (correspondant à la transformation identité).

- **<u>Transformation de y et z : valeur de a(v)</u>**

On a $y'=a(v)y$ et $y''=a(u)y'$ d'où $y''=a(v)a(u)y$

Or pour v = 0, on doit avoir a(0) = 1 et a(-v) = a(v) puisque la vitesse relative entre deux référentiels est le long de l'axe Ox dans le cas des transformations spéciales.

Si l'on passe de R à R' puis de R' à R (u = -v), on revient au référentiel de départ :

$$y=y''=a(-v)\,y'=a(-v)a(v)\,y=a(v)^2\,y$$

D'où a(v) = 1 (on élimine la valeur négative car a(0) = 1)

On a donc établi a partir de la structure postulée de l'espace-temps et du principe d'équivalence des formules de transformations pour les coordonnées dans des référentiels galiléens :

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-bvx) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-bv^2}}$$

La valeur de b dépend évidemment du système d'unités. Le paramètre $\gamma(v)$ devant être sans dimension, la dimension de b est donc celle de l'inverse du carré d'une vitesse. Notons alors b sous la forme :

$|b|=\frac{1}{\chi^2}$, χ étant une vitesse inconnue

- **Si b = 0**, alors $\gamma(v)=1$ et on retrouve les transformations de Galilée utilisées en mécanique classique, et on est de nouveau confronté aux difficultés de cette théorie à harmoniser mécanique et électromagnétisme.
- **Si b < 0**, ce n'est pas acceptable physiquement.

  En effet, soit il n'existe pas de vitesse limite et alors dans la formule (6) : $w=\frac{u+v}{1+bvu}$, u et v peuvent avoir des valeurs positives quelconques et la vitesse résultante w peut être négative (à cause du terme en bvu au dénominateur) ; soit il existe une vitesse finie V_l et l'application de la formule (6) pour u et v inférieure à V_l peut aboutir à une vitesse résultante w supérieure à V_l, ce qui est contraire à l'hypothèse.
- **Si b > 0**, χ apparaît comme une vitesse limite, étant donné que $1-bv^2 > 0$.

Nous avons donc établi l'existence d'une vitesse limite uniquement à partir des propriétés supposées de l'espace et du temps et du principe d'équivalence. L'expérience montre que seule la vitesse de la lumière vérifie cette propriété, ce qui nous conduit à identifier χ et la vitesse de la lumière dans le vide c, pour obtenir les formules de transformation de Lorentz-Poincaré[5] :

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

5 Ces formules sont souvent appelées transformations de Lorentz, nom attribué par Henri Poincaré en hommage au physicien H. A. Lorentz (H. Poincaré, Note à l'académie des Sciences, 1905, *« Sur la dynamique de l'électron »)*, qui en donna les premières expressions. Mais c'est H. Poincaré qui les établi rigoureusement en 1905, revenant sur le principe d'équivalence et sur les propriétés de l'espace et du temps.

Remarques :

On peut écrire les transformations de Lorentz-Poincaré sous une forme matricielle : il s'agit alors explicitement d'appliquer une transformation linéaire au vecteur colonne des coordonnées spatio-temporelles dans un certain référentiel pour obtenir le vecteur colonne des coordonnées correspondantes dans un autre référentiel. On peut aussi utiliser une coordonnée ct au lieu de la coordonnée temporelle t pour que toutes les coordonnées soient homogènes à une distance :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & 0 & -\gamma(v)\frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(v)\frac{v}{c} & 0 & 0 & \gamma(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Pour des vitesse v telles que $\frac{v}{c} \ll 1$, on retrouve les formules de transformations de Galilée utilisées en mécanique classique :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Cela était nécessaire pour garantir la validité de la relativité restreinte dans des conditions où la mécanique classique était bien vérifiée, c'est-à-dire, à posteriori, lorsque les vitesses des systèmes considérés sont très petites par rapport à la vitesse de la lumière.

3) L'invariant relativiste

De même que l'on définit en géométrie euclidienne la distance entre deux lieux, qui ne dépend pas du système de coordonnées choisi, on définit un invariant scalaire indépendant du référentiel choisi, c'est a dire indépendant du système de coordonnées d'espace et de temps choisi. Celui-ci s'écrit dans le référentiel **(R)** :

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$

On peut montrer que cette grandeur est invariante par une transformation de Lorentz-Poincaré.

Les transformations de Lorentz-Poincaré couplent les coordonnées spatiales et la coordonnée temporelle d'un événement. L'espace et le temps forment dès lors une entité plus générale, l'espace-temps, qui ressemble à un espace euclidien à quatre dimensions. Afin de rendre cette ressemblance évidente, on peut utiliser les coordonnées de Minkowski :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = \boldsymbol{i}\, ct \end{cases}$$ où $\boldsymbol{i}$ désigne le nombre imaginaire tel que $\boldsymbol{i}^2 = -1$

L'invariant relativiste s'exprime alors tout simplement comme une norme euclidienne, comme une distance spatio-temporelle mélangeant durée et distance :

$$\Delta s^2 = \Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \Delta x_3{}^2 + \Delta x_3{}^2$$

Cette représentation rend compte de l'interdépendance des coordonnées d'espace et de temps, tout en attribuant au temps une coordonnée imaginaire pure. Les quatre coordonnées décrivent alors un continuum à quatre dimensions, que Minkowski appelait « monde », le point-événement étant un « point du monde ».

II / Représentation de l'espace-temps relativiste et causalité

1) Causalité et invariant relativiste- approche intuitive

Espace et temps sont liés par la notion de causalité : pour qu'un évènement puisse agir sur un autre, il est nécessaire que l'information issue du premier événement ait le temps de parvenir au lieu du deuxième avant que celui-ci se produise.

Reprenons un exemple développé par Christian Magnan dans La Nature Sans Foi Ni Loi[6] : imaginons d'une part un condamné à mort devant être exécuté en tel lieu, à telle heure, et d'autre part le président du pays, se trouvant sur une autre planète, et ayant pris à une telle autre heure antérieure la décision de gracier le condamné. Pour que la grâce accordée puisse être suivie de l'effet voulu, il est nécessaire que les signaux envoyés par le président, transmis par radio à la vitesse de la lumière, aient le temps d'arriver avant l'heure fatidique. Il peut y avoir deux cas :

- Soit le temps nécessaire au transfert de l'information est trop grand devant le temps disponible avant l'exécution et l'évènement « grâce accordée » ne pourra pas agir sur l'évènement « exécution du condamné » ;
- Soit le temps disponible est suffisant et la grâce du président sauvera le condamné.

Le lien de causalité éventuel entre les deux évènements semble donc dépendre à la fois de l'intervalle temporel, mais aussi de l'intervalle spatial qui les sépare, la vitesse du transfert de l'information permettant de comparer ces deux données. Ainsi, en se plaçant dans un certain référentiel R, si on note t_1 l'instant l'instant où le président gracie le condamné, $t_2 = t_1 + T$ l'instant où doit se produire l'exécution, et L la distance entre le président et le condamné, ce dernier ne peut être épargné uniquement si :

$$t_2 > t_1 + \frac{L}{c}$$

$$T > \frac{L}{c}$$

$$L^2 - c^2 T^2 < 0$$

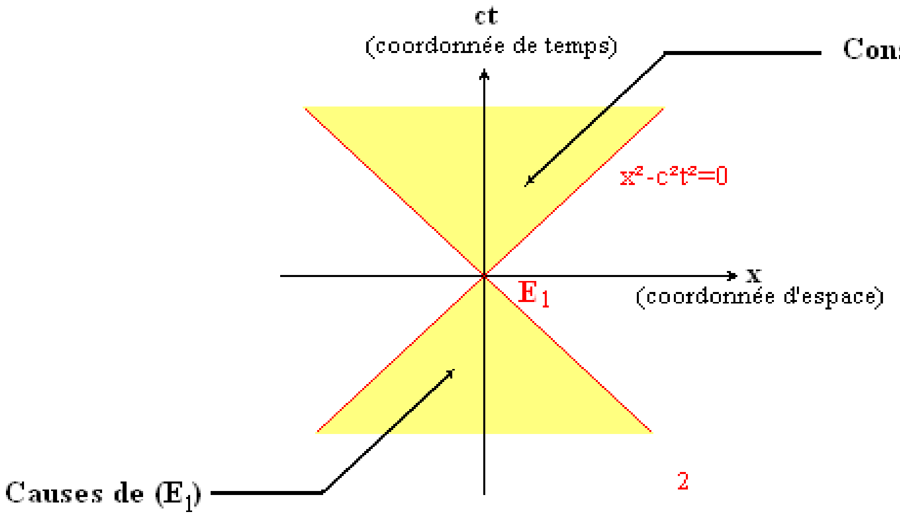
L'intervalle entre les évènements « grâce du président » et « exécution du condamné », au sens relativiste, doit donc vérifier :

$$\Delta s^2 < 0$$

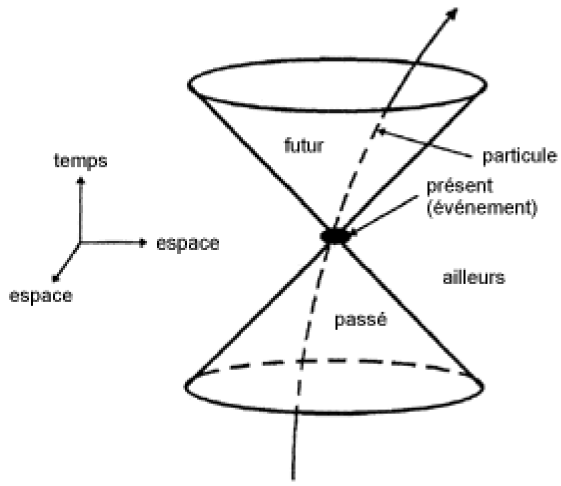
6 C. Magnan, La Nature Sans Foi Ni Loi, Ed. L'Harmattan

2) Cône de lumière

Plus généralement, l'invariant relativiste rend compte de la possibilité pour un évènement **(E_1)** d'agir sur un autre évènement **(E_2)** : en considérant la vitesse de la lumière comme une vitesse limite, il paraît tout approprié de considérer que l'événement **(E_1)** peut être cause de **(E_2)** uniquement si un rayon lumineux parti de l'endroit où **(E_1)** a lieu peut atteindre l'endroit où **(E_2)** a lieu avant que ce dernier se produise, l'information se propageant au plus vite à la vitesse de la lumière. L'intervalle entre les deux événements doit alors vérifier $\Delta s<0$. Ainsi, si $\Delta s<0$, **(E_1)** peut agir sur **(E_2)**, contrairement au cas où $\Delta s>0$. On peut rendre compte de ces différentes possibilités en représentant les points-évènements **(E_1)** et **(E_2)** sur une figure centrée sur **(E1)** portant une coordonnée d'espace en abscisse et une coordonnée de temps en ordonnée, appelée cône de lumière, la frontière $\Delta s=0$ correspondant au trajet de la lumière :



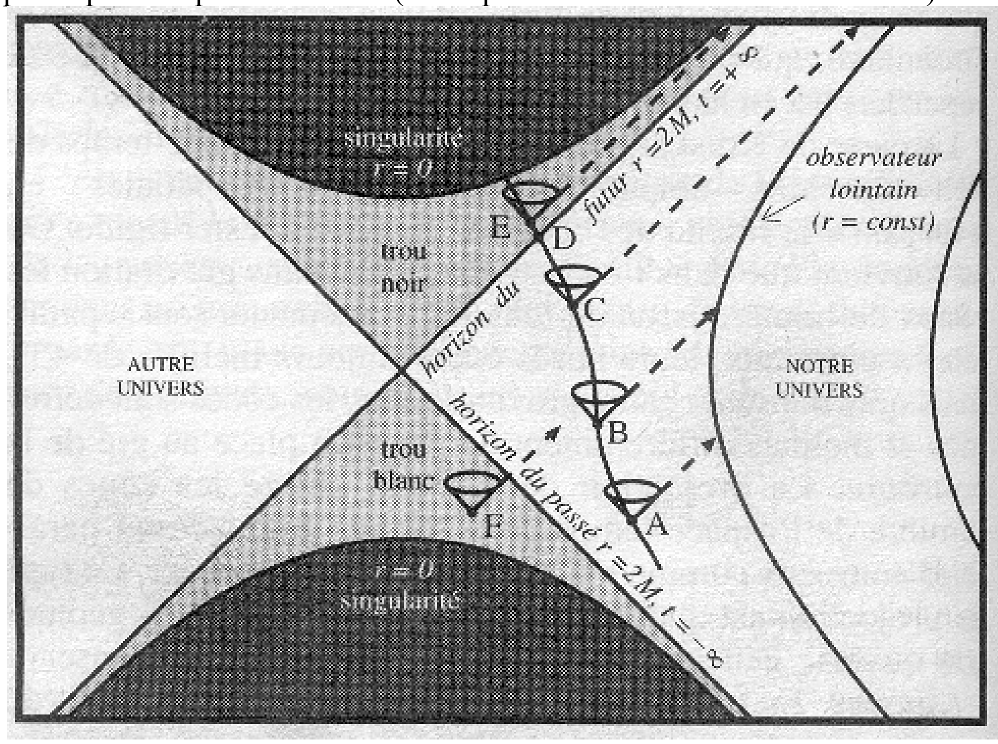
Ce type de représentation peut être appliquée à la trajectoire d'une particule, qui ne peut se mouvoir à une vitesse supérieure à celle de la lumière :



On différencie ainsi différentes zones de l'espace-temps : les positions passées éventuelles, les positions futures possibles et le reste, zone n'ayant aucun lien de causalité avec la particule considérée.

3) Application à la compréhension des trous noirs : le diagramme de Kruskal

Un trou noir est un objet stellaire massif, tellement massif qu'il déforme même la structure de l'espace-temps. La théorie des trous noirs dépasse largement le cadre de la relativité restreinte, qui n'envisage pas l'influence de la matière sur l'espace-temps, mais il est néanmoins possible d'en comprendre certains aspects grâce aux cônes de lumière et au diagramme de Kruskal, duquel on ne s'intéresse qu'à la partie supérieure-droite (correspondant effectivement au trou noir) :



L'espace temps autour d'un trou noir est divisé en deux régions, séparées par l'horizon des évènements, situé à une distance $r=\frac{2GM}{c^2}$ (rayon de Schwarzschild) : la région extérieure est la région blanche sur ce diagramme, la région intérieure est grise. A l'intérieur de l'horizon des événements se trouve une singularité, où devrait être concentrée en un point toute le masse du trou noir. Les régions noires situées au-delà de la singularité sur le diagramme n'appartiennent pas à l'espace-temps et n'ont donc aucune signification. Le temps s'écoule de bas en haut, et l'on utilise la représentation en cônes de lumière pour décrire les trajectoires possibles pour une particule. Du fait de la structure de l'espace-temps, la position d'un observateur lointain à une distance constante du trou noir devient une trajectoire hyperbolique dans l'espace temps. Ce diagramme nous permet de constater deux caractéristiques essentielles d'un trou noir :

- Si on considère une particule évoluant selon la courbe ABCDE, il arrive un moment, précisément le moment de son entrée à l'intérieure de l'horizon des évènements du trou noir, à partir duquel son futur devient la singularité, qui est aussi un point de l'espace : la particule se rapproche sans alternative de la singularité (pour finir par s'y écraser). On peut aussi interpréter cela en remarquant qu'à l'intérieur de l'horizon des évènements, la vitesse de libération (vitesse nécessaire pour s'échapper à l'attraction gravitationnelle du corps celleste) est supérieure à la vitesse de la lumière. Mais bien plus : non seulement le futur de la particule ayant dépassé le point D est de rencontrer la singularité, mais en plus cette particule ne peux plus avoir aucun lien causal avec l'extérieur de l'horizon (l'espace-temps est séparé causalement en deux) ;

- Les signaux émis par la particule évoluant selon la trajectoire ABCD et se rapprochant du trou noir mettent de plus en plus de temps pour parvenir à l'observateur lointain. L'observateur reçoit les signaux émis en A, B et C avec un décalage de plus en plus grand à mesure que le vaisseau se rapproche de l'horizon. Au passage de l'horizon, le décalage devient infini ; pour un observateur lointain se produit le phénomène de gel du temps : pour un observateur extérieur, le temps apparent d'un objet distant en chute libre en direction du trou noir ralentit, jusqu'à atteindre un décalage infini entre l'émission du signal par l'objet et la réception par l'observateur, lorsque l'objet atteint l'horizon du trou noir. Ce phénomène a pour conséquence de ralentir la fréquence des ondes lumineuses émises par l'objet subissant le champ gravitationnel du trou noir et le spectre d'émission se décale vers les grandes longueurs d'ondes. Ce décalage est appelé redshift gravitationnel. Comme l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence , on peut interpréter le redshift gravitationnel comme une perte d'énergie subie par le photon pour s'extraire du champ gravitationnel.

L'autre partie du diagramme de Kruskal reste assez spéculative : on y voit un « trou blanc », sorte de corps complémentaire au trou noir autour duquel une particule, au lieu d'être irrémédiablement attirée par la singularité, la fui de manière analogue. En effet, certains voient dans les trous noirs des portes vers d'autres univers, les trous blancs n'étant alors que l'autre coté de la porte. Cette perspective ouvre bien sûr beaucoup de possibilités, mais pour le moment, c'est sans doute sur le plan théorique que les trous noirs apparaissent comme un objet crucial, car ils peuvent être décrit à la fois d'un point de vue relativiste et d'un point de vue quantique.

Finalement, la nouvelle vision de l'espace et du temps que développe la relativité restreinte, bien que contre intuitive avec l'ajout d'une quatrième dimension à l'espace, reste compatible avec notre approche de la causalité. Ainsi, alors que la mécanique classique se basait implicitement sur des interactions à distance se propageant à vitesse infinie (donc avec une causalité s'étendant à tout l'espace, une sorte de causalité infinie), la théorie de la relativité restreinte s'accorde plus avec l'expérience, qui est que les interactions à distance se propagent à vitesse finie : la répercussion de tout changement de l'état d'un corps situé à une certaine distance n'a lieu qu'après un certain temps.

Néanmoins d'importants questionnements subsistent : nous avons de l'espace et du temps une impression de structure à priori, cadre de nos perceptions, et indifférente à nous. Dans la théorie de la relativité restreinte, les présupposés intuitifs que nous avons sur l'espace et le temps prennent la forme de postulats, sur lesquels se construit la théorie, mais afin d'arriver à une connaissance plus profonde du monde qui nous entoure, il serait intéressant de s'intéresser plus attentivement à l'origine éventuelle de notre conception de l'espace et du temps : est-ce une construction innée, se construit-elle au cours de la petite enfance ? Comment dépasser les limites de la perception humaine pour aboutir à une théorie qui rend compte encore plus parfaitement du monde ?

Bibliographie

- A. EINSTEIN, *La Relativité*, Petite Bibliothèque Payot
- J. HLADIK, M. CHRYSOS, *Introduction à la relativité restreinte*, Dunod
- M. HULIN, N. HULIN, L. MOUSSELIN, *Relativité Restreinte Cours, exercices et problèmes résolus*, Dunod
- H. POINCARE, Note à l'académie des Sciences « Sur la Dynamique de l'électron »
- H. BERGSON, *Durée et Simultanéité*, PUF, pp. 1-67
- J.-P. AUFFRAY, *Einstein et Poincaré*, Le Pommier
- C. MAGNAN, *La Nature sans Foi ni Loi*, Ed. l'Harmattan
- ENCYCLOPAEDIA UNIVERSALIS, « Espace-temps »
- J. RUSS, *Nouvel Abrégé de Philosophie*, Ed. Armand Colin
- C. HEMPEL, Éléments *d'épistémologie*, Ed. Armand Colin
- J.-P. LUMINET, *Les Trous Noirs*, Ed. Belfond