אקדמון
בית ההוצאה של הסתדרות הסטודנטים של האוניברסיטה העברית

פרופ׳ א׳ פרידמן

חשמל ומגנטיות א׳

ערכו לפי הרצאות שניתנו בשנת תשל״ב

דפני אהוד
צח יהודה

הפקולטה למדעי הטבע

ירושלים, תשל״ג

הקדמה

חוברת זו נערכה לפי הרצאות בחשמל ומגנטיות שניתנו ע"י הפרופ' א. פרידמן במסגרת החוג לפיזיקה, שנה א', בשנת תשל"ב.

אין הרשימות הללו מהוות ספר, לכן מושם דגש על עקרי הפיתוחים וההסברים המילוליים ניתנים בקיצור רב.

מטרת הרשימה היא לשחרר את התלמיד, במידה מסוימת מהצורך לרשום במפורט בזמן ההרצאה, וכך לאפשר לו להתרכז יותר בקליטת החומר.

לכן, יש לזכור שלימוד יסודי של ספר טוב הוא חיוני להשלמת ההרצאה, שינון החוברת אינו יכול לשמש תחליף לספר או להרצאה עצמה.

הופעת הדברים, בדפוס, אין פירושה שתוכנית הקורס נקבעה בזאת. התכנית המפורשת נקבעה במידה רבה על פי שקוליו של המורה, ותוך תיאום עם שאר הלימודים של אותו מחזור, לכן יתכנו שינויים גם כאשר אותו מורה מלמד שוב את אותו הקורס.

תודתנו נתונה למרצה, פרופ' א. פרידמן על שקרא את החוברת, האיר עינינו בנקודות הלא ברורות והעיר הערות חשובות להקדמה.

כמו כן תודה לחברינו חיים דוד, נייבלט קלאודיו וגורן צבי שהעירו לנו הערות רבות, ולאקדמון שטרח להוציא את החוברת בצורה נאה ומסודרת.

המרצה אמנם קרא את החוברת לפני הוצאתה, למרות זאת האחריות לעריכה נופלת על העורכים.

צח יהודה, אהוד דפני.

תוכן הענינים

ע

חלק ראשון: אלקטרוסטטיקה

פרק א׳: מטען, שדה ופוטנציאל

פרק ב׳: שדות חשמליים בחומר

חלק ראשון: אלקטרוסטטיקה

פרק א': מטען, שדה ופוטנציאל

(1) חוק קולון:

מעובדה נסיונית מוצאים כי אם:

יהיו שני מטענים q_1 ו - q_2.

אז הכח הפועל ביניהם:

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$$

כאשר r המרחק ביניהם.

בהנחה ש r גדול ביחס למימדי המטען - ז"א המטענים נקודתיים.

גורם הפרופורציה k יקבע ע"י שיטת היחידות.

ב - $C.G.S.$ נשתמש בס"מ, גר', שניה ודין.

ב $C.G.S.$ נבחר $k=1$ ואז:

<u>הגדרה</u>: אם בין שני מטענים זהים במרחק ס"מ אחד פועל כח של דין אחד, המטען הוא יחידה אחת.

סימון ליח' המטען - $e.s.u$

הממדים: $[q] = e.s.u = (dyn \times cm^2)^{1/2}$

מבחינה וקטורית - נגדיר $\hat{r}$ - וקטור יחידה בכוון r.

אזי:

$$\underline{F} = \frac{k q_1 q_2}{r^2}\left(\hat{\underline{r}}\right)$$

יהי F_{21} - הפועל על 2 ע"י 1 אזי:

$$\underline{F}_{21} = \frac{k q_1 q_2}{r_{21}^2}\left(\hat{\underline{r}}_{21}\right)$$

כאשר $\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$ בהתאם לחוק השלישי של ניוטון.

(2) כח קולון

מעובדה נסיונית מצאנו:

1. ששני סימנים למטען.

תכונות כח קולון:

2. חוק קולון

א. כח תלוי במכפלת המטענים.

ב. אדטיביות (חיבוריות) הכח.

ג. תלות ב - $\frac{1}{r^2}$.

3. חוק שימור המטען. (סה"כ המטען החשמלי, בהתחשב בסימן, נשמר).

4. קוונטיזציה של המטען - המטען בא במנות קבועות מראש: $q = Ne$

הכל חוקים נסיוניים.

<u>הערות:</u>

א. יח' המטען היסודית היא

$$[e] = 4.8 \times 10^{-10}\ e.s.u$$

ב. חוק השימור נכון גם לגדלים מאקרוסקופיים וגם לגדלים מיקרוסקופיים - עד לסקלה אטומית.

(3) <u>האנרגיה ושמורה:</u>

כח קולון: $\underline{F} = \frac{K q_1 q_2}{r^2}\hat{\underline{r}}$ הוא כוח מרכזי.

נניח שמטען אחד קבוע למקומו - אזי הכח הוא תלות של המרחק למרכז הכח.

לכן - כח קולון הוא כח משמר.

נגדיר אנרגיה פוטנציאלית:

$$U' = -\int_{\infty}^{r} \underline{F} \cdot \underline{ds}$$

(כאשר החלקיקים שוי מטען - ז"א דוחים זה את זה)

W - היא העבודה מה - ∞ עד למרחק r.

הכח משמר - לכן נוכל לבחור לאינסוף דרך כרצוננו.

לכן -

$$W = -\int_{\infty}^{r} \underline{F}\, dx = \int_{r}^{\infty} \frac{q_1 q_2}{x^2}\, dx =$$

$$= q_1 q_2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{r}^{\infty} = \frac{q_1 q_2}{r}$$

ממדי האנרגיה:

$$[W] = erg = dyne \times cm$$

הכח הוא אדטיבי. לכן:

$$\underline{F}_{23} = \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2}\hat{\underline{r}}_{23}$$

ונקבל שהאנרגיה של שלושה חלקיקים היא:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

ובמערכת מטענים נקודתיים:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k \neq j}\frac{q_j q_k}{r_{jk}}$$

הפקטור $\frac{1}{2}$ מופיע היות ויש לקחת בחשבון כל זוג רק פעם אחת.

<u>דוגמא:</u> אנרגית האינטראקציה בין שני אלקטרונים באטום:

$e = 4.8 \times 10^{-10}\ e.s.u.$

$r = 10^{-8}\ cm$ (ממדי האטום)

$$W = \frac{e^2}{r} = \frac{(4.8)^2 \times 10^{-20}}{10^{-8}} = 2.3 \times 10^{-11}\ erg$$

האנרגיה בגרם מולקולה - (כאשר בכל אטום שני אלקטרונים):

$$W = 6 \times 10^{23} \times 2.3 \times 10^{-11} = 1.38 \times 10^{13}\ erg/mole$$

ידוע ממכניקה:

$$1\ erg = 10^{-7}\ joule$$

אזי:

$$W = 1.38 \times 10^{6}\ joule/mole = 330\ kcal/mole$$

אלו סדרי הגודל של אנרגיות כימיות בשריפה למשל. לכן זו תוצאה המביאה להנחה שהכוחות האלקטרוסטטיים הם המשפיעים בייחוד בכימיה.

(4) השדה החשמלי

נתונה מערכת של מטענים נקודתיים:

$$q_0 \cdots\cdots q_m$$

הכח הפועל על מטען q_0 הוא:

$$\underline{F}_0 = \frac{q_0 q_1}{r_{01}^2}\hat{\underline{r}}_{01} + \frac{q_0 q_2}{r_{02}^2}\hat{\underline{r}}_{02} + \cdots + \frac{q_0 q_m}{r_{0m}^2}\hat{\underline{r}}_{0m}$$

ד"א:

$$F_0 = q_0 \sum_{i=1}^{m} q_i / r_{0i}^2 \left(\hat{\underline{r}}_{0i}\right) = q_0 E$$

הגדרה:

$$\boxed{\underline{E}(x,y,z) \stackrel{\text{הג}}{=} \sum_{i=1}^{m} q_i / r_{0i}^2 \; \hat{\underline{r}}_{0i}}$$

יח' השדה החשמלי:

כח = שדה × מטען

לכן:

$$\text{שדה} = \frac{\text{כח}}{\text{מטען}} = \text{dyn}/\text{e.s.u.}$$

השדה הוא פונקציה וקטוריה המוגדרת על כל המרחב.

במקרה בו מספר גדול של מטענים:

נניח שקיים גוף מעון שבו צפיפות ρ של מטען.

(מתייחסים למרחב כאילו הוא מחולק לקוביות בגודל קטן ביותר)

אזי:

$$[\rho] = \text{e.s.u.}/\text{cm}^3$$

וקיים:

$$q_i \Rightarrow dq_i = \rho\, dx_i\, dy_i\, dz_i$$

והשדה החשמלי יהיה:

$$\underline{E}(x_0, y_0, z_0) = \int_{\text{נפח הגוף}} \frac{\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}{r_0^2}\left(\hat{\underline{r}}_0\right)$$

כאשר $\underline{r}_0$ מוגדר באופן הבא:

$$\underline{r}_0 = (x_0 - x)\underline{i} + (y_0 - y)\underline{j} + (z_0 - z)\underline{k}$$

ד"א – $\underline{r}_0$, וקטור מנקודת האינטגרציה לנקודת התצפית.

$$r_0^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$

במקרה בו נק' ה – O מחוץ לגוף – החישוב נכון.

במקרה בו נק' ה – O בתוך הגוף – יש אפשרות להתאפסות המכנה.

נגביל את עצמנו למקרים של ρ סופי.

(צפיפות מטען אין סופית $\Leftarrow$ מטען סופי בנפח O – דבר לא אפשרי מבחינה פיזיקלית)

כשאנו מתקרבים לנק' התאפסות של המכנה נדון ב"כדור" מתמטי שסביב הנקודה.

תרומת קליפה כדורית כנ"ל:

$$\rho\, dx\, dy\, dz = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$\frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r^2} = 4\pi\rho\, dr$$

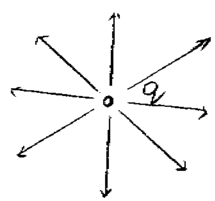
ולכן סביב נק' כזאת אין בעיות באינטגרציה.

(5) קוי כח והשטף דרך משטח:

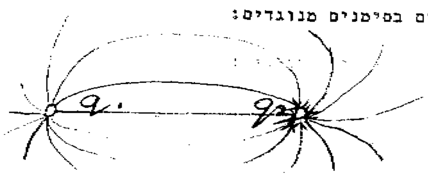
ניתן להדגים שדה חשמלי ע"י קוים במרחב.

למשל:

מטען נק':



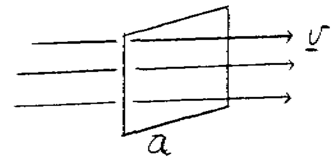
שני מטענים בסימנים מנוגדים:



(חלק מהקוים מרגישים במטען שמאל). יש ענין באנליזה של "כמה" קוים יגיעו – ז"א ההספק הכמותי של המטענים.

<u>שטף של וקטור:</u>

נניח $\underline{V}(x,y,z)$ מהירות זרימה של נוזל (המהירות מקבילה וקבועה בתחום מסוים) נתונה לולאה בשטח a הניצבת לזרימה.



נגדיר את השטף של הוקטור $\underline{V}$ כ – Va ומשמעותו – נפח הנוזל שיעבור דרך הלולאה ביח׳ זמן.

באותו אופן: אם קיים וקטור: $\underline{V}(x,y,z)$ ו – $\underline{a}$ – וקטור שטח – ז"א וקטור בגודל a הניצב לשטח,

השטף יהיה מכפלה סקלרית – $\underline{V}\cdot\underline{a}$

$$\underline{a} \parallel \underline{V} \Rightarrow \underline{V}\cdot\underline{a} = a\underline{V}$$

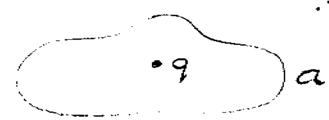
$$\underline{a} \perp \underline{V} \Rightarrow \underline{V}\,\underline{a} = 0$$

ז"א:

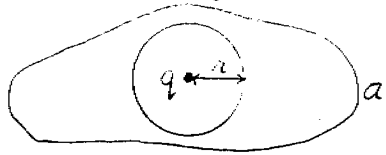
$$\underline{V}\,\underline{a} = Va\cos\theta = Va\cos(\underline{V},\underline{a})$$

(6) <u>השטף של השדה החשמלי, חוק גאוס</u>

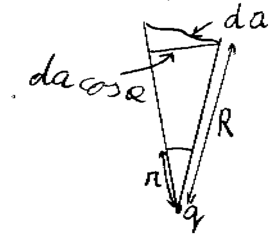
נתון מטען נק׳ q ומשטח a מקיף אותו.



נקיף את q בכדור מתמטי ברדיוס – r



ונחלק את המרחב ליח׳ אינטגרציה שהן חרוטים שקודקודם ב – q;



בהתאם להגדרה: Φ השטף:

$$\Phi_a = \oint_{a} \underline{E}\,d\underline{a}$$

הגזרה על הכדור – r היא ds כאשר:

$$ds = \frac{da\, r^2}{R^2}\cos(\underline{r},d\underline{a})$$

לכן:

$$\underline{E}\,d\underline{a} = \frac{q}{R^2}\,da\cos(R,da) =$$

$$= \frac{q}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r^2}\,ds = q\frac{ds}{r^2}$$

ז"א: השטף דרך המשטח a שווה לשטף דרך הכדור המתמטי r המקיף את המטען.

לכן:

$$\Phi = \oint \underline{E}\,d\underline{a} = \oint \frac{q}{r^2}\,ds = q/r^2 \cdot 4\pi r^2$$

והתוצאה:

$$\boxed{\Phi = 4\pi q}$$

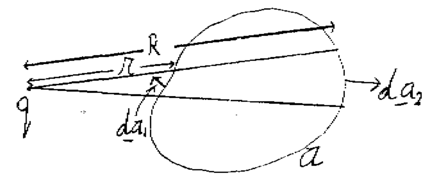
זהו חוק גאוס האומר: השטף של השדה הנובע ממטען נק', דרך משטח כלשהוא המקיף את המטען, שווה ל - $4\pi q$

הערות לחוק גאוס:

א. לגבי N מטענים בתוך המשטח הסגור:

$$\Phi = 4\pi \sum_{i=1}^{n} q_i$$

ב. לגבי מטענים שמחוץ למשטח a קיים: $\Phi_a = 0$.



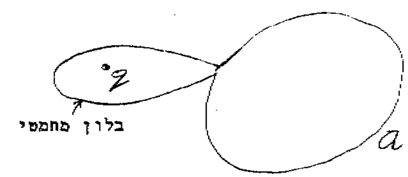
הוכחה א':

ניתן לראות שבתוך כל קרן צד אחד מבטל את השני.

הוכחה ב':

נעשה בגוף a - "חור מקרוסקופי" ונחבר אליו "בלון" המקיף את המטען q.

השטף הכללי הוא - $\Phi = 4\pi q$



נגדיר את השטף דרך הבלון - Φ_{ext}

נוכל להקטין את החור כרצוננו עד שהשטף דרכו יהיה - 0 אזי:

$$\Phi_{ext} = 4\pi q$$

קיים:

$$\Phi = \Phi_{ext} + \Phi_a$$

ז"א:

$$\Phi_a = 0$$

ג. חוק גאוס ניתן להכתב כ -

$$\Phi = \int \underline{E}\, d\underline{a} = 4\pi \int \rho\, dv$$

כאשר ρ - מקדם הצפיפות של המטען

V - נפח הגוף.

(7) דוגמאות לחשוב בעזרת חוק גאוס

נתון כדור בו ρ תלוי ב r נחפש $E(r)$.

מטעמי סימטריה נצפה לשדה ראדיאלי:

הכדור - כדור טעון.

השטף:

$$\Phi = \int E\, da = E(r)\, 4\pi r^2 = 4\pi \int \rho\, dv$$

כאשר $\rho\, dv$ - המטען בתוך הכדור.

נפח קליפה כדורית:

$$dv = 4\pi r^2 dr = 4\pi x^2 dx$$

כאשר x - הרדיוס המשתנה.

$$\int \rho\, dv = \int \rho(x)\, 4\pi x^2 dx$$

ומכאן:

$$E(r)\, 4\pi r^2 = (4\pi)^2 \int_0^r x^2 \rho(x)\, dx$$

$$E(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r x^2 \rho(x)\, dx\, (4\pi)$$

וזהו המקרה הכללי.

במקרה של צפיפות קבועה, עבור $R \geq r$

נקבל:

$$E(r) = \frac{\pi}{r^2} \rho_0 \frac{1}{3} r^3 = \frac{4}{3}\pi \rho_0 r$$

וזהו השדה החשמלי בתוך כדור ובו חלוקת מטען הומוגנית.

מחוץ לכדור - $r > R$

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_V \rho\, dv = 4\pi Q$$

מפני שזהו אנטגרל בתוך R בלבד)

ז"א

$$\boxed{E_r = \frac{Q}{r^2}}$$

ז"א: השדה מחוץ לכדור נראה כאילו כל המטען מרוכז במרכז הכדור.

נדון במקרה בו – ρ_0 קבוע.

בתוך הכדור:

$$E_r = \frac{4}{3}\pi\rho_0 r$$

קיום :

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E_r = \frac{4\pi}{3} r \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{R^3} r$$

לגבי גוף חלול בעל סימטריה כדורית השדה בפנים יהיה – 0, באשר

$$\Phi = E_{(r)} 4\pi r^2$$

$\Phi = 0$ – בהתאם לחוק גאוס, ולכן גם

$$E_{(r)} = 0$$

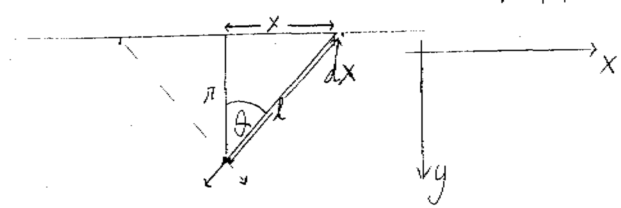
נתון חוט אין סופי ועליו מטען ליח' אורך:

$$\lambda \quad esu/cm$$

נתעניין בשדה מחוץ לחוט, לכן נוכל להתיחס אליו כאל קו מתמטי.

נחשב את השדה במרחק r מהחוט.

שיטה א': לפי חוק קולון:



התרומה dx לשדה

$$d\underline{E} = \frac{\lambda dx}{\ell^2}$$

המרכיב בציר ה x מצטמצם מטעמי סימטריה ונשאר מרכיב בציר ה – y

$$dE_y = \lambda \frac{dx}{\ell^2}\cos\theta$$

θ – משתנה אינטגרציה. אזי:

$$x = r\,tg\theta$$

$$dx = \frac{r}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

וקיום:

$$\ell = \frac{r}{\cos\theta}$$

$$E_r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lambda\cos\theta \frac{r}{\cos^2\theta}\, d\theta\, \frac{\cos^2\theta}{r^2} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{r}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\lambda}{r}$$

ז"א:

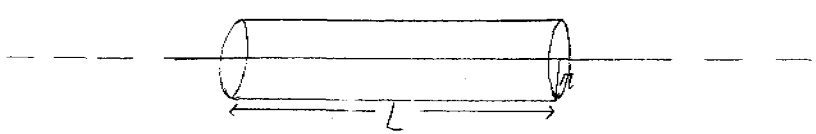
$$\boxed{E_{(r)} = \frac{2\lambda}{r}}$$

בדיקת ממדים:

$$[\lambda] = esu/cm \Rightarrow [E_{(r)}] = esu/cm^2$$

כנדרש.

שיטה ב': בעזרת חוק גאוס:



נבנה גליל ברדיוס r סביב החוט ובאורך L.

דרך בסיסי הגליל אין שטף מטעמי סימטריה היות והשדה ראדיאלי. לכן השטף יהיה:

$$\Phi = E_{(r)} 2\pi r L = 4\pi L\lambda$$

באשר: $2\pi r L$ – מעטפת הגליל

$L\lambda$ - המטען בתוך הגליל

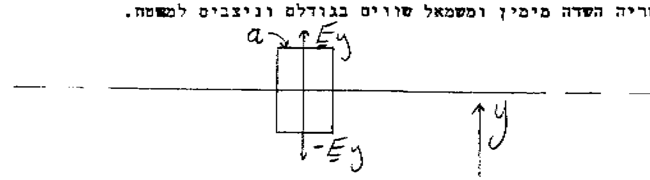
לכן:

$$E = \frac{2\lambda}{r}$$

נתון משטח אין סופי בעל עובי סופי ועליו מטען בצפיפות σ ליח' שטח: $[\sigma] = \frac{esu}{cm^2}$

נבחן את השדה מצידי המשטח:

מטעמי סימטריה השדה מימין ומשמאל שווים בגודלם וניצבים למשטח.



נבנה גליל כך ש - a - שטח הפנים המקביל למשטח. הפעם - השטף דרך המעטפת הגלילית יהיה - 0.

$$\Phi = aE_y^+ + aE_y^- = 4\pi a\sigma$$

$$2aE_y^+ = 4\pi a\sigma$$

$$\boxed{E_y^+ = 2\pi\sigma}$$

סיכום: בעזרת חוק גאוס בענין השטף ונתוני סימטריה ניתן לפתור רוב הבעיות מהסוג הנ"ל.

(8) הפוטנציאל החשמלי

הגדרנו אנרגיה פוטנציאלית של מערכת מטענים כך ש :

$$W_A - W_B = \int_B^A -\underline{E}q \cdot d\underline{s}$$

כאשר:

q - מטען נקודתי

W_A - אנרגיה פוטנציאלית ב - A

W_B - אנרגיה פוטנציאלית ב - B

וקיים:

נגדיר את האנרגיה ליח' מטען: $(q=1)$

$$\boxed{\varphi_A - \varphi_B = -\int_B^A \underline{E}\, d\underline{s}}$$

נניח: $B = const$ - נק' יחוס במרחב.

אזי:

$$\varphi_A - C = -\int_B^A E\, ds$$

דוגמא: במטען נקודתי קיים:

$$\underline{E}_A = \frac{q}{r^2}\hat{r}$$

נוח לבחור $B = \infty$,

אזי:

$$\varphi_A - \varphi_\infty = -\int_\infty^A E s$$

השדה משמר כי הכח משמר. לכן:

$$\varphi_A - \varphi_\infty = \int_{r_A}^\infty q/r^2\, dr = \frac{q}{r_A}$$

נגדיר: $\varphi(\infty) = 0$

ונקבל:

$$\boxed{\varphi_r = q/r}$$

וזהו הפוטנציאל של מטען נק' בגודל q.

יחידות: האנרגיה היא ב - erg

לשני מטענים

$$erg = \left[\frac{q_1 q_2}{r}\right]$$

יח' הפוטנציאל:

$$[\varphi] = erg/esu = statvolt$$

כאשר:

$$1\ statvolt = 300\ volts$$

לגבי מטען נקודתי:

$$\varphi_{(r)} = \frac{q}{r}$$

לגבי N מטענים:

$$\varphi_{(r)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

כאשר:

$$r_i = \sqrt{\frac{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}{(z-z_i)^2}}$$

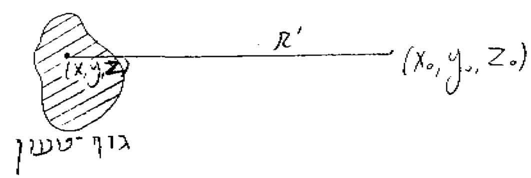
וקיים:

$$\varphi_{(r_0)} = \int \frac{\rho\, dv}{r}$$

כאשר:

$$r_0 = (x_0, y_0, z_0)$$
$$dv = dx\, dy\, dz$$
$$r' = \left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

כל זאת - לגבי החלקות מטען רציפה



כמו כן קיים:

$$\underline{E}_0 = \int \frac{\rho\, dv}{r^2}(\hat{r})$$

(9) <u>מושג הגרדיינט</u>

נתונה פונקציה - $f(x,y,z)$

נבחן השתנות:

$$f[(x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z)] - f(x,y,z) = \Delta f$$

בקירוב טוב קיים:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$$

נגדיר וקטור $\Delta \underline{s}$ (שמשמעותו שינוי דרך)

$$\Delta \underline{s} \overset{D}{=} \Delta x \underline{i} + \Delta y \underline{j} + \Delta z \underline{k}$$

כמו כן נגדיר ∇f - גרדיינט של f באופן הבא:

<u>הגדרה</u>: הגרדיינט הוא וקטור המוגדר כך שגודל רכיבי x,y,z שלו הם $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ בהתאמה.

$$\underline{\nabla} \overset{D}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k}$$

וקבלנו:

$$\Delta f = \Delta \underline{s} \cdot \underline{\nabla} f$$

הגרדיינט הוא וקטור השיפוע של הפונקציה. כיוונו הוא בכיוון השינוי המכסימלי שלה.
וכפי שניתן לראות ל - Δf ערך מכסימלי כאשר $\Delta \underline{s} \parallel \underline{\nabla} f$

נניח נתון:

$$f(r) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

אזי:

$$\underline{\nabla} f = \frac{df}{dr}\hat{r}$$

ז"א - הגרדיינט מכוון החוצה (או פנימה) מהמרכז בכיוון שבו הפונקציה גדלה
וגודלו - $\frac{df}{dr}$.

כאמור

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

נחשב את הגרדיינט:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\underline{\nabla} f = \frac{df}{dr}\left(\frac{x}{r}\underline{i} + \frac{y}{r}\underline{j} + \frac{z}{r}\underline{k}\right)$$

קיים:

$$\hat{\underline{r}} = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \left(\frac{x}{r}\underline{i} + \frac{y}{r}\underline{j} + \frac{z}{r}\underline{k}\right)$$

ד"א – וקטור יח' בכוון $\underline{r}$.

ולכן:

$$\underline{\nabla} f = \frac{df}{dr}\hat{\underline{r}}$$

<u>הוכחה נוספת:</u>

כזכור:

$$\Delta \underline{s} = \Delta x\,\underline{i} + \Delta y\,\underline{j} + \Delta z\,\underline{k}$$

$$\Delta f = \underline{\nabla} f \cdot \Delta \underline{s}$$

$$|\Delta f| = |\underline{\nabla} f|\,|\Delta \underline{s}| \cos\theta$$

כאשר θ – הזוית בין $\underline{\nabla} f$ ו – $\Delta \underline{s}$.

אך קיים:

$$f = f(r)$$

ולכן:

$$\Delta f = f(r+\Delta r) - f(r) \underset{\text{בקירוב}}{=} \frac{df}{dr}\Delta r$$

קיים:

$$|\Delta \underline{s}| \cos\theta = \Delta r$$

מסיבות גאומטריות.

ולכן:

$$\Delta f = |\nabla f|\,\Delta r$$

ומכאן התוצאה:

$$|\underline{\nabla} f|\,\Delta r = \frac{df}{dr}\Delta r$$

ד"א:

$$|\nabla f| = \frac{df}{dr}$$

כאשר כוון הגרדיינט – הכוון בו הפונקציה גדלה.

שימושים לגרדיינט:

$$\Delta f = \underline{\nabla} f \cdot \Delta \underline{s}$$

בצורה דיפרנציאלית:

$$df = \underline{\nabla} f\, d\underline{s}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} df = \int_{P_1}^{P_2} \underline{\nabla} f\, d\underline{s}$$

בכל מסלול שהוא

$$F(P_2) - F(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \underline{\nabla} f\, d\underline{s}$$

לכן: האנטגרל של הגרדיינט הכפול ב – ds אינו תלוי במסלול.

מסקנה: כל כח שניתן להיות מוצג כגרדיינט של פונקציה כלשהי הוא כח משמר.

$$\underline{F} = \underline{\nabla} f \Longrightarrow \underline{F} \text{ משמר}$$

יתר על כן – הפונקציה f הנ"ל תיתן את האנרגיה הפוטנציאלית כאשר:

$$\Delta U = \int_{P_1}^{P_2} \underline{E}\, ds$$

משמעות השימור מבחינה מתמטית:

אם קיים וקטור הכח $\underline{F}$ המשמר. אזי:

$$\underline{F} = \underline{\nabla} f$$

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

לפי משפט ידוע בחשבון דיפרנציאלי:

$$\frac{\partial\partial f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}$$

ז"א:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

ובאותו אופן:

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

<u>דוגמא</u>: כח קולון:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

אחד המטענים בראשית הצירים. לכן:

$$r = (x,y,z)$$

$$F = q_1 q_2 \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

מתקיים:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = q_1 q_2 \frac{-\frac{3}{2}x\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = q_1 q_2 \frac{-\frac{3}{2}y\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

ז"א:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

ובאופן זה ניתן להראות שהכח משמר.

התנאי $\underline{E} = \nabla f$ הוא תנאי <u>הכרחי ומספיק</u> להיות $\underline{E}$ כח משמר.

<u>הפוטנציאל החשמלי</u> (המשך)

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = -\int_{P_2}^{P_1} \underline{E}\, d\underline{s}$$

בהתאם להגדרת הפוטנציאל:

ולכן:

$$\underline{E} = \nabla(-\varphi) = -\nabla\varphi$$

קיבלנו:

$$\boxed{\underline{E} = -\nabla\varphi}$$

לכן - חישוב φ יעזור בחישוב E.

כזכור:

$$\varphi(x_0,y_0,z_0) = \int \frac{\rho\, dv}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}}$$

$$\underline{E} = -\nabla\varphi \Longrightarrow E(x_0,y_0,z_0) = -\frac{d\varphi}{dr}$$

(10) <u>חשוב פוטנציאל סביב גופים</u>

I <u>סביב כדור חלול</u>:

נתונה קליפה כדורית ברדיוס r'

$$r \gg r'$$

$$\varphi(r) = \int_r^{\infty} \underline{E}\, d\underline{s} =$$

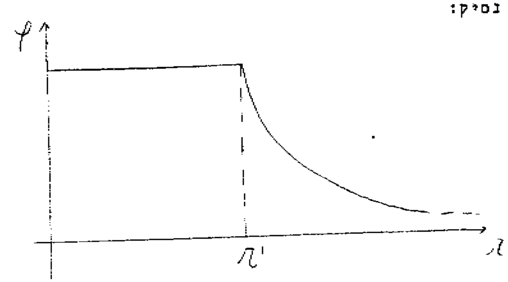
$$= \int_r^{\infty} \frac{q}{r^2}\, dr = \frac{q}{r}$$

כאשר $r < r'$:

$$\varphi(r) = \int_r^{r'} \underline{E}\, d\underline{s} + \frac{q'}{r'} = \frac{q'}{r'}$$

באשר $E = 0$

מכאן נסיק:



II סביב כדור מלא

נתון כדור מלא ברדיוס R. הכדור טעון במטען Q בצפיפות מטען ρ.

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

לגבי $r \geq R$ קיים: $\varphi(r) = \frac{Q}{r}$

ראינו שאפשר להתיחס למטען כאילו הוא מרוכז במרכז הכדור.

לגבי: $r < R$; $\varphi(r) = \varphi_{int} + \varphi_{ext}$

באשר:

φ_{int} – תרומת המטענים שבתוך הכדור הדמיוני ברדיוס – r

φ_{ext} – תרומת המטענים ברדיוס שבין r ו – R.

$$\varphi_{in} = \frac{q(r)}{r} = \frac{r^3}{R^3} Q \frac{1}{r} = \frac{r^2}{R^3} Q$$

$$\varphi_{ext} = \int_r^R \frac{4\pi r^2 \rho}{r}\, dr = 2\pi\rho\left[R^2 - r^2\right] =$$

ע"י הצבת ρ נקבל:

$$\varphi_{ext} = \frac{3}{2}\frac{Q}{R^3}\left[R^2 - r^2\right]$$

לכן:

$$\varphi(r) = \frac{r^2}{R^3} Q + \frac{3}{2}\frac{Q}{R} - \frac{3}{2}\frac{r^2}{R^3}$$

והתוצאה הסופית: לגבי $0 \leq r \leq R$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{3}{2}\frac{Q}{R} - \frac{1}{2}\frac{Q\, r^2}{R^3}}$$

נראה שהשדה של הכדור מתאים לשדה שחשבנו לפי חוק גאוס.

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi \quad ; \quad \underline{\nabla}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\hat{\underline{r}}$$

$$r \geq R \Longrightarrow \varphi = \frac{Q}{r} \Longrightarrow \underline{E} = \frac{Q}{r^2}\hat{\underline{r}}$$

$$r < R \Longrightarrow \varphi = \frac{3}{2}\frac{Q}{R} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} \Longrightarrow \underline{E} = Q\frac{r}{R^2}\hat{\underline{r}}$$

קבלנו שהתוצאות זהות.

III חשוב הפוטנציאל סביב חוט טעון אינסופי

מטען קוי – $[\lambda] = e.s.u/cm$

על גבי חוט אין סופי.

חישבנו לפי חוק גאוס:

$$E(r) = \frac{2\lambda}{r}$$

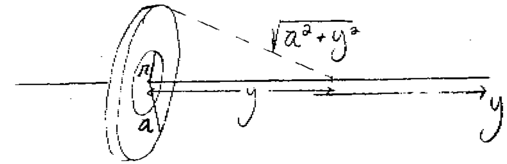
לא נוכל לחשב את הפוטנציאל ע"י הגדרתו ב – 0 באין סוף כי המטען משתרע עד לאינסוף.

נוכל לחשב הפרשי פוטנציאלים.

$$\varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \underline{E}\, d\underline{r} = 2\lambda \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

IV דסקית טעונה

נתונה דסקית עגולה ברדיוס a. טעונה הומוגנית בצפיפות מטען: σ $e.s.u/cm^2$



נחשב את הפוטנציאל על ציר העובר דרך מרכז הדיסקית בכיוון y - ז"א $\varphi(y)$
ע"י אינטגרציות על טבעות סביב מרכז הדסקית.

נניח - $y>0$

$$\varphi(y) = \int_0^a \frac{2\pi r\sigma\,dr}{\sqrt{r^2+y^2}} = 2\pi\sigma\left[(y^2+r^2)^{1/2}\right]_0^a$$

$$\varphi(y) = 2\pi\sigma\left[(y^2+a^2)^{1/2}-|y|\right]$$

לגבי $y=0$:

$$\varphi(0) = 2\pi\sigma a$$

לגבי $y \gg a$:

$$(y^2+a^2)^{1/2} = y\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)^{1/2} \simeq y+\frac{a^2}{2y}+$$

(מזניחים את שאר איברי הפיתוח לטור)

ונקבל - לגבי נק' רחוקה מהדסקית:

$$\varphi(y) = 2\pi\sigma\left[y+\frac{a^2}{2y}-y\right] = \frac{2\pi\sigma a^2}{2y} = \frac{Q}{y}$$

ז"א - ניתן להתייחס לדסקית כאל מטען נקודתי במרחק - y גדול מאוד ביחס לרדיוס הדיסקית.

נחשב: $E(y)$

$$E(y) = -\frac{d\varphi}{dy} = -2\pi\sigma\left[\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}-1\right]$$

ונקבל:

לגבי $y=0$ $\quad E = 2\pi\sigma$

ז"א: ניתן להתייחס לדסקית כאל משטח אינסופי, במרכז הדיסקית.

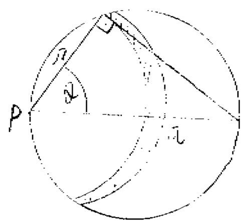
ואילו לגבי $y \gg a$ מרחק גדול מהדסקית:
כאל מטען נקודתי.

$$E = \frac{Q}{y^2}$$

נחשב את הפוטנציאל על ההיקף של הדסקית בנקודה P.

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{\rho\,dv}{r}$$

נעשה אינטגרציה על פני קשתות.



קיים:

$$d\varphi = \frac{2r\theta\sigma}{r}\,dr$$

לכן:

$$d\varphi = 2\theta\sigma\,dr$$

$$r = 2a\cos\theta \Rightarrow dr = -2a\sin\theta\,d\theta$$

נציב את dr:

$$d(\varphi) = -4a\sigma\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$\varphi_{(P)} = -\int_{\pi/2}^{0} 4a\sigma\theta\sin\theta\,d\theta = 4a\sigma\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\,d\theta =$$

$$= 4a\sigma\left[-\theta\cos\theta + \sin\theta\right]_0^{\pi/2} = 4a\sigma$$

כזכור: במרכז הדיסקיה

$$\varphi_{(0)} = 2\pi\sigma a$$

ולכן, הפוטנציאל במרכז גדול מהפוטנציאל בהיקף

$$\varphi_{(0)} = 2\pi\sigma a > \varphi_{(a)} = 4a\sigma$$

השינוי בפוטנציאל לאורך רדיוס הדסקית גורם למסקנות:

$$\frac{d\varphi}{dr} \neq 0 \Rightarrow \underline{E} \neq 0$$

באשר:

$$E_{(r)} = -\frac{d\varphi}{dr}$$

φ קטן כלפי חוץ ולכן $-\frac{d\varphi}{dr} > 0$

והשדה שיתקבל יהיה מהמרכז כלפי חוץ.

אם יש מטען בשדה אזי פועל כח ותהיה תנועה. לכן הגודל σ אינו קבוע וצפיפות המטענים תשתנה – מטענים ינועו בכיוון המרכז עד להתאפסות השדה.

הגודל σ – צפיפות המטען ישאר קבוע על פני הדסקית רק כאשר המטענים אינם יכולים לנוע – ז"א שהחומר הוא חומר מבודד.

(11) משטחים שוי פוטנציאל

משטח שוה פוטנציאל יוגדר כמשטח שהפרש הפוטנציאלים בין שתי נקודות שעל המשטח הוא 0. (אמ"ם אין רכיב של השדה בכוון מקביל למשטח) השדה החשמלי חייב להיות ניצב למשטחים שוי פוטנציאל.

הוכחה:

קיים:

$$d\varphi = -\underline{E}\,d\underline{s}$$

המשטח שוה פוטנציאל. לכן עבור $d\underline{s}$ על פני המשטח קיים: $d\varphi = 0$

ז"א:

$$\underline{E}\,d\underline{s} = 0$$

והיות וזאת מכפלה סקלרית: $\underline{E} \perp d\underline{s}$

ז"א – $\underline{E}$ ניצב למשטח.

מש"ל.

צפיפות האנרגיה בשדה חשמלי

כפי שראינו – האנרגיה של מערכת מטענים:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

וזה ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

קיים:

$$\varphi_i = \sum_{j\neq i}\frac{q_i}{r_{ij}}$$

באשר זהו הפוטנציאל במקום של q_i בגלל שאר המטענים.

לכן.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} q_i\varphi_i$$

כגבול – בהתחלקות מטען רציפה:

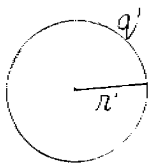
$$q_i = \rho\,dv$$

ונקבל:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\oint \rho(x,y,z)\,\varphi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

בהנחה ש ρ סופי ניתן להזניח את תרומת האלמנט $dx\,dy\,dz$ עצמו – ל $\rho(x,y,z)$ בגלל שם הפוטנציאל מתאפס ממילא.

דוגמא לשימוש:



נתונה קליפה כדורית ברדיוס r' ועליה מטען q'.

$$\rho\,dv = \sigma\,da$$

באשר da אלמנט שטח.

$$U = \frac{1}{2}\int_{\text{נפח}}\rho\varphi\,dv = \frac{1}{2}\int_{\text{שטח}}\sigma\varphi\,da =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\varphi 4\pi r'^2 = \frac{1}{2}q'\varphi(r')$$

קיים

$$\varphi(r') = \frac{q'}{r'}$$

ולכן:

$$U = \frac{1}{2}\frac{(q')^2}{r'}$$

שינויי האנרגיה: נניח שמכווצים את הכדור

ל - $r = r' - \Delta r$

לגבי Δr קטן נכון בקירוב טוב:

$$\Delta U = \frac{dU}{dr'}(-\Delta r)$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{q'^2}{r'^2}(-\Delta r) = \frac{\Delta r\, q'^2}{2r'^2}$$

ז"א $\Delta U > 0$. גם למטען חיובי וגם למטען שלילי יש להוסיף אנרגיה בכדי לכווץ את המטען.

קבלנו:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q'^2}{r'^2}\Delta r = \bar{F}\,\Delta r\,\Delta a$$

כאשר: $\bar{F}$ - כח ליח' שטח.

$$\bar{F} = \frac{\Delta U}{4\pi r^2 \Delta r} = \frac{1}{8\pi}\frac{q'^2}{r'^4}$$

צפיפות המטען

$$\sigma = \frac{q'}{4\pi r^2}$$

ולכן:

$$\bar{F} = \frac{1}{2}\sigma\, q'/r^2 = \frac{1}{2}E\sigma$$

וזהו כאמור הכח ליח' שטח.

נחפש את תלות האנרגיה בשדה: $U(E)$.

כזכור:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{r^2}\Delta r$$

כאשר שינוי האנרגיה היה ע"י כווץ הקליפה הכדורית, ולכן כיווץ השדה.

השינוי בנפח היה:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2}\, q^2/r^2\, \Delta r}{4\pi r^2\, \Delta r}$$

השדה שמחוץ לנפח המקורי נשאר כפי שהיה. לכן - ניתן לייחס את תוספת האנרגיה לשינוי בנפח. הביטוי שקבלנו הוא שינוי באנרגיה לשינוי ביח' נפח.

לגבי נפח סופי:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dv$$

נניח בשלב זה שבמקרה הכללי

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2\, dv$$

ונבדוק אם אמנם הדבר נכון.

בקליפה כדורית טעונה קיים:

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{r}$$

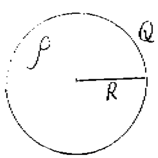
$$E = \frac{q}{r^2}$$

ואמנם:

$$\frac{1}{8\pi}\int_r^{\infty}\frac{q^2}{x^4}4\pi x^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{q^2}{r}$$

דוגמא לחישוב אנרגיה:

נתון כדור טעון הומוגנית:



האנרגיה לפי הנוסחא ל - U.

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dv$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad ; \quad \varphi = \frac{3Q}{2R} - \frac{Qr^2}{2R^3}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{3Q}{4\pi R^3}\int_0^R\left(\frac{3Q}{2R} - \ldots\right.$$

$$= \frac{3}{8}\frac{Q^2 4\pi}{\pi R^3}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{R}\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{2R^3}\cdot\frac{1}{5}R^5\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{Q^2}{R^3}\left[\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{10}R^2\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}\frac{Q^2}{R^3}R^2 =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

נבדוק את האנרגיה לפי:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_0^{\infty} E^2 dv$$

$$U = U_{int} + U_{ext}$$

$$U_{in} = \frac{1}{8\pi}\int_0^R E_{in}^2 \, 4\pi r^2 \, dr$$

$$U_{ex} = \frac{1}{8\pi}\int_R^{\infty} E_{ex}^2 \, 4\pi R^2 \, dr$$

$$E_{in} = \frac{Q}{R^3} r \implies U_{in} = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{Q^2}{R^6} r^4 dr = \frac{1}{10}\frac{Q^2}{R}$$

$$E_{ex} = \frac{Q}{r^2} \implies U_{ex} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} \frac{Q^2}{r^4} r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R}$$

$$U = U_{in} + U_{ex} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$$

קבלנו תוצאה זהה בשתי שיטות החישוב, דבר המאשר את הגישה:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dv$$

(13) **<u>הדיורגנס של וקטור:</u>**

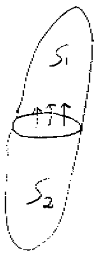
נתון משטח סגור תלת ממדי. יהי וקטור של שדה אזי:

$$\Phi = \int_S \underline{F}\, d\underline{a}$$

נחלק את המשטח לשני חלקים (לאו דוקא שוים)

אזי:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$



$$\int_{S_1} \underline{F}\, d\underline{a} + \int_{S_2} \underline{F}\, d\underline{a} = \Phi$$

ניתן להמשיך ולחלק את המשטח. נקבל:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i$$

באשר

$$\Phi_i = \int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a}$$

וקיים:

$$\int_S \underline{F}\, d\underline{a} = \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a}$$

בגבול - $S_i \Rightarrow 0$

נניח שנפח המשטח המקורי - V אזי:

$$\lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i}\int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a} \overset{?}{=} \mathrm{div}\, \underline{F}(x,y,z)$$

$\mathrm{div}\, \underline{F}$ הוא סקלר והוא פונקציה מקומית.

הערה: לא הוכח קיום הגבול הנ"ל: אנו יוצאים מהנחת קיומו.

כאמור:

$$\Phi = \int_S \underline{F}\, d\underline{a} = \sum_i \int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a}$$

$$= \sum_i V_i \left(\frac{\int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a}}{V_i}\right) = \int \mathrm{div}\, \underline{F}\, dv$$

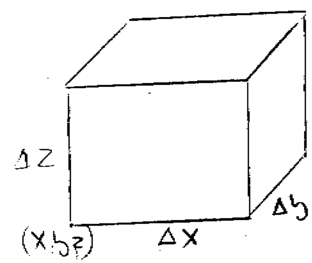
ד"א:

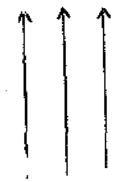
$$\boxed{\int_S \underline{F}\, d\underline{a} = \int_V \mathrm{div}\, \underline{F}\, dv}$$

זהו משפט הדיורגנס (או משפט-גאוס).

<u>דוגמא:</u>

נתונה קוביה שצלעותיה: $\Delta x, \Delta y, \Delta z.$





כוון השדה $\underline{F}$ (z)

השטף:

נכנס: D – תחתית הקוביה.

U – מכסה הקוביה.

$$\Phi = -F_{zD}\Delta x\Delta y + F_{zU}\Delta x\Delta y$$

כאשר F_{zD} – שטף נכנס לקוביה

F_{zU} – שטף היוצא מהקוביה

וקיימת האפשרות $F_U \neq F_D$ בגלל שינוי בגודל הוקטור.

(באופן אנלוגי – נקבל תוצאות דומות לגבי F_y ו F_x)

קיים:

$$F_{zU} = F_{zD} + \frac{dF_z}{dz}\Delta y$$

ולכן השטף היוצא מהקוביה:

$$(F_{zU} - F_{zD})\Delta x\Delta y = \frac{dF_z}{dz}\Delta z\Delta x\Delta y$$

וזהו השטף היוצא דרך הפאה העליונה.

השטף הכללי היוצא בגבול:

$$\int_{S_i} \underline{F}\, d\underline{a} = \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

ד"א:

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{F} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}}$$

זהו ביטוי כללי ל $\mathrm{div}\,\underline{F}$ במערכת קרטזית.

לכן – לגבי כח נתון וגזור מסתבר שאמנם הדיורגנס קיים.

הערה:

כזכור:

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f = \frac{df}{dx}\hat{x} + \frac{df}{dy}\hat{y} + \frac{df}{dz}\hat{z}$$

וקבלנו:

$$\Delta f = \nabla f\, \Delta s$$

כלומר יש משותף בין ה – grad לבין div למרות שה grad הוא וקטור הנובע מסקלר

וה – div סקלר הנובע מוקטור.

כלומר: f פונקציה סקלרית $\quad \mathrm{grad}\, f = \nabla f$

F וקטור. $\quad \mathrm{div}\,\underline{F} = \nabla \cdot \underline{F}$

$$\mathrm{div}\, F \neq \mathrm{grad}\, f$$

ואין לבלבל ביניהם.

(14) <u>חוק גאוס בצורה דפרנציאלית</u>

כזכור:

$$\Phi = \int_S \underline{E}\, d\underline{a} = \int_V \mathrm{div}\, E\, dv$$

מתוך חוק גאוס:

$$\int_S E\,da = 4\pi \int_V \rho\,dv$$

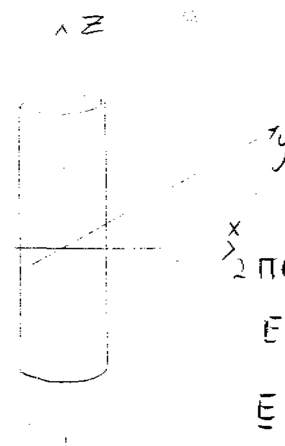
ולכן:

$$\boxed{div\,E = 4\pi\rho}$$

כאשר הדיורגנס – לגבי נק' (x,y,z) מסוימת. ρ – צפיפות מקומית שם.

<u>דוגמא:</u>

נתון גליל ברדיוס R ועליו צפיפות מטען ρ.



השדה מחוץ לגליל לגבי $r \geq R$:

$$E(r) = \frac{2\lambda}{r}$$

כאשר :

$$\lambda = \pi R^2 \rho$$

נחשב את השדה בתוך הגליל – לגבי $r < R$

$$2\pi r E = 4\pi^2 r^2 \rho$$

ולכן:

$$E = 2\pi r \rho$$

$$E = 2\pi\rho\,(x\,i + y\,j)$$

כאשר z : הציר המרכזי של הגליל.

x, y – ניצבים למעטפת הגליל וראשית הצירים על הציר :

לכן:

$$div\,E = 2\pi\rho + 2\pi\rho = 4\pi\rho$$

מחוץ לגליל :

$$E_r = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2\lambda}{r^2}(x\,i + y\,j) =$$

$$= \frac{2\lambda}{(x^2+y^2)}(x\,i + y\,j)$$

$$div\,E = 2\lambda\left(\frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

ז"א:

$$div\,E = 0$$

וזה מפני ש ρ מחוץ לגליל הוא – 0.

(15) <u>האופרטור – נבלה; משואת פואסון ומשואת לפלס</u>

קיבלנו:

$$div\,E = 4\pi\rho$$

כאשר:

$$div\,E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

וכמו כן:

$$E = -grad\,\varphi = -\nabla\varphi$$

ופירושו:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,j - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,k$$

נציב את $\underline{E}$ כגרדיינט של הפוטנציאל בדיורגנס ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=-4\pi\rho$$

ז"א:

$$\boxed{-4\pi\rho=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}$$

וזאת נוסחאת הקשר בין פוטנציאל בנקודה ובין המטען באותה נקודה.

היא נקראת בשם: "משואת פואסון" והיא המשואה הראשית של האלקטרוסטטיקה.

הנוסחא היא כאמור:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=-4\pi\rho$$

כאשר

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\underline{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\underline{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\underline{k}$$

נגדיר אופרטור וקטורי "נבלה" כדלקמן:

$$\underline{\nabla}=\underline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\underline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\underline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

כך שמפעילים אותו על φ ומקבלים את $\underline{\nabla}\varphi$.

באופן סימבולי – עושים זאת כאילו זה היה מכפלה סקלרית

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

מתוך משואת פואסון:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)=-4\pi\rho$$

ז"א ;

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi)=-4\pi\rho$$

הסימן המקובל:

$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\varphi)=\underline{\nabla}^2\varphi$$

(אין לסימון אלא משמעות סמבולית בלבד)

ולכן:

$$\boxed{\underline{\nabla}^2\varphi=-4\pi\rho}$$

עבור המקרה הפרטי בו $\rho=0$ נקבל: $\nabla^2\varphi=0$

המשואה הזאת נקראת בשם "משואת לפלס", וכפי שנראה יש לה חשיבות בתחומים מסוימים.

דוגמא לשימוש:

כזכור: $U=\int\frac{1}{2}\rho\varphi\,dv$

נוכיח ש – $U=\frac{1}{8\pi}\int E^2dv$

באשר: V נפח בו $\varphi\neq0$

לפי פואסון: $\rho=-\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}^2\varphi$

לכן:

$$U=-\frac{1}{8\pi}\int_{\text{כל המרחב}}\varphi\,\nabla^2\varphi\,dv$$

נבחן את הביטוי : $\mathrm{div}(\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\varphi)$

$$\mathrm{div}(\varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi)=\mathrm{div}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\underline{i}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\underline{j}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\underline{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=$$

$$=(\mathrm{grad}\,\varphi)^2+\varphi\nabla^2\varphi$$

קיבלנו:

$$div(\varphi\, grad\, \varphi) = \underline{E}^2 + \varphi \nabla^2 \varphi$$

אזי:

$$\varphi \nabla^2 \varphi = -E^2 + div(\varphi\, grad\, \varphi)$$

ולכן:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dv - \frac{1}{8\pi}\int div(\varphi\, grad\, \varphi)\, dv$$

האינטגרציה על כל המרחב – ז"א על נפח אין-סופי. בתנאי זה קיים:

$$\int div(\varphi\, grad\, \varphi)\, dv = \int div(-\varphi \underline{E})\, dv = -\int_S \varphi E\, da$$

כאשר S – משטח המקיף את כל הנפח.

כאשר המרחק אין סופי, ניתן להתיחס כאילו המטען נקודתי.

ז"א:

$$\varphi \sim \frac{1}{R}, \quad E \sim \frac{1}{R^2} \qquad S \sim R^2$$

ואז:

$$\lim_{R\to\infty} \int_S \varphi E\, da = 0$$

והתוצאה:

כאשר מתייחסים לפוטנציאל על כל המרחב עד לאין סוף קיים:

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int_V \underline{E}^2 dv}$$

הערה: בדרך כלל בחקר הדיורגנס של וקטור נגיע לאיברים המתאפסים – כשם שהגענו בפעם זאת.

נחזור על ההוכחה תוך שימוש באופרטור נבלה:

$$\underline{\nabla}(\varphi \nabla \varphi) = (\underline{\nabla} \varphi)(\underline{\nabla} \varphi) + \varphi \underline{\nabla}^2 \varphi$$

ולפי חוקי גזירה.

לכן:

$$\varphi \nabla^2 \varphi = -(\nabla \varphi)^2 + \underline{\nabla}(\varphi \underline{\nabla} \varphi)$$

כאשר האיבר: $\underline{\nabla}(\varphi \underline{\nabla} \varphi)$ מתאפס באינסוף.

ומכאן:

$$\varphi \nabla^2 \varphi = -(\nabla \varphi)^2 = -\underline{E}^2$$

והתוצאה הסופית היא:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2 dv$$

הערה: במעבר:

$$\underline{\nabla}(\varphi \underline{\nabla} \varphi) = (\underline{\nabla} \varphi)(\underline{\nabla} \varphi) + \varphi \nabla^2 \varphi$$

יכולנו להשתמש בחוקי גזירה כי השלב הזה אנלוגי לשלב:

$$div\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\underline{i} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}\underline{j} + \underline{\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\underline{k}}\right)$$

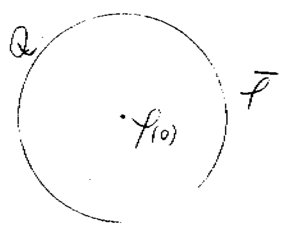
בפיתוחים אלו מסוכמת כל האלקטרוסטטיקה. התיחסנו למטען כאילו הוא רציף ולכן לפונקציות כאילו הן רציפות. כידוע, אין המטען במציאות רציף אלא בא ביח' יסוד. למרות זאת – בממדים מאקרוסקופיים אמנם קיים:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$$

(16) <u>תכונות של פונקציות הרמוניות</u>

נתון כדור טעון. ממוצע הפוטנציאל על פני הכדור שווה לפוטנציאל במרכזו.

נניח:



Q' – מטען חיצוני

Q – מטען על הכדור.

וקיים:

$$\bar{\varphi} = \varphi(0)$$

הוכחה:

א. אם Q כולו בנקודה 0. האינטרקציה בין Q ו φ תהיה:

$$W_1 = \varphi(0)\,Q$$

ב. נניח ש - Q מפוזר הומוגנית על פני הכדור.

האינטראקציה תהיה:

$$W_2 = \oint \varphi\sigma\, da = \frac{Q}{4\pi R^2}\int \varphi\, da$$

נגדיר:

פוטנציאל ממוצע:

$$\bar{\varphi} \triangleq \frac{1}{4\pi R^2}\int \varphi\, da$$

ונקבל:

$$W_2 = Q\bar{\varphi}$$

לגבי כל נק' שמחוץ לכדור הפוטנציאל והשדה הודות ל - Q יהיו כאילו Q מרוכז במרכז השדה.

לכן:

$$W_1 = W_2$$

וקיים:

$$\varphi(0) = \bar{\varphi}$$

<u>סיכום:</u>

מתוך חוק קולון:

$$\oint_S E\, da = 4\pi Q$$

דרך משטח סגור.

המשפט המתמטי אומר:

$$\int_S \underline{E}\, d\underline{a} = \int_V \mathrm{div}\, \underline{E}\, dv$$

והשילוב:

$$\mathrm{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho$$

ומתוך $\underline{E} = -\nabla\varphi$

קבלנו:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho}$$

(17) <u>שדות חשמליים ליד מוליכים</u>

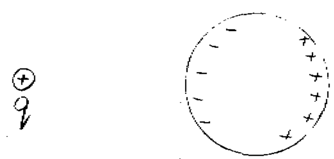
לצורך הדיון - מוליך הוא מוליך אידיאלי.

במוליך, $E \neq 0 \Leftarrow$ תנועת מטענים $\Leftarrow$ אין מצב של אלקטרוסטטיקה.

לכן נדון במוליכים בהם $E = 0$.

דוגמא:

נתון מטען $+q$ ולידו גוף מוליך נייטרלי. ע"י השראה יווצר הפרש פוטנציאלים על הגוף הנייטרלי וייוצר שדה נגדי המאפס את הראשון.



גוף מוליך נייטרלי.

לכן:

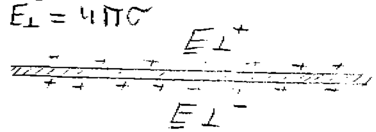
א. בתוך מוליך $E = 0$

ב. $E_{\parallel} = 0$ ז"א: המרכיב המקביל של השדה על פני המוליך שווה ל - 0.

אין מניעה שיהיה שדה ניצב למשטח המעון לכן $\varphi = Const$ על פני המשטח.

ג. $E_{\perp} = 4\pi\sigma$ על פני משטח מוליך. זה נובע מחוק גאוס האומר:

$$E_{\perp}^{+} - E_{\perp}^{-} = 4\pi\sigma$$



הקשר $E_{\perp} = 4\pi\sigma$ הוא קשר <u>מקומי</u>. אין מדובר בשדה שמקורו במטען על פני המוליך דוקא – יתכן שהשדה נוצר על ידי מטענים מחוץ למשטח.

כאמור:

$$\varphi(0) = \bar{\varphi}_{\text{כדור}}$$

נניח: בואקום:

$$\nabla^2\varphi = 0$$

(ז"א העדר מטענים)

אזי φ בכל נק' שווה לממוצע של φ על פני כדור שמקיף את הנקודה.

כל נק' בה $\nabla^2\varphi = 0$ היא נק' הרמונית.

הטענה: בואקום באיזור בו אין מטענים אמנם $\bar{\varphi} = \varphi(0)$

הוכחה: נקודה 0 מוקפת בכדור דמיוני שעליו מטען Q דמיוני כפי שהוכח בדיון על תכונות פונקציות הרמוניות מתקיים על הכדור: $\bar{\varphi} = \varphi(0)$

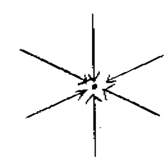
תוצאה: בשדה חשמלי בואקום לא יתכן שדה של שווי משקל יציב.

נק' בעלת שיווי משקל יציב – שבה לפוטנציאל מקסימום מקומי או מינימום מקומי מהווה סתירה למשפט האחרון.

נניח שבנק' מסוימת פוטנציאל קטן יותר מאשר בסביבה. נקיף אותה בכדור דמיוני ונקבל סתירה למשפט הנ"ל.

הוכחה נוספת: נניח שקיימת נק' שיווי משקל בעלת מינימום מקומי.

צורת השדה סביבה תהיה:



נקיף את הנק' בכדור – השטף דרכו יהיה שונה מ – 0, ז"א $div \neq 0$ וזאת סתירה כי כאמור אין מטענים באיזור.

<u>משפט היחידות</u>

לכל בעיה אלקטרוסטטית בנוכחות משטחים מוליכים יש פתרון אחד ויחיד.

נניח שאמנם קיים פתרון ונוכיח יחידות (בהגבלה לנוכחות משטחים מוליכים)

נניח φ_1, φ_2 פתרונות. אזי:

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\varphi_1 &= 0\\ \nabla^2\varphi_2 &= 0\end{aligned}\right\}$$ בכל התחום

קיימים n משטחים מוליכים: $i = 1, 2 \ldots n$

אזי:

$$\varphi = \varphi_i \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_i \quad \varphi_i = \varphi_i \quad \varphi_n = \varphi_i$$

באשר – $\varphi = const$ על פני המרחב.

משואת לפלס הינה לינארית לכן $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ מהווה פתרון ובפרט $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ מהווה פתרון.

נגדיר:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$$

אזי

$$\nabla^2\psi = 0$$

לכן – על כל משטח לחוד – $\psi = 0$

יש להראות:

$$\psi \equiv 0$$

נניח ש – $\psi \neq 0$

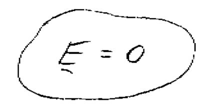
ψ באינסוף שוה ל 0 וגם על המשטחים $\psi = 0$ ומכיון ש ψ הינה פונקציה רציפה הרי בהכרח שיהיה ל ψ מכסימום מקומי או מינימום מקומי. נניח שהאכסטרמים ב P . שם אין מטען ואם נקיפה בכדור הרי על סמך מסקנה מלפלס הפוטנציאל הממוצע על הכדור שוה לזה שבמרכז כלומר P אינה אכסטרמום.

לכן:

$$\psi \equiv 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

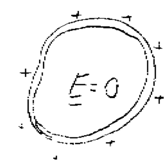
ז"א אם יש פתרון לבעיה אלקטרוסטטית, אז הוא פתרון יחיד.

נתענין במשטח מוליך סגור:



הוכחנו $E=0$ בפנים לגבי כדור. נוכיח זאת לגבי כל משטח סגור.

נניח שהמשטח טעון:



המטענים יתפזרו על פני המשטח,

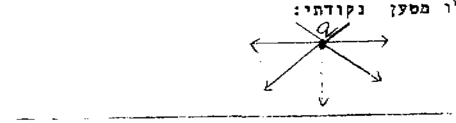
כך שבתוך החומר $E=0$ ולכן $E=0$

על השפה הפנימית.

בתוך הגוף קיים:

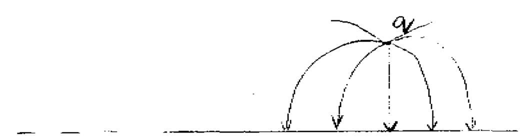
$$\left.\begin{aligned} E &= -\nabla\varphi \\ \varphi &= \text{const} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E=0$$

נניח: נתון מישור מוליך ומולו מטען נקודתי:



המרכיב הניצב של השדה לא משפיע כלל על המשטח.

המרכיב המקביל יגרום לתנועת מטענים וליצירת שדה נגדי. לכן נקבל תמונה כזאת:



נמצא פתרון כמותי.

הפתרון מקיים:

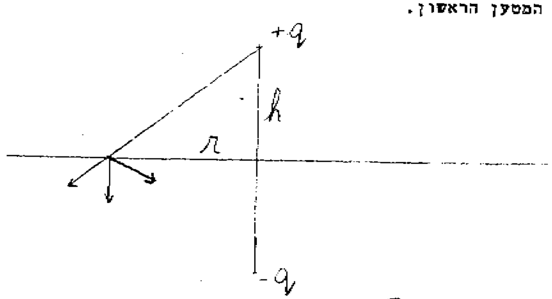
$$\nabla^2\varphi=0$$

$$E_{\parallel}=0$$

$$E_{\perp}=4\pi\sigma$$

והוא הפתרון היחידי.

נפתור את הבעיה בשיטת הבבואות – ז"א נתיחס כאילו מול המטען נמצא מטען הפוך שהוא שיקוף במשטח של המטען הראשון.



במצב זה: $E_{\parallel}=0$

מטעמי סימטריה:

$$E_{\perp}=\frac{2qh}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

בכאשר (h^2+r^2) הוא ריבוע המרחק.

המשטח מוליך. לכן $E_{\perp}=4\pi\sigma$

וקבלנו

$$\sigma=\frac{E_{\perp}}{4\pi}$$

ז"א לא המטען גורם לשדה אלא השדה גורם למטען.

והתוצאה:

$$\sigma=\frac{q}{2\pi}\frac{h}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

זאת צפיפות המטען המושרית על המשטח. תתקבל קרוב למטען החיצוני הצפיפות מכסימלית ורחוק מאוד ממנו – $\sigma\to 0$

נבדוק את המטען הכללי על המשטח –

$$Q=\int\sigma\,da=\int_0^\infty\sigma\,2\pi r\,dr=qh\int_0^\infty\frac{r\,dr}{(h^2+r^2)^{3/2}}$$

ועשינו אינטגרציה בטבעות ברדיוס r).

$$Q = qh\left[-(h^2+r^2)^{-1/2}\right]_0^\infty = q$$

ז"א:
$$Q = q$$

קיים מעין שימור מטען. קבלנו מטען מקומי כשסה"כ המטען המושרה שווה למטען המקורי. מעשית – פירושו שכל קוי הכח מהמטען המקורי מגיעים למישור.

הפתרון הנ"ל מותנה כמובן בכך שהמישור אין סופי.

הכח שהמטען מפעיל על המשטח:

$$F = \frac{1}{2}\int_0^\infty E_\perp \sigma\, da = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2qh}{(h^2+r^2)^{3/2}} \frac{qh\, da}{2\pi(h^2+r^2)^{3/2}}$$

ומכאן :

$$F = \frac{1}{2\pi} q^2h^2 \int_0^\infty \frac{2\pi r\, dr}{(h^2+r^2)^{3/2}} = q^2h^2\int_0^\infty \frac{r\, dr}{(h^2+r^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{q^2h^2}{4(r^2+h^2)^2}\Bigg|_0^\infty = \frac{q^2}{4h^2}$$

ז"א:
$$F = \frac{q^2}{4h^2}$$

וזה גם הכח שהמשטח מפעיל על המטען.

זהו למעשה גם הכח בין המטען $+q$ ובין תמונת הראי שלו – $-q$ כאשר

$$F = \frac{q^2}{4h^2} = \frac{q^2}{(2h)^2}$$

ומכאן שאמנם זהו הפתרון הנכון, ובגלל יחידות הפתרון – זהו הפתרון היחידי.

<u>סיכום לתנאים לגבי שדות על פני מוליכים</u>

א. $E = 0$ בתוך המוליך $\Longleftrightarrow$ $\varphi = \text{const}$

ב. $E_\parallel = 0$ על פני המוליך $\Longleftrightarrow$ $\varphi = \text{const}$

ג. $E_\perp = 4\pi\sigma$ על פני המוליך.

ד. משפט היחידות: $\varphi(0) = \bar{\varphi}$

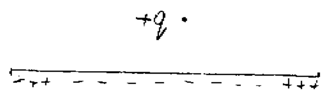
$$\nabla^2\varphi = 0$$

מכאן הסקנו: בתוך משטח מוליך $E = 0$ כאשר φ על השפה הפנימית קבוע.

לגבי $r > 0$ קיים $\varphi = \frac{Q}{r}$ וזאת אמנם פונקציה שאין לה אכסטרמום.

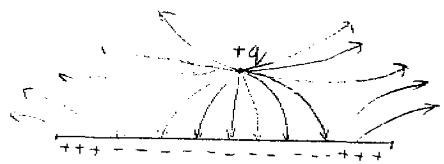
המשך דוגמאות:

I נתון מטען $+q$ ומולו משטח מוליך <u>סופי</u> ומנותק מהסביבה.

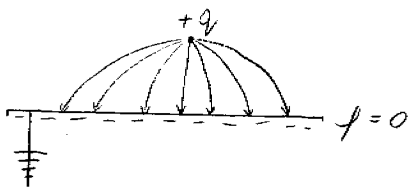


סה"כ המטען על הדסקית – 0 (בגלל שימור מטען)

צורת השדה תהיה:



II נחבר את הלוחית לאדמה. על הלוח נקבל $\varphi = 0$ וצורת השדה תשתנה:



המטען העודף בורח לאדמה.

במקרה של הלוחית האין סופית - היא כביכול קשורה לאדמה. לכן חייב להיות עליה שימור מטען באשר $\varphi(\infty)=0$

על הלוחית המוארקת נקבל $Q<0$

במקרה וקוטר הלוחית $\gg$ מרחק המטען מהלוחית

נקבל פתרון דומה לפתרון של הלוחית האינסופית.

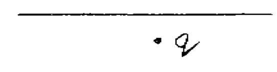
לגבי לוחית סופית שאינה מוארקת - אין טעם בשיטת הבבואה כי בכלל אין שינוי במטען.

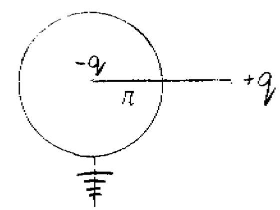
למעשה - לגבי כל לוחית סופית אין הפתרון של הבבואה נכון לחלוטין כי לא כל קוי השדה מגיעים ללוחית.

הערה: בצידו השני של המשטח המוליך

<u>אין</u> שדה בכלל.

את שיטת הבבואה ניתן ליישם לכדור מוליך. שני מישורים ומטען ביניהם וכו'.

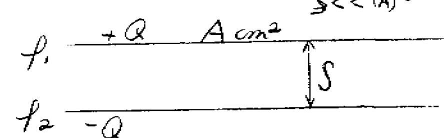




(19) קבלים

נתונים שני משטחים מוליכים ששטחם $A\,cm^2$ והמרחק ביניהם - S

נניח שהם מעוגנים וקיים: $S \ll (A)^{1/2}$



הפוטנציאל קבוע על כל אחת מהלוחיות.

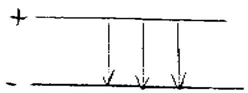
מטעמי סימטריה: $\sigma = Const$

הנק' היח' שאינן אקוויולנטיות הן נק' השפה אך ברוב השטח:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

בקירוב טוב.

צורת השדה:



$$E_\perp = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{Q}{A}$$

למערכת כנ"ל נקרא בשם "קבל".

קיבול המערכת - יוגדר כדלקמן:

$$C \equiv \frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}$$

ז"א:

$$C = \frac{\text{מטען לוחית אחת}}{\text{הפרש הפוטנציאלים}}$$

הפרש הפוטנציאלים שוה לעבודה להעברת יח' מטען מלוחית אחת לשניה. נבחר בדרך הישרה - הניצבת. אזי:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_\perp S = \frac{4\pi Q}{A} S$$

ומכאן:

$$\boxed{C = \frac{A}{4\pi S}}$$

וזהו קבול של קבל לוחות לגביו $(A)^{1/2} \gg S$

היחידות:

$$[C] = \frac{cm^2}{cm} = cm$$

לכן, לקיבול יח' של אורך.

היחידה מקובלת:

$$\frac{Coul}{volt} = \frac{3\cdot 10^9 \; esu}{1/300 \; stat\,volt} = 9\cdot 10^{11} \frac{esu}{stat\,volt} =$$

$$= 9\cdot 10^{11}\, cm = 1 \;\; Farad$$

היחידה פרד גדולה מדי לשימוש רגיל.

נשתמש ביח':

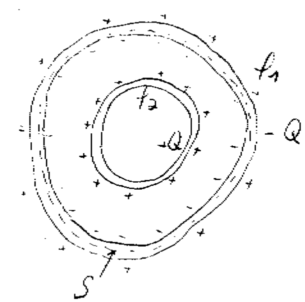
$$\mu F = 10^{-6} F$$

$$pF = 10^{-12} F$$

הגדרנו את הקבל כזוג מוליכים מבודדים כשלשניהם מטען זהה הפוך בכוונו.

למעשה – ניתן להאריך אחד מהלוחות לאדמה ולטעון את השני במטען כרצוננו, ואז יושרה בשני מטען שווה בגודלו והפוך בסימנו.

<u>קבל סגור:</u>



מטען על המוליך החיצוני לא ישנה כלום, כי אין שדה בתוך ואין בו ענין מבחינת הגוף הפנימי.

נשים מטען $+Q$ על הגוף הפנימי.

בתוך המתכת החיצונית קיים $E = 0$ נקח משטח מתמטי – S בתוך המשטח החיצוני.

לגביו קיים: $\oint_S E\, da = 0$

לכן – על השפה הפנימית של הגוף הפנימי יהיה מטען $-Q$ (מטען של $+Q$ ידחה לשפה החיצונית של המשטח החיצוני).

הצפיפות לא תהיה קבועה בבלל עקמומיות משתנה וברור שקיים:

$$\sigma_{ext} \neq \sigma_{in}$$

אך למרות זאת יתקיים כאמור:

$$Q_{ex} = -Q_{in}$$

ויתקיים:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

הערה: לגבי השיקול למטען $-Q$ על השפה הפנימית:

כזכור:

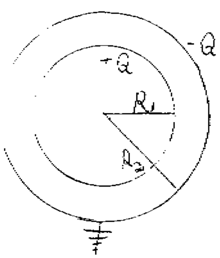
$$\Phi = 4\pi \sum_i Q_i$$

$$E = 0 \Rightarrow \oint_S E\, da = 0$$

לכן:

$$\sum Q_i = 0$$

ז"א – שאם על הגוף הפנימי מטען $+Q$ על מנת לאזן את כמות המטענים בתוך המשטח הדמיוני S יהיה על השפה הפנימית של הגוף החיצוני מטען $-Q$.



נפתור את הבעיה לגבי זוג כדורים.

נתונים כדורים ברדיוסים R_1 ו R_2 כאשר $R_1 > R_2$ טוענים את הכדור הפנימי במטען $+Q$ ומקבלים ע"י הארקה מטען $-Q$ על הכדור החיצוני.

נבדוק את הפוטנציאל בין שני הכדורים. $R_2 \le r \le R_1$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{R_1}$$

$$\varphi(R_1) = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_1}$$

$$\varphi(R_1) = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_1} = 0$$

(בגלל הקשר לאדמה – אם לא היתה הארקה היה איבר נוסף)

לכן:

$$\varphi(R_2) - \varphi(R_1) = \frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{R_1}$$

(במקרה זה היה האיבר הנוסף מתאפס – ומכאן שהפתרון זהה בין שיש הארקה ובין שאין.)

$$C = \frac{Q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{Q}{\frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{R_1}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

ומסתבר שאמנם ממדי C הם – cm

במקרה הגבולי – $R_2 \to R_1$

$R_1 , R_2 \gg s$ $\quad R_1 - R_2 = s$

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \approx \frac{R^2}{s} = \frac{4\pi R^2}{4\pi s} = \frac{A}{4\pi s}$$

ז"א.

$$C = \frac{A}{4\pi s}$$

ובהתאם למצופה – קבלנו קיבול המזכיר קבל לוחות.

במקרה הגבולי האחר $R_1 \to \infty$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} = R_2$$

ז"א: לגבי כדור בודד $C = R$.

לכן, הקיבול של כדור ברדיוס $9 \times 10^{11}\ cm$ יהיה 1 Farad

(20) <u>האנרגיה של קבל</u>

בקבל לוחות:

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi \frac{Q}{A}$$

כמו כן:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dv$$

נניח שהשדה נגמר בצורה הומוגנית בקצוות הקבל.

אזי: $V = A s$

וקיים:

$$W = \frac{1}{8\pi} \frac{16\pi^2 Q^2}{A^2} A s = \frac{1}{2} 4\pi Q^2 \frac{s}{A}$$

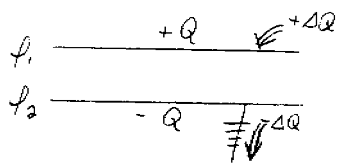
והתוצאה תהיה:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

נחשב את האנרגיה לפי תנועה מטען ופוטנציאלים.

נוסיף לקבל מטען ב – Q מטען ΔQ.

מהי תוספת האנרגיה?



תוספת העבודה תהיה:

$$\Delta W = \Delta Q \cdot \varphi_1$$

$$\varphi_2 = 0 \Rightarrow C = \frac{Q}{\varphi_1} \Rightarrow \Delta W = \Delta Q \frac{Q}{C}$$

$$W = \int dw = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

והתוצאה זהה:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

מסתבר שאותה תוצאה נכונה גם לקבל לא מישורי.

למשל בקליפה כדורית:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv$$

$$E(r) = \frac{Q}{r^2} \Longleftarrow R_2 \le r \le R_1$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_{R_2}^{R_1}\frac{Q^2}{r^4}\,4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

(21) <u>משפט תומסון</u>

$$\frac{1}{8\pi}\int \underline{E}^2\,dv = \text{extremum}$$

הביטוי $\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv$ יקבל בכל מקרה של בעיה אלקטרוסטטית ערך אכסטרמלי - מכסימום או מינימום.

בדרך כלל - הביטוי הנ"ל מכיל מספר פרמטרים שונים. נצפה לערך אכסטרמלי לכל אחד מהם.

<u>הוכחה:</u>

נתון: $W = \frac{1}{8\pi}\int \underline{E}^2\,dv$

נגדיר: δW - שינוי בעבודה.

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int \delta(E^2)\,dv$$

ולפי חוקי גזירה קיים:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int 2E\,\delta\underline{E}\,dv$$

ברצוננו לחשב:

$$\int \underline{E}\cdot\delta\underline{E}\,dv = \int(-\nabla\varphi)\cdot\delta\underline{E}\,dv$$

חישוב עזר:

$$\underline{\nabla}\cdot(\varphi\,\delta\underline{E}) = (\nabla\varphi)\,\delta\underline{E} + \varphi\,\underline{\nabla}\,\delta\underline{E}$$

(השימוש באופרטור $\underline{\nabla}$ - נבלה מתבצע כמו גזירה כאשר $\underline{\nabla}\varphi = \mathrm{div}\,\varphi$ וכו').

$$-\nabla\varphi\,\delta E = \varphi\nabla\,\delta E - \underline{\nabla}\,(\varphi\,\delta\underline{E})$$

וקבלנו:

$$\int \underline{E}\,\delta E\,dv = \int\varphi\,\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{E}\,dv - \int\underline{\nabla}\cdot(\varphi\,\delta\underline{E})\,dv$$

מסתבר שקיים:

$$\int\nabla(\varphi\,\delta\underline{E})\,dv = 0$$

ולכן:

$$\delta W = \frac{1}{4\pi}\int\varphi\,\nabla\cdot\delta\underline{E}\,dv = \frac{1}{4\pi}\int\varphi\,\delta(\mathrm{div}\,E)\,dv$$

מתוך

$$\mathrm{div}\,E = 4\pi\rho$$

קיים:

$$\delta(\mathrm{div}\,E) = 4\pi\,\delta\rho$$

ולכן:

$$\delta W = \int\varphi\,\delta\rho\,dv$$

תנאי השפה הם שקיימים N משטחים מוליכים שעליהם פוטנציאל קבוע - $\varphi_1 \ldots \varphi_N$

(במשפט תומפסון נכון רק לגבי קב׳ משטחים סגורים מוליכים בואקום)

לכן:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\int\delta\rho\,dv = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i\,\delta Q_i$$

ברצוננו להראות ש - $\int W = 0$

א. כל משטח בנותק מהסביבה - לכן אין שינוי מטען $\Longleftarrow$ $\int Q_i = 0$.

ב. משטחים אחרים המחוברים לאדמה. עליהם $\varphi = 0$

מכאן - $\int W = 0$

ומשמעותו של - W ערך אכסטרמלי.

הערה: הראינו רק שהנגזרת הראשונה של העבודה היא - 0. לא דנו בנגזרת שניה ושלישית - עקרונית יתכן ש - W היא בנק' פיתול אך לא מוכרות בעיות כאלו בפיזיקה.

פרק ב': שדות חשמליים בתוך החומר

(1) הקדמה

הנסיון מלמדנו כי ברגע שנכניס חומר דיאלקטרי לתוך קבל, הקבל משנה את קיבולו. מסתבר מן הנסיון כי חומר דיאלקטרי מגדיל את הקבול. נרצה לבדוק את חוקי האלקטרוסטטיקה בתוך חומר. ברגע שנחקור בעיות אלקטרוסטטיות בתוך חומר נגלה תופעות חדשות שלא התגלו לנו בואקום

בואקום הגדרנו את השדה החשמלי כ - $\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q}$ נרצה להגדיר את השדה באותו אופן בחומר אך המצאות מטען בתוך החומר משנה אותו ולכן ההגדרה לא תהיה לשדה בחומר עצמו. לכל היותר נוכל להגדיר שדה בתוך "חור" שבחומר.

הנסיון מלמדנו כי קבל ממולא חומר דיאלקטרי משנה את קבולו ביחס קבוע התלוי בטיב החומר, נסמנו ε ונקרא לו מקדם דיאלקטרי.

כמו כן מסתבר כי ε זה נכנס כגורם בחוק קולון בחומר.

$$\underline{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^2}$$

הערה: לצורך הדיון הנוכחי החומר יוגדר כאוסף חלקיקים (מולקולות או אטומים) שביניהן יש ואקום.

תזכורת: בגרם מולקולה יש:

$N_0 = 6 \times 10^{23}$ מולקולות

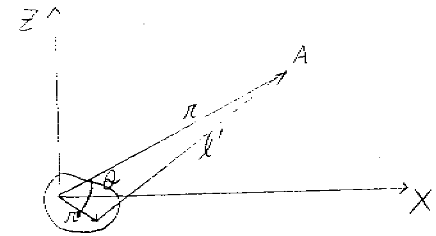
ומטען אלקטרון:

$$e = 4.8 \times 10^{-10}\ \text{e.s.u}$$

(2) פתוח הפוטנציאל במולטיפולים

קיים שדה חשמלי שנוצר ע"י מטען. ראשית הצירים - בתוך המטען.

נחשב את השדה במרחק גדול מהמטען.



$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x',y',z')\,dv}{\ell'}$$

כאשר: ℓ' – מנק' האינטגרציה ל – A.

r – מנק' הראשית ל – A.

r' – מנק' הראשית לנק' האינטגרציה..

לפי משפט הקוסינוסים:

$$\ell'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$$

באשר θ – הזוית בין r ו r'.

לכן:

$$\varphi_A = \int \frac{\rho(x',y',z')\,dv}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{1/2}}$$

קיים $r' \ll r$. נטפל במבנה האינטגרל.

$$[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2r'}{r}\cos\theta\right]^{-1/2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}+\frac{r'}{r}\cos\theta+\frac{3}{8}\cdot 4\frac{r'^2}{r^2}\cos^2\theta\right)$$

(לפי הפיתוח – $(1+x)^{-1/2} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2 \ldots$)

ומכאן:

$$\frac{1}{\ell'} = \frac{1}{r} + \frac{r'\cos\theta}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{3r'^2\cos^2\theta - r'^2}{r^3}+\ldots$$

ולכן:

$$\varphi_A = \int\frac{\rho}{r}dv + \int\frac{\rho r'\cos\theta\,dv}{r^2} + \int\frac{\rho\left(\frac{3}{2} r'^2\cos^2\theta - \frac{r'^2}{2}\right)}{r^3}$$

r – קבוע ולכן:

$$\varphi_A = \frac{1}{r} Q + \frac{1}{r^2}\int\rho r'\cos\theta\,dv + \frac{1}{r^3}\int\rho\left(\frac{3}{2} r'^2\cos^2\theta - \frac{1}{2} r'^2\right)$$

$$= \frac{k_0}{r}+\frac{k_1}{r^2}+\frac{k_2}{r^3}+\ldots+$$

לכן – לכל מערכת בה ידועים ה-K-ים

נתון לנו הפוטנציאל במרחק גדול מהמטען.

לגבי גוף נייטרלי קיים $Q=0$ ולכן $k_0=0$.

ככל שהמרחק מהמטען גדול הביטוי $\frac{k_0}{r}$, דומיננטי, ז"א: $\varphi \to \frac{Q}{r}$

אופי המערכת יקבע לפי המקדם – k_i הראשון השונה מ – 0.

יש לבדוק אם אמנם המודל הזה תואם למערכת מיקרוסקופית – של אטומים בודדים.

ידוע: $= 10^{-8}\,cm$

וקיים: גודל אטום – בערך $2\times10^{-8}\,cm$

וכל מימד מקרוסקופי הוא באמת גדול מאוד ביחס ל – $1\,A^\circ$

מכאן אנו מגיעים לתוצאות:

k_0 – המומנט מסדר 0 של התחלקות המטען

k_1 – מומנט הדיפול של התחלקות המטען

k_2 – מומנט הקוודרופול של התחלקות המטען.

ומשמעותם:

<u>דוגמאות:</u>

דוגמא א': k_0 – נגרם ע"י מטען בודד נקודתי –

דוגמא ב': k_1 – נגרם ע"י שני מטענים –

דוגמא ג': k_2 – נגרם ע"י 4 מטענים –

ובהתאם:

[illegible] הוא המומנט של 2^n נק' מטען.

(3) מומנט הדיפול

באטום נייטרלי $Q=0$

ונקבל: $\varphi_A \approx \frac{k_1}{r^2}$

כאשר

$$k_1 = \int \rho r' \cos\theta \, dv$$

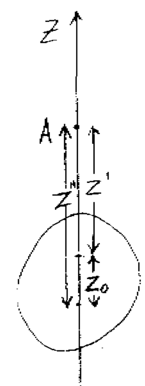
$r'\cos\theta$ הוא היטל של r' על r

לכן:

$$k_1 = \int \rho r' \hat{r} \, dv$$

באשר $\hat{r}$ – וקטור יחידה בכוון – r.

(הערה – זאת תוצאה <u>שאינה</u> תלויה בכווני הצירים)



נניח ש – A נמצאו על ציר ה – z.

אזי:

$$k_1 = \int \rho z \, dv$$

נעתיק את מערכת הצירים בשיעור Z_0 כך ש –

$$z'' = z_0 + z'$$

k_1^* – הוא המומנט הדיפול ביחס לראשית החדשה, והוא מקיים:

$$k_1^* = \int \rho z'' dv = \int \rho z \, dv + \int \rho z_0 \, dv$$

$$= k_1 + z_0 Q$$

קבלנו:

$$k_1^* = k_1 + z_0 Q$$

במערכה נייטרלית $Q=0$ ולכן $k^* = k_1$

באותו אופן – נוכל לבצע שינויים על ציר ה – x או ה – y ונקבל ש – $k_1^* = k_1$.

ז"א שהביטוי הוא חד ערכי ולא תלוי במערכת הצירים.

וקיבלנו:

$$\varphi_{(r)} = \frac{k_1}{r^2} = \hat{r}\,\frac{\int \rho r' dv}{r^2} = \frac{\hat{r}\cdot \underline{p}}{r^2}$$

כאשר הוקטור $\underline{p}$ מוגדר כ –

$$\underline{p} \triangleq \int \rho_{(x',y',z')}\, r' \, dv$$

$\underline{p}$ – הוא מומנט הדיפול של ההתלקות המטען.

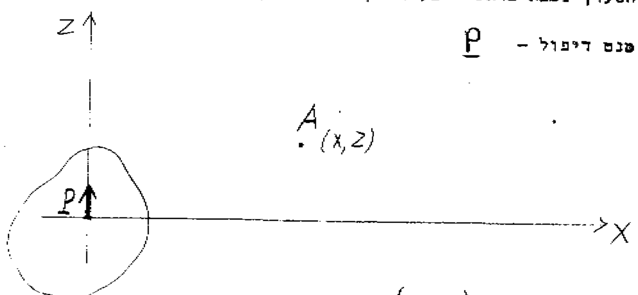
(4) השדה של דיפול חשמלי

נחשב את השדה:

$$\underline{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

נניח שהגוף הטעון נמצא בראשית מערכת קורדינטות קרטזיות.

לגוף מומנט דיפול – $\underline{p}$



נסתכל בשדה במישור (x,z)

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(קובעים את המערכה כך ש – y מתאפס).

קיים:

$$\varphi = \frac{\underline{r}\cdot \underline{p}}{r^3} = \frac{z\, p}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

לכן:

$$E_z = -\frac{p}{r^3} + \frac{3/2\ 2zp}{r^5} = \frac{p}{r^3}\left(\frac{3z^2}{r^2} - 1\right)$$

$$\frac{z}{r} = \cos\theta$$

ולכן:

$$E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{p}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

וזהו מרכיב ה - z של השדה החשמלי הודות לדיפול - $\underline{p}$.

לגבי $\theta = 0$, $\theta = \pi$ קיים:

$$E_z = \frac{2p}{r^3}$$

$$E_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{zp2x}{r^5} = \frac{3zxp}{r^5} = \frac{3p\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

ואנו רואים

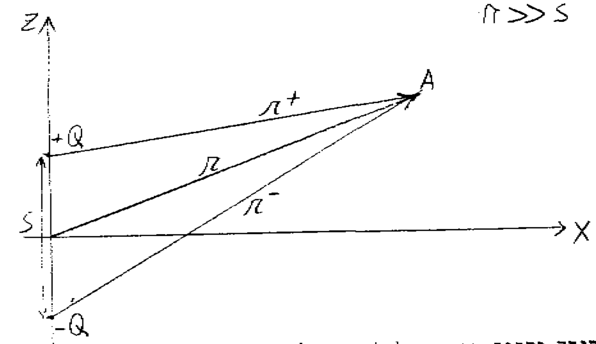
$$E_{x(\frac{\pi}{2})} = E_{x(0)} = 0$$

עוצמת השדה משתנה ביחס ל - $\frac{1}{r^3}$ וצורתו שונה לחלוטין מצורת השדה של מטען נקודתי.

(5) <u>משמעות פיזיקלית של הדיפול</u>

נתונים שני מטענים מנוגדים.

$$r >> s$$



דנים בנק' רחוקה יחסית כך שנוכל להתיחס לפיתוח מולטיפולי.

$$\varphi_A = \frac{q}{r^+} - \frac{q}{r^-}$$

$$r^{+2} = r^2 + \frac{s^2}{r} - rs\cos\theta$$

$$r^{-2} = r^2 + \frac{s^2}{r} + rs\cos\theta$$

פיתוח לטור:

$$\frac{1}{r^+} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{s^2}{4r^2} - \frac{s\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{s\cos\theta}{2} + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{r^-} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{s\cos\theta}{r} + \cdots\right)$$

$$\varphi_A = \frac{q}{r^+} - \frac{q}{r^-} = \frac{q}{r}\left[\frac{s\cos\theta}{r} + \cdots\right]$$

ולכן - פוטנציאל הדיפול הוא:

$$\varphi = \frac{\underline{r}\cdot\underline{p}}{r^3} = \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

באשר:

$$p = q \cdot s$$

וכן:

$$\varphi_A = q\frac{s\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{r^3}$$

דיפול טהור היא מערכת שבפיתוח שלה רק $K_1 \neq 0$ וכל השאר $K_i = 0$

מערכת שני המטענים <u>איננה</u> דיפול טהור, כי הזנחנו קב' של איברים. השדה שיתקבל יהיה שדה של דיפול רחוק מהמטענים. קרוב למטענים יכנסו גורמים של k_2, k_3 וכו'.

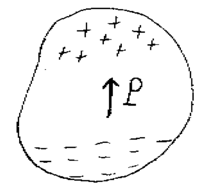
כאשר $s \to 0$, אך q גודל כך שנשמר $qs \to p$, אזי קיים דיפול טהור. זהו כמובן מושג מתמטי שאינו קיים במציאות.

כוון הדיפול נקבע לפי סימן ρ .

כזכור :

$$p = \int \rho \, r' dv$$

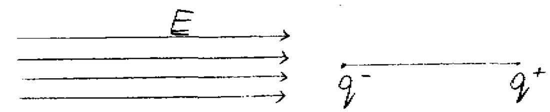
ולכן הכוון הוא מהמטען השלילי למטען החיוב.



(6) דיפול בתוך שדה חשמלי

נתון שדה הומוגני $\underline{E}$ ודיפול $\underline{p}$.

נניח שהשדה מקביל לדיפול: $\underline{E} \parallel \underline{p}$ לא יהיו לא כח, לא מומנט ולכן לא שינויים.

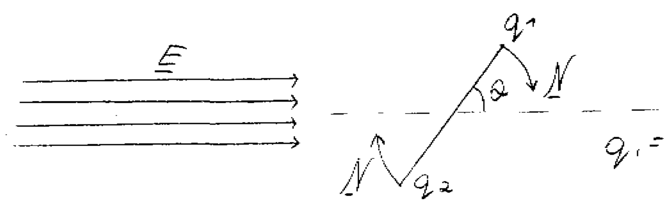


במידה והשדה לא הומוגני, אזי:

$$E_{q_1} \neq -E_{q_2}$$

ויפעל כח על המומנט.

נניח שהשדה הומוגני אך המומנט איננו מקביל לשדה.



$$q_1 = -q_2$$

הכוחות על המטענים זהים אך יש מומנט סיבוב - $\underline{N}$

$$\underline{N} = Eq\frac{s}{2}\sin\theta + Eq\frac{s}{2}\sin\theta = Ep\sin\theta$$

כאשר: $p = q \cdot s$

או :

$$\underline{N} = \underline{p} \times \underline{E}$$

המומנט שואף להביא את הדיפול למצב מקביל לשדה.

העבודה החיצונית על מנת לסובב את הדיפול:

$$dW = N d\theta$$

dW יופיע בסימן + כי להגדלת הזוית יש להשקיע עבודה.

$$dW = N d\theta = pE\sin\theta \, d\theta$$

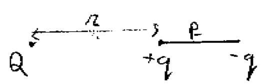
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = \int_{\theta_1}^{\theta_2} N d\theta = pE(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

במקרה $\theta_1 = 0$ קיים:

$$W = pE(1 - \cos\theta_2)$$

כאמור - בשדה לא הומוגני, הכח השקול שונה מ - 0.

נתון מטען נקודתי Q ודיפול $\underline{p}$ מקביל לקוי השדה:



$$F_{(r)} = \frac{Qq}{r^2} - \frac{Qq}{(r+s)^2} =$$

$$= \frac{Qq}{r^2} - \frac{Qq}{r^2\left(1+\frac{s}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{2q}{r^2}\left(1 - [1 - 2\tfrac{s}{r}]\right) =$$

$$= \frac{2Q}{r^3} q s = \frac{2QP}{r^3}$$

ז"א :

$$F_{(r)} = \frac{2QP}{r^3}$$

משמעות הכח:

$$\frac{2Q}{R^3} = -\frac{dQ}{dr^2} = -\frac{dE_r}{dr}$$

לכן, הכח כלפי חוץ:

$$F = P\left(-\frac{dE_{(r)}}{dr}\right)$$

ובצורה וקטורית:

$$\underline{F} = \underline{\hat{r}}\left(\frac{dE_r}{dr}\right)P = \underline{r}\,\underline{P}\,\frac{dE}{dr}$$

נוכל לקבל אותה תוצאה בצורה כללית

כזכור קיים:

$$dW = EP\sin\theta\, d\theta$$

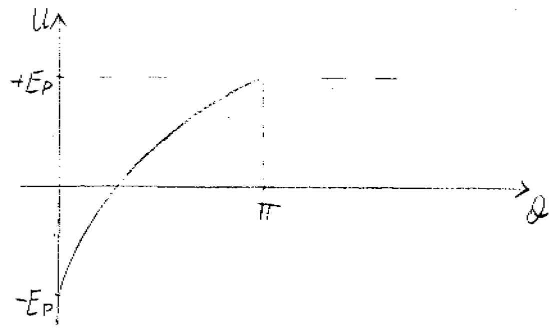
ולכן:

$$W(\theta_1 \to \theta_2) = E \cdot P(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

נקבע שהאנרגיה הפוטנציאלית של הדיפול ב $\theta = \frac{\pi}{2}$ תהיה: $-\underline{E}\cdot\underline{P}$

$$U = -\underline{E}\cdot\underline{P}$$

(האנרגיה הפוטנציאלית נשמרת).



$\underline{F}$ כח משמר ומקיים: $\text{grad}\,U$

לכן:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(\underline{E}\cdot\underline{P}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x P_x + E_y P_y + E_z P_z\right)$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}P_x + \frac{\partial E_y}{\partial y}P_x + \frac{\partial E_z}{\partial z}P_z$$

(הדיפול - P קבוע ולכן אינו נגזר).

ז"א - $\underline{E} \neq 0$ מחייב שהנגזרות של $\underline{E}$ לא יהיו - 0 ז"א $\underline{E}$ לא הומוגני.

(7) <u>דיפול מושרה באטומים ובמולקולות</u>

נתיחס לאטום כאל גוף ברדיוס אופיני - $R \sim 10^{-8}\,cm$

כאשר $Q = 0$

כזכור - $e = 4.8\times 10^{-10}\,e.s.u$

נתיחס לאטום כאילו הגרעין, שרדיוסו - 10^{-13} הוא מטען נקודתי ביחס לקליפה השלילית (האלקטרונית).

המטען השלילי מרוח על נפח - לא על קליפה חלולה. מחוץ לאטום אין לו שום שדה חשמלית

נסמן צפיפות המטען בכדור מתמטי: - - - - -

צפיפות המטען באטום מימן: ———

ונקבל את הגרף:

נסמן ב - b את המרחק בין מקום הגרעין ובין מרכז האלקטרונים.

באטום בסביבה נייטרלית נצפה ל - $b=0$

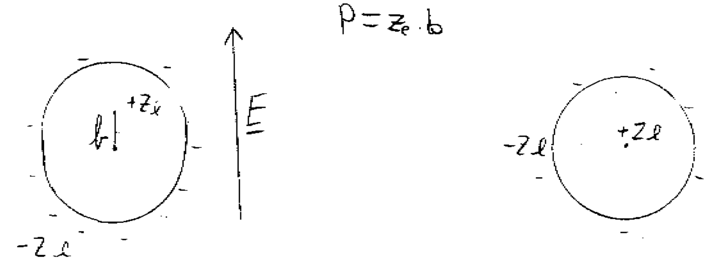
נפעיל שדה חשמלי E על האטום:

ואז נקבל הפרדה כלומר $b\neq 0$ (המטען הכללי אפס אך קיימת הזזה בין המטענים).

Z - מס' האלקטרונים / פרוטונים באטום.

בתוך האטום יתקיים דיפול:

$$P=Z_e\cdot b$$



אטום בשדה

אטום בסביבה נייטרלית

נחשב את ערך: $b(E)$

ואז נקבל את: $P(E)$

$$E=\frac{b}{R^3}Z_e$$

לכן:

$$\boxed{b=\frac{ER^3}{Ze}}$$

$$\boxed{P=ER^3}$$

המודל נכון כמובל לגבי $b<R$

יש לבדוק אם אמנם $b<R$

שדה מעבדתי רציני יכול להיות בסדר גודל:

$$E=3\times 10^{4}\ \mathrm{Volts/cm}=100\ \mathrm{statvolt/cm}$$

ואז:

$$b=\frac{100\cdot 10^{-24}}{4.8\cdot 10^{-10}}=2\cdot 10^{-13}$$

ז"א: $b\ll R$

באותם נתונים:

$$P=bZe=ER^3=10^{-22}\ \mathrm{esu\ cm}$$

ואמנם:

$$\frac{P}{E}=R^3=10^{-24}\ \mathrm{cm}^3$$

בנסיון, אמנם יש פרופורציה בין R^3 באטום ובין הגודל $\frac{P}{E}$.

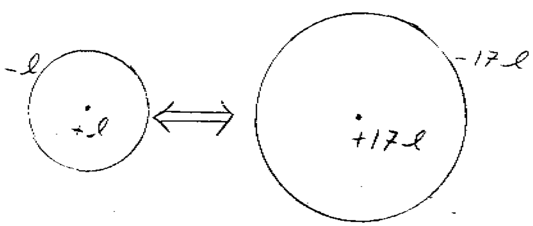
מקדמי הפרופורציה:

יסוד	H	He	Li	Ne	Na	Ar	K
α ביח' 10^{-24}	0.66	0.21	12	0.4	0.4	1.6	34

המקדם α גדול ביסודות האלקליים: K, Na, Li.

המקדם α קטן בגזים האצילים: Ar, Ne, He.

במולקולה של HCl:



מתקבל דבר מאוד לא סימטרי, בעל מומנט דיפול ובלי שדה חיצוני.

נצפה לשדה מולקולרי מסדר גודל של

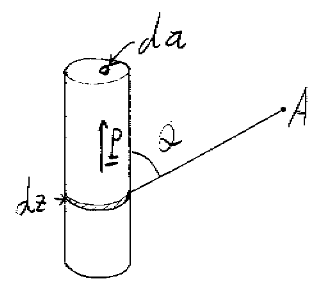
$$E \sim \frac{e}{R^2} = \frac{4.8\times10^{-10}}{10^{-16}} \approx 5\times10^{6}\ \text{statvolt}/\text{cm}$$

ולכן ל $\underline{p}$ בסדר גודל של כ - $10^{-17}\, e.s.u.\,cm$

הנסיון מוכיח שאילו סדרי הגודל הקיימים אמנם. סדר הגודל של הדיפול הוא פי 10^5 מסדר הגודל של הדיפול המושרה מבחוץ, למרות זאת התנהגות החומרים הפולריים לא עד כדי כך שונה.

(8) <u>חומר מקרוסקופי מקוטב</u>

גליל חומר ארוך ובו מומנט דיפול p למולקולת חומר. בהנחה שכלן מקבילות.



סה"כ המטען: $Q = 0$

$\underline{P}$ – מומנט ליח' נפח:

$$\underline{P} = N\underline{p}$$

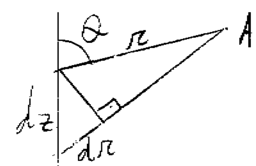
כאשר N מס' מולקולות ליח' נפח.

נגדיר:

$$\underline{P}_0 = \underline{P}\, da\, dz$$

$$d\varphi_A = \frac{|\underline{P}_0|\cos\theta}{r^2} = \frac{da\, dz\, P\cos\theta}{r^2}$$

A – לאו דוקא רחוק מהמוט כי מרחקו תמיד גדול ביחס לאלמנטים dz ,da



קיים:

$$dr = -dz\cos\theta$$

לכן:

$$d\varphi_A = -da\,\frac{P\,dr}{r^2}$$

ומכאן:

$$\varphi_A = da\,P\int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} = da\,P\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

נבדוק את ממדי התוצאה:

$$\underline{P} = e.s.u.\,cm/cm^3 = e.s.u./cm^2$$

$$da = cm^2$$

ולכן:

$$\varphi = e.s.u./cm$$

כנדרש.

ל $\underline{P}\,da$ יש ממדי מטען. אם היה מטען בגודל הנ"ל בראש המוט ומטען הפוך בסימנו בתחתית המוט, היינו מקבלים ב - A אותו פוטנציאל.

ז"א:

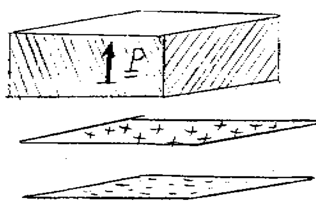
$$dq = \underline{P}\,da$$

$$dq = -\underline{P}\,da$$

זאת תוצאה הנכונה לכל מקום מחוץ למוט, פרט לשכבה אטומית הצמודה לו.

אם נצמיד למוט מוט נוסף הדומה לו, נקבל פוטנציאל כאילו שמנו מטען כפול למעלה ומטען כפול למטה.

התוצאה הסופית: אם נתון חומר מאקרוסקופי המקוטב הומוגנית:



הרי זה אנלוגי לשתי טבלאות טעונות: $\sigma = +P$, $\sigma = -P$

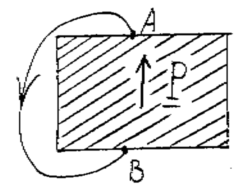
(9) חשוב ממוצעים

בתוך החומר אין משמעות לשדה בנק׳ מסוימת - כי הוא תלוי של תנאים מקומיים.
יש חשיבות לשדה הממוצע בחומר.

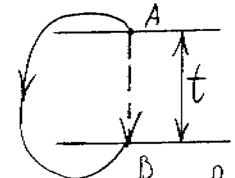
לחישוב השדה הממוצע ניעזר בחוק שימור האנרגיה.

ז"א: האינטגרל $\int_A^B \underline{E}\, d\underline{s}$ לא תלוי במסלול.

נתון גוש חומר ונק׳ A ו - B. נחשב את האינטגרל במסלול כלשהו העובר מחוץ לחומר.



לגבי מסלול זה - הבעיה אקוויוולנטית לבעית משטחים טעונים:



ושם נוכל לחשב את המסלול הישר מ - A ל - B.

במקרה זה:

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi P$$

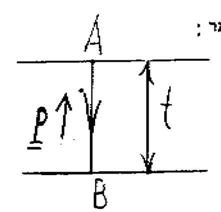
ובצורה וקטורית:

$$\underline{E} = -4\pi \underline{P}$$

ז"א:

$$\underset{\text{מבחוץ}}{\int_A^B} \underline{E}\, d\underline{s} = \underset{\text{בין הלוחות}}{\int_A^B} \underline{E}\, d\underline{s} = \int_A^B 4\pi P\, ds = 4\pi P t$$

הפעם נחשב את האינטגרל על מסלול דרך החומר:



חוקי השימור נשארים גם בחומר, לכן האינטגרל יהיה אותו.

ז"א: $W = 4\pi P t$

לגבי שדה אחיד, נגדיר שדה ממוצע:

$$\langle E \rangle \cdot t \stackrel{\Delta}{=} \int_A^B \underline{E}\, d\underline{s}$$

ולכן:

$$\boxed{\langle E \rangle = -4\pi \underline{P}}$$

וזה השדה הממוצע הודות לקטוב בלבד.

(10) גופים דיאלקטריים בשדה חשמלי

נתון קבל לוחות בשטח A, מרחק בין לוחות - t בואקום.

אזי:

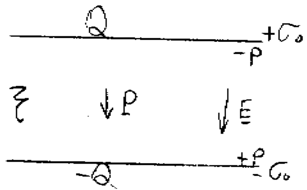
$$E_0 = 4\pi\sigma_0 = \frac{4\pi Q}{A}$$

$$C_0 = \frac{A}{4\pi t} = \frac{Q}{\Delta\varphi_0}$$

באשר $\Delta\varphi_0$ - הפרש הפוטנציאלים.

נכניס לחלל בין הלוחות חומר דיאלקטרי.

ε הוא מקדם לפיו גדל הקבול:



יוצר בחומר מומנט דיפול מושרה P בכוון השדה.

למעשה - בשפת החומר הדיאלקטרי העליונה תהיה הצטברות של מטען - $-P$
ובשפה התחתונה - הצטברות של - $+P$

ונקבל:

$$\sigma = \sigma_0 - P$$

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi(\sigma_0 - P) = E_0 - 4\pi P$$

במידה והחומרים דיאלקטריים מהורים.

אזי $P \sim E$ (E שבחומר!!!)

$$P = Np = \alpha N E$$

באשר p – דיפול למולקולה.

נסמן χ – מקדם חדירות של החומר

$$\chi = \alpha N$$

אזי:

$$P = \chi E$$

ולכן:

$$E = E_0 - 4\pi P = E_0 - 4\pi\chi E$$

מסקנה: חומר דיאלקטרי מחליש את השדה.

$$E(1+4\pi\chi) = E_0$$

הפרש הפוטנציאלים החדש:

$$\Delta\varphi = Et = \frac{E_0}{1+4\pi\chi}t = \frac{\Delta\varphi_0}{1+4\pi\chi}$$

הקיבול החדש:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q\,1+4\pi\chi}{\Delta\varphi_0}$$

ז"א:

$$C = C_0(1+4\pi\chi)$$

נגדיר:

$$\varepsilon \stackrel{\Delta}{=} 1+4\pi\chi$$

ε קבוע דיאלקטרי של חומר.

ואז:

$$C = \varepsilon C_0$$

כזכור: ε הנ"ל הופיע לראשונה באופן אמפירי מתוך מדידות.

ε מקיים:

$$\varepsilon E = E_0$$

אך קיים:

$$4\pi\sigma_0 = E_0$$

(מתוך חוק גאוס שאמר: $\int_S E\,da = 4\pi Q$)

ומכאן:

$$4\pi\sigma_0 = \varepsilon E$$

ז"א: חוק גאוס כפי שהכרנו לפני כן אינו מתקיים בחומרים דיאלקטרים.
הסיבה לכך היא שהמטענים $\pm P$ הם מטענים קשורים ולא חפשיים.

מכאן החוק יקבל את הצורה:

$$\int \varepsilon E\,da = 4\pi Q$$

וכן:

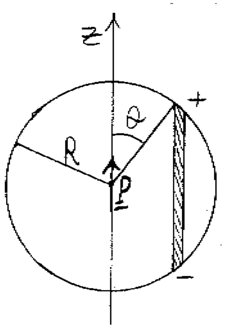
בחוק קולון:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2}$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$$

והתוצאות הנסיוניות אמנם מאשרות זאת.

הערה: עד כאן – הדיון בקבלים התיחס לנק' הרחוקות מהקצוות ושבהן הקיטוב הומוגני.
הדבר אינו קורה במציאות בגלל אפקטי קצוות.



כדור מקוטב מחומר דיאלקטרי:

נתון כדור מקוטב מחומר דיאלקטרי.

מניחים שהקיטוב הומוגני, כולל בקצוות.

נדון באלמנטים של עמודים דקים.

<u>הפוטנציאל מחוץ לכדור:</u>

במקל ישר – המצב אנלוגי לשני מטענים – $+P$ ו $-P$. אך כאן הקצה נטוי באלכסון.
בגלל שפת הכדור ולכן:

$$da_{\text{על הכדור}} = \frac{da_{\text{על גליל}}}{\cos\theta}$$

ובגבול:

$$\sigma = P\cos\theta$$

אם נמרח על כדור מטען בצפיפות σ כנ"ל נקבל שדה השווה לשדה של הכדור המקוטב.

שיטה אחרת: ניתן להתיחס אל הכדור כאל אוסף דיפולים קטנים.

$\underline{p}$ – דיפול של מולקולה.

$$\underline{P} = N\underline{p}$$

גודל אופיני בכל אטום $s \approx 10^{-13}cm$ ומטען q.

כאשר:

$$Q = \tfrac{4}{3}\pi R^3 q N$$

ובהרבה אטומים:

$$p_0 = Qs = \tfrac{4}{3}\pi R^3 s q N$$

כאמור:

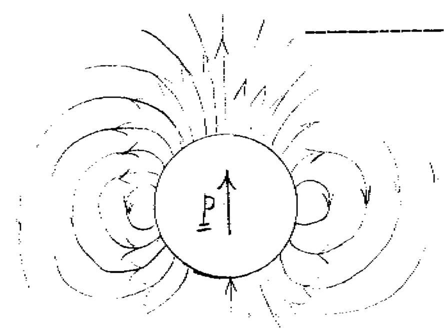
$$\underline{P} = sqN \qquad sq = \underline{p}$$

ולכן:

$$\boxed{\underline{p}_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \underline{P}}$$

כאשר $\underline{p}_0$ הוא הדיפול אקויולנט מחוץ לכדור.

צורת השדה תהיה:



השדה E_x מתאפס, לגבי $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$

למעשה, מחוץ לכדור השדה הוא כמו שני מטענים נקודתיים מרוחקים s זה מזה, כי הכדור אקויולנטי לשני כדורים, חיובי ושלילי, שמרכזיהם מוזזים בשעור s.

השדה בכדור:

$$E_r = \frac{r}{R^3}Q$$

כאשר r רדיוס משתנה בתוך הכדור.

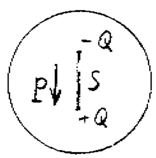
קיים:

$$E_x = \frac{x}{R^3}Q$$
$$E_y = \frac{y}{R^3}Q$$
$$E_z = \frac{z}{R^3}Q$$

וזהו השדה הודות למטען Q.

נניח $E(r')$ הוא השדה הודות ל- $-Q$ – במרחק – s. אזי:

$$E_{x'} = -\frac{x}{R^3}Q$$
$$E_{y'} = -\frac{y}{R^3}Q$$
$$E_{z'} = - \text{[illegible]}$$



השדה הכללי:

$$\underline{E} = \underline{E}_r + \underline{E}_{r'} = \frac{-Q}{R}\underline{s}$$

כיוון הדיפול יהיה הפעם הפוך. לכן:

$$\underline{E} = -\frac{\underline{p}_0}{R^3}$$

והשדה בתוך הכדור:

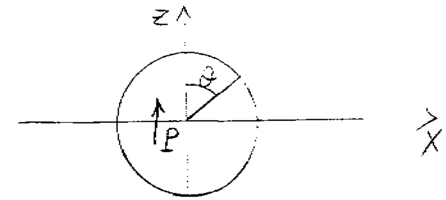
$$\boxed{\underline{E} = -\frac{4\pi}{3}\underline{P}}$$

בקבל מישורי שבו חומר דיאלקטרי קבלנו:

$$\underline{E} = -4\pi\underline{P}$$

ז"א – לגאומטריה יש תפקיד בקביעת השדה.

נדון בקיטוב בתוך כדור מנק׳ ראות שונה.



הפוטנציאל על שפת הכדור:

$$\varphi(R) = \frac{P_0 \cos\theta}{R^2} = \frac{P_0 z}{R^3}$$

(ע"י הצבת R בפונקצית הפוטנציאל)

מהו הפוטנציאל בתוך הכדור?

לפי משואת לפלס:

בפנים $\rho = 0 \Longrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

לפי משפט היחידות - אם יש פתרון, אזי הוא יחיד.

על השפה $\rho \neq 0$ כאשר $\varphi = \frac{P_0 z}{R^3}$.

נבדוק אם $\frac{P_0 z}{R^3}$ הוא פתרון מתאים.

קיים אמנם:

$$\nabla^2\left(\frac{P_0 z}{R^3}\right) = 0$$

ז"א: קיים פתרון המקיים את משואת לפלס ואת תנאי השפה (שפת הכדור) ולכן זהו הפתרון הנכון והיחיד:

$$\varphi = \frac{P_0 z}{R^3}$$

זוהי הכללה קלה של משפט היחידות כפי שנוסח קודם כאן $\varphi \neq const$ על המשטח אבל φ פונקציה נתונה על המשטח.

חישוב השדה:

$$\underline{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\frac{P_0}{R^3}\hat{z} = -\frac{4\pi}{3}\underline{P}$$

כאשר:

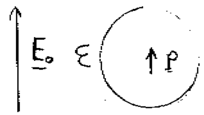
$$P_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 P$$

עתה נשאל: האם אפשר ליצור כדור מקוטב הומוגנית בצורה זאת?

נניח שקיים שדה E_0 חזק. נכניס לשדה כדור מחומר דיאלקטרי (שאינו משפיע עליו.)

האם יתקבל קיטוב הומוגני?

$$\underline{E} = \underline{E}_0 + \underline{E}'$$



כאשר $\underline{E}'$ נובע מהכדור.

המשואות שנקבל, במידה והקיטוב הומוגני:

$$\underline{E}' = -\frac{4\pi}{3}\underline{P}$$

$$\underline{P} = \chi \underline{E} = \chi\left(E_0 - \frac{4\pi}{3}\underline{P}\right)$$

הפתרון להן:

$$P = \frac{\chi}{1 + \frac{4\pi}{3}\chi} E_0$$

והוא פתרון מתאים ולכן נכון.

כזכור:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi$$

$$\chi = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$$

ולכן:

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\left(1 + \frac{\varepsilon - 1}{3}\right)} E_0$$

$$\boxed{\underline{P} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0}$$

תנאי השפה - התנהגות השדות התשלמיים משני צידי המשטח בין הדור והסביבה:

הפוטנציאל בחוץ היה:

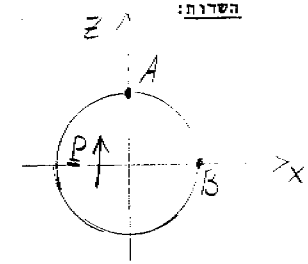
$$\varphi = \frac{P_0 z}{R^3}$$

ובפנים:

$$\varphi = \frac{P_0 z}{R^3}$$

ז"א - הפוטנציאל רציף על השפה.

השדות:



מחוץ לכדור קיים:

$$E_x = \frac{3 P_0 \sin\theta \cos\theta}{r^3}$$

$$E_z = \frac{P_0 (3\cos^2\theta - 1)}{r^3}$$

לכן, בנק' A מחוץ לכדור:

$$E_x = 0$$

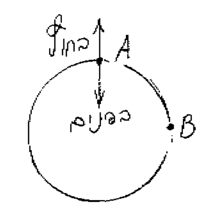
$$E_z = \frac{2P_0}{R^3} = \frac{8}{3}\pi \rho$$

כאשר: $P_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

בתוך הכדור, על השפה:

$$E_x = 0$$

$$E_z = -\frac{4}{3}\pi \rho$$



$$E_A = E_{z\,out} - E_{z\,int} = 4\pi \rho$$

וזה אקויולנטי למשטח שעליו $\sigma = \rho$

בנק' B:

בחוץ ובפנים קיים: $E_x = 0$

נבדוק את מרכיב ה - z

בפנים: $E_z = -\frac{4}{3}\pi \rho$

בחוץ:

$$E_z = -\frac{P_0}{R^3} = -\frac{4\pi}{3}\rho$$

ז"א:

$$E_{int} = E_{out}$$

והשדה הומוגני על השפה.

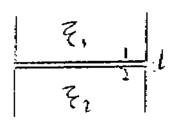
גם הפעם המרכיב הניצב לדיפול הוא $4\pi\sigma$ אך σ בנק' B היא - 0.

מכאן נגיע למסקנות בדבר תנאי שפה של חומרים דיאלקטרים.

(11) תנאי שפה של חומרים דיאלקטרים

נתונים שני חומרים דיאלקטריים שונים. נדון במעבר ביניהם.

המרחק l הוא מרחק מולקולרי.



חוקי המעבר יהיו:

1. שימור φ : $\varphi_1 = \varphi_2$

הפרש הפוטנציאלים הוא - 0 כי העבודה במעבר מחומר לחומר היא - 0 ובגלל
הנתון - $d \to 0$, והיות השדה סופי)
לאו דוקא קיים שימור φ לאורך המשטח.

2. $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$: רציפות השדה המקביל.

נבצע אינטגרציה מ A ל B בשני החומרים השונים.

מסיבות שימור אנרגיה:

$$\int_A^B E\,ds = \int_A^B E_1\,ds = \int_A^B E_2\,ds$$

לגבי מרחק קטן: $\Delta l \to 0$

קיים:

$$\int_A^B E\,ds \approx E_\parallel \Delta l$$

ועבור כל נק' בנפרד:

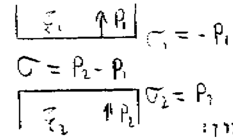
$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

.3 $\varepsilon_1 E_1\perp = \varepsilon_2 E_2\perp$

<u>אין</u> רציפות בשדה הניצב.

<u>הוכחה:</u>

שני הגופים נמצאים במגע



חוק גאוס טוען לאי רציפות על שפת משטח טעון:

$$E_1\perp - E_2\perp = 4\pi\sigma = 4\pi(P_2 - P_1)$$

$$P_2 = \chi_2 E_2\perp = \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_2\perp$$

ובאותו אופן:

$$P_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_1\perp$$

לכן:

$$E_1\perp - E_2\perp = (\varepsilon_2 - 1) E_2\perp - (\varepsilon_1 - 1) E_1\perp$$

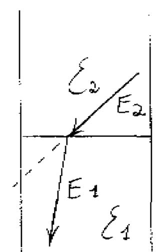
או:

$$\varepsilon_2 E_2\perp - \varepsilon_1 E_1\perp = 0$$

ולכן:

$$\varepsilon_2 E_2\perp = \varepsilon_1 E_1\perp$$

לסיכום:



.1	$\varphi_1 = \varphi_2$
.2	$E_1\parallel = E_2\parallel$
.3	$\varepsilon_1 E_1\perp = \varepsilon_2 E_2\perp$

צפיפות המטען על המשטח:

קיים שדה העובר מ - 2 ל - 1.

$$\sigma = P_2 - P_1 = \chi_2 E_2\perp - \chi_1 E_1\perp =$$

$$= \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_2\perp - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_1\perp =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[(\varepsilon_2 - 1)E_2\perp - (\varepsilon_1 - 1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_2\perp\right] =$$

$$= \frac{E_2\perp}{4\pi}\left[\varepsilon_2 - 1 - \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right] =$$

$$= \frac{E_2\perp}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)$$

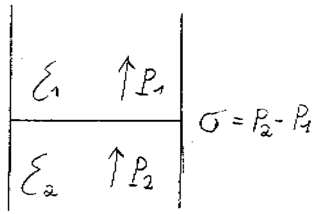
ז"א:

$$\boxed{\sigma = \frac{E_2\perp}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)}$$

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \Longrightarrow \sigma > 0$

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \Longrightarrow \sigma < 0$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \Longrightarrow \sigma = 0$



לגבי ואקום: $\varepsilon = 1$.

מסקנה: במעבר מואקום לחומר מקבלים מטען שלילי על השפה.

<u>דוגמא:</u>

בטיפה מים : $R = 1\,mm$

נניח שכל הדיפולים בטיפה מקבלים.

(למעשה - בתנאים רגילים הטיפה נייטרלית ובשדה - רק חלק קטן מהדיפולים

מתכוון לפי השדה).

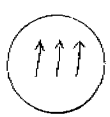
דיפול של מולקולה. $p = 1.84 \times 10^{-18}$ esu cm

ביחס לנק' A שבחוץ. $P_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 P$

דיפול ליח' נפח $P = Np$

בגר' אחד $N = \frac{6.02 \times 10^{23}}{18} d$

גורם צפיפות $d = 1$



$\cdot A$

ומכאן:

$$N = 0.334 \times 10^{23}$$

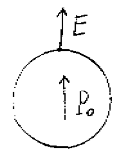
$$P_0 = \frac{4\pi}{3}\, 10^{-3}\; 0.334\times 10^{23}\cdot 1.84\; 10^{-18} =$$

$$= 2.57\; 10^{2}\ e.s.u/cm$$

וזהו המומנט האקוויולנט לגבי נק' מחוץ לטיפה.

נבחן את השדה

בקוטב הצפוני:



$$E_z = \frac{2P_0}{R^3} = \frac{5.14\; 10^{2}}{10^{-3}} = 5.14\times 10^{5}\ \text{statvolt/cm}$$

ז"א:

$$E_z = 150\; 10^{6}\ \text{volt/cm}$$

במרחק r ממרכז הטיפה:

$$r = 0.1\ \text{cm} \Longrightarrow E_z = 150\times 10^{6}\ \text{volt/cm}$$

$$r = 1\ \text{cm} \Longrightarrow E_z = 150\times 10^{3}\ \text{volt/cm}$$

$$r = 10\ \text{cm} \Longrightarrow E_z = 150\ \text{volt/cm}$$

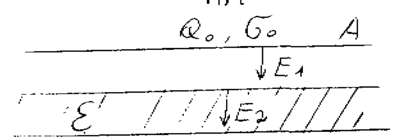
אילו גדלים מופרזים, ואמנם, לא סביר להניח שכל הדיפולים בטיפה באותו כיוון.

הסיבה לכך היא שבחומר דיאמגנטי לא מקוטב הממוצע על כל הכיוונים נותן אפס.

(12) חומרים דיאלקטרים בתוך קבלים

נתון קבל לוחות:

$$C_0 = \frac{A}{4\pi t}$$



נכניס חומר דיאלקטרי לחצי התחתון של הקבל, ונבדוק את הקיבול החדש.

$$E_1 = 4\pi\sigma_0 = 4\pi\frac{Q_0}{A}$$

אין שינוי ב E_1 עם הכנסת החומר.

תנאי השפה: $E_1 = \varepsilon E_2$

הקיבול החדש:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \int_t E\,ds = E_1\frac{t}{2} + E\ \frac{t}{2} =$$

$$= \frac{E_1 t}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

לכן:

$$C = \frac{Q}{E_1 t\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)} \Longrightarrow \frac{1}{C} = \frac{E_1 t\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\right)}{Q}$$

קיים:

$$E_1 t = \Delta\varphi_0$$

ולכן:

$$\frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{2}\Delta\varphi_0}{Q_0} + \frac{\frac{1}{2}\Delta\varphi_0}{\varepsilon Q_0}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2C_0} + \frac{1}{2\varepsilon C_0}$$

כאשר:

$2C_0$ הוא קיבול החצי העליון.

$2\varepsilon C_0$ הוא קיבול החצי התחתון.

וזה גם חוק החיבור בטור של הקבלים.

נתחיל באותם תנאי התחלה ונכניס לחצי הקבל חומר דיאלקטרי - אך באופן שונה:

$$\sigma_0 = Q_0/A$$

אחרי הכנסת החומר, תתכן תנועת מטענים מחצי אחד לשני. לענינו קשר של שני קבלים במקביל. נצפה לכן לפתרון:

$$C = \tfrac{1}{2} C_0 + \tfrac{1}{2} \varepsilon C_0$$

מסיבות שימור מטען קיים:

$$Q_2 = Q_0 - Q_1$$

וכמו כן קיים:

$$\frac{A}{2} \sigma_1 = Q_1$$

$$\frac{A}{2} \cdot \sigma_2 = Q_2$$

תנאי השפה:

$$E_1 = 4\pi \sigma_1 = \frac{8\pi Q_1}{A}$$

על שפת החומר השדה מקביל ולכן

$$E_1 = E_2$$

וכמו כן קיים:

$$\varepsilon E_2 = 4\pi \sigma_2$$

(מתוך הדיון על קבל לוחות המלא בחומר דיאלקטרי).

לכן:

$$\varepsilon E_2 = 4\pi \sigma_2 = \frac{8\pi (Q_0 - Q_1)}{A}$$

הפתרון יהיה:

$$\varepsilon E_1 = 8\pi \frac{(Q_0 - Q_1)}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_0 - Q_1}{Q_1}$$

ומכאן:

$$\boxed{Q_1 = \frac{Q_0}{\varepsilon + 1}}$$

$$Q_2 = Q_0 - \frac{Q_0}{\varepsilon + 1}$$

ולכן:

$$\boxed{Q_2 = Q_0 \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)}$$

$$\Delta\varphi = E_1 t = \frac{8\pi}{A} \cdot \frac{Q_0}{\varepsilon + 1} t$$

$$C = \frac{Q_0}{\Delta\varphi} = \frac{A}{8\pi t}(\varepsilon + 1) = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{4\pi t} + \frac{\varepsilon A}{2} \cdot \frac{1}{4\pi t}$$

ומכאן:

$$\boxed{C = C_1 + C_2}$$

וזהו גם חוק החיבור במקביל לקבלים.

13) <u>חוק גאוס בחומר דיאלקטרי</u>

חוק גאוס:

$$\int_S \underline{E}\, d\underline{a} = 4\pi Q = \int_V 4\pi \rho \, dv$$

ובצורה דיפרנציאלית:

$$\mathrm{div}\, \underline{E} = 4\pi \rho$$

סביר שבנוכחות חומר החוק ישמר, ויש אמנם עדות נסיונית לכך.

ניתן לכתוב את ρ כסכום מטענים:

מטענים חופשיים – ρ_{free}

מטענים קשורים בחומר – ρ_{bound}

ז"א: $\rho = \rho_{free} + \rho_{bound}$

כמו כן קיים:

$$\mathrm{div}(\varepsilon \underline{E}) = 4\pi \rho_{free}$$

לכן יש שתי ראיות:

א. אנליזה של קבל המלא בחומר דיאלקטרי שלגביו קבלנו: $\varepsilon \underline{E} = 4\pi \sigma_0$

ב. העובדה הנסיונית. שני מטענים $\pm q$ בתוך חומר דיאלקטרי. אזי הכח: $F = \dfrac{q_1 q_2}{\varepsilon \cdot r^2}$

חוק השטף של גאוס המקבל מחוק קולון בלי להתיחס למקדם הדיאלקטרי – ε. לכן בחומר דיאלקטרי יש להתחשב ב – ε.

ומכאן:

$$\int_S \varepsilon \underline{E}\, d\underline{a} = 4\pi Q_{free}$$

ולכן:

$$div(\varepsilon \underline{E}) = 4\pi \rho_{free}$$

משתי המשוואות האחרונות נסיק:

$$div\,(\varepsilon - 1)\underline{E} = -4\pi \rho_{bound}$$

בזכור:

$$(\varepsilon - 1)\underline{E} = 4\pi \underline{P}$$

ז"א:

$$div(4\pi \underline{P}) = -4\pi \rho_{bound}$$

או:

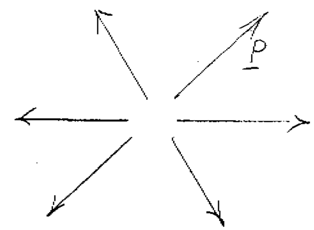
$$\boxed{div\,\underline{P} = -\rho_{bound}}$$

בדוגמאות שהוזכרו בקבלים השונים קיים ρ_{bound} רק על השפה.
בשאר החומר אין משמעות לדיון האחרון כאשר P קבוע ולכן $div\,\underline{P} = 0$.

במידה וקיימת מערכה שבה קיטוב כך ש: $div\,\underline{P} \neq 0$ (ז"א גודל או כיוון הקיטוב משתנה) אזי קיים ρ_{bound}

דוגמא:

סידור ראדיאלי של מולקולות בעלות דיפול:



$\underline{P}$ משנה כיוון $\Leftarrow$ $div\,\underline{P} \neq 0$

בכל קליפה מעגלית יש סה"כ מטען שלילי.

קיום מטען קשור. $\Leftarrow$ $div\,\underline{P} > 0$

(14) <u>וקטור ההעתק החשמלי</u>

וקטור ההעתק החשמלי $\underline{D}$ יוגדר:

$$\underline{D} \stackrel{D}{=} \underline{E} + 4\pi \underline{P}$$

בחומר דיאלקטרי:

$$\underline{P} = \chi \underline{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\underline{E}$$

ולכן:

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$$

$$div\,\underline{D} = div\,\underline{E} + 4\pi\, div\,\underline{P} = 4\pi(\rho_{free} + \rho_{bound}) - 4\pi \rho_{bound}$$

ולכן:

$$\boxed{div\,\underline{D} = 4\pi \rho_{free}}$$

הוקטור $\underline{D}$ מקיים את חוק גאוס לגבי המטען החפשי.

סיכום דיפולים בחומר דיאלקטרי

1. בחומר נייטרלי: $\rho = \frac{K_1}{r^2} + \dots$

וקיימים:

א. דיפול חשמלי קבוע

ב. דיפול מושרה

2. בחומר מאקרוסקופי מקוטב:

מחוץ לחומר – כל האפקטים ניתנים לייצוג ע"י משטחים אקוויולנטים טעונים.

$$\sigma = \pm P$$

בתוך החומר – הוגדר שדה ממוצע $\langle E \rangle$

3. חוק גאוס נכון לגבי (כולל) ρ

המטען מוצל להפשי וקשור.

4. $\mathrm{div}\,\underline{P} = -\rho_{bound}$

5. $\underline{D} = \underline{E} + 4\pi\underline{P}$

כמו כן – הוזכרו תנאי השפה על משטחים במעבר חומרים דיאלקטרים.

מכאן נגיע להגדרת חומר דיאלקטרי:

חומר יוגדר כדיאלקטרי אם קיים בו:

$$\underline{P} = \chi\underline{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\underline{E}$$

(15) חלוקת האנרגיה בחומר דיאלקטרי

נתון קבל בואקום שעליו מטען Q_0 וקיבולו C_0

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{8\pi}\int E_0^2\,dv$$

באשר: $E_0 = 4\pi\sigma_0 = 4\pi\frac{Q_0}{A}$

אחרי הכנסת חומר דיאלקטרי לקבל:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{\varepsilon C}$$

באשר: $C = \varepsilon C_0$

למרות ש – $E = \frac{1}{\varepsilon}E_0$

הבטוי הבא איננו נכון:

$$\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv = \frac{1}{\varepsilon^2 8\pi}\int E_0^2\,dv$$

ולכן המסקנה – הביטוי $W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv$

בואקום היא מקרה פרטי. כנראה שהביטוי הכללי הוא:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2\,dv$$

לכן, נצפה לתוצאות:

$$\frac{1}{8\pi}\varepsilon E^2 = \frac{1}{8\pi}E^2 + \frac{1}{8\pi}(\varepsilon - 1)E^2$$

כאשר:

$$\frac{1}{8\pi}(\varepsilon - 1)E^2 = \frac{1}{2}\chi E^2 = \frac{1}{2}\underline{P}\cdot\underline{E}$$

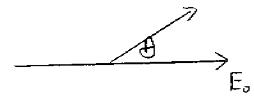
הוא הביטוי לאנרגיה התלויה בהמצאות החומר הדיקלאטרי.

והביטוי; $\frac{1}{8\pi}E^2$ הוא הביטוי לאנרגיה שהיתה לנו בואקום.

אם נוכיח שהאנרגיה ליח' נפח של החומר היא $\frac{1}{2}\underline{P}\cdot\underline{E}$ – הרי גמרנו.

כזכור: $\underline{P} = N\underline{p}$

האנרגיה של דיפול בודד - p



$$p = \alpha E$$

מניחים שהשדה גודל:

$$E \longrightarrow E + dE$$

תוספת העבודה:

$$dw = Eq\,ds$$

$$E(r) = \frac{Q}{R^3} r$$

באשר ; $dp = q\,ds$

המומנט פרופורציוני לשדה, לכן הגדלה השדה מגדילה את המעתק S ולכן מקבלים:

$$dw = E\,dp$$ בדיפול בודד

וזאת העבודה על החומר ע"י השדה עם הגדלת המרחק - S.

ביח' נפח:

$$dU = N\,dw = N\alpha E\,dp$$

$$= \chi E\,dE$$

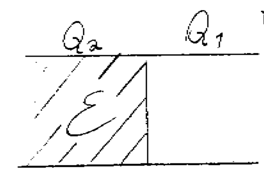
זאת תוספת העבודה כשהשדה משתנה מ - E ל $E+dE$ לכן:

$$U_{(E)} = \frac{1}{2}E^2\chi = \frac{1}{2}PE$$

מש"ל.

וקבלנו את הביטוי לאנרגיה ליח' נפח של החומר הדיאלקטרי המקוטב.

נחזור על תרגיל קודם, ונראה, שמוש במשפט תומסון



$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{A}$$

$$Q = \frac{Q_0}{1+\varepsilon}$$

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\left[\varepsilon E_2^2\frac{V}{2} + E_1^2\frac{V}{2}\right]$$

בגלל תנאי השפה:

$$E_1 = E_2$$

כאשר:

$$E_1 = 4\pi\sigma_1 = 4\pi\frac{Q_1}{A/2}$$

$$\varepsilon E_2 = 4\pi\sigma_2 =$$

$$= 4\pi\frac{Q_0 - Q_1}{A/2}$$

לכן:

$$U = \frac{V/2}{8\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}\pi^2 16\frac{(Q_0 - Q_1)^2}{A^2/4} + \frac{Q_1^2}{A^2/4}\cdot 16\pi^2\right]$$

אחרי הוצאת קבוע נקבל תוצאה איכותית:

$$y = \frac{1}{\varepsilon}(Q_0 - Q_1)^2 + Q_1^2$$

לפי משפט תומסון - האנרגיה באכסטרמום.

לכן:

$$\frac{dy}{dQ} = -\frac{2}{\varepsilon}(Q_0 - Q_1) + 2Q_1 = 0$$

$$\varepsilon Q_1 = Q_0 - Q_1$$

ולכן:

$$Q_1 = \frac{Q_0}{1+\varepsilon}$$

וזאת התוצאה הצפויה.

(16) סיכום השדה החשמלי בחומר

הייצוג הבסיסי לחומר דיאלקטרי הוא ע"י $\underline{P}$ – וקטור הקיטוב ליח' נפח.

וקיים:

$$\underline{P} = \chi \underline{E}$$

כאשר:

$$\mathrm{div}\,\underline{P} = -\rho_{bound}$$

לאפקט הקיטוב יש משמעות כאילו נוסף לחומר מטען קשור המשפיע על השדה,

כאשר:

$$\mathrm{div}\,\underline{E} = 4\pi(\rho_{free} + \rho_{bound})$$

בשטח אי רציפות ב $\underline{P}$ אקויולנטי למשטח מטען – $\sigma = -\Delta P_n$

כאשר ΔP_n הוא השינוי ב – $\underline{P}$

הגדרנו את וקטור ההעתק החשמלי:

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P}$$

והוא דומה לשדה החשמלי מכמה בחינות:

$$\mathrm{div}\,D = 4\pi\rho_{free}$$

וכן:

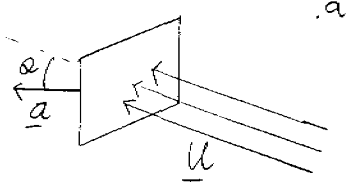
$$\underline{D} = \frac{k}{r^2}$$

אזהרה: D איננו השדה החשמלי בחומר, לא מבחינת תנאי השפה ולא מבחינת שיקולי אנרגיה.

ג': זרם ישר

זרם חשמלי וחוק שמור המטען

נתונה לולאה בעלת שטח a.



דרך הלולאה יש זרם של חלקיקים, שמהירותם $\underline{u}$. זוית פגיעתם בניצב ללולאה: θ.

נניח – N מס' החלקיקים ליח' נפח.

אזי – מס' החלקיקים שעוברים דרך הלולאה

משך Δt יהיה:

$$N u \Delta t\, a \cos\theta$$

יהי $\underline{a}$ וקטור השטח בגודל $|a|$ ובכוון ניצב ללולאה. אזי מס' החלקיקים:

$$N \underline{u} \cdot \underline{a}\, \Delta t$$

נניח שלכל חלקיק מטען q.

נגדיר $\underline{J}$: וקטור צפיפות הזרם כדלקמן:

$$\underline{J} \stackrel{\triangle}{=} Nq\underline{u}$$

אזי יתקיים:

$$\underline{J} \cdot \underline{a} = Nq\underline{u} \cdot \underline{a}$$

ז"א: מכפלת $\underline{J}$ ב $\underline{a}$ סקלרית היא המטען ליח' זמן דרך הלולאה a.

לפיכך נגדיר את הזרם I כדלקמן:

$$I \stackrel{\triangle}{=} \underline{J} \cdot \underline{a}$$

היחידות:

$$[J] = cm^{-3} \cdot e.s.u \cdot \frac{cm}{sec} = \frac{e.s.u}{cm^2 \cdot sec}$$

$$[I] = \frac{e.s.u}{cm^2 \cdot sec} \cdot cm^2 = \frac{e.s.u}{sec}$$

כאשר:

$$1\ ampere = \frac{coul}{sec} = \frac{3 \times 10^9\ e.s.u}{sec}$$ אמפר

כאשר ישנם חלקיקים שונים במצבים שונים נקבל הגדרה כללית ל - $\underline{J}$:

$$\underline{J} = \sum_i N_i q_i \underline{U}_i$$

כאשר המטען q_i בא בכפולות שלמות של - e .

או במקרה שיש n סוגי יונים נושאי מטען בשלכל סוג מטען שונה:

$$\underline{J} = q_1 \sum_i N_i \underline{U}_i + \dots + q_n \sum_i N_i \underline{U}_i$$

ניתן להגדיר מהירות ממוצעת:

$$\underline{\bar{U}} = \frac{1}{N} \sum_i N_i \underline{U}_i$$

ואז קיים:

$$\sum_i N_i \underline{U}_i = N \underline{\bar{U}}$$

ונקבל:

$$\underline{J} = q N \underline{\bar{U}} + q_i N_i \underline{\bar{U}}_i$$

כאשר $qN\underline{\bar{U}}$ - הזרם ע"י מעבר אלקטרונים,

$q_i N_i \underline{\bar{U}}_i$ - הזרם ע"י מעבר יונים.

תכונות וקשור צפיפות הזרם:

הזרם דרך משטח סגור:

$$\oint_S \underline{J}\, d\underline{a} = -\frac{d}{dt} Q = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dv$$

באשר V הוא הנפח בתוך המשטח.

זוהי כמות הזרם היוצאת החוצה מהמשטח במשך Δt .

כמו כל שטף דרך משטח סגור:

$$\oint_S \underline{J} \cdot d\underline{a} = \int_V div\, \underline{J}\, dv$$

ומכאן:

$$\int_V div\, \underline{J}\, dv = -\frac{d}{dt} \int_V \rho\, dv$$

ולכן:

$$\boxed{div\, \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

הנגזרת של ρ לפי t היא חלקית כי סביר ש - ρ תלוי בפרמטרים נוספים.

זוהי צורה חדשה לחוק שימור המטען.

במצב עמיד: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

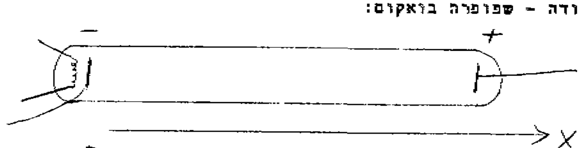
ואז: $div\, \underline{J} = 0$

(2) מוליכות והתנגדות, חוק אוהם

חוק אוהם קובע שעוצמת הזרם נמצאת בקשר ליניארי למתח, חוק פשוט המתקיים במערכות מסובכות. נראה תחילה דוגמא פשוטה של מערכת שאינה מקיימת את החוק.

הדיודה

נתונה הדיודה - שפופרה בואקום:



מחממים את משטח הקתודה. היא פולטת אלקטרונים ונוצר זרם I לעבר האנודה.

המתח בין האלקטרודות: $V = \Delta \varphi = \varphi^{+} - \varphi^{-}$

ואנו מחפשים את $I(V)$.

יהי: $\rho(x)$ צפיפות המטען.

$v(x)$ מהירות האלקטרונים

אזי:

$$J = \rho(x)\,v(x)$$

בטמפ. נמוכה אין פליטת אלקטרונים ואין זרם. בטמפ. גבוהה מדי – פליטה גדולה תגרום להיווצרות מטען מרחבי שלילי באיזור הקתודה ולכן למיסוך של הגדה. חלקיקים נוספים שיפלטו לא ינועו לעבר האנודה, ונקבל זרם המוגבל ע"י מטען מרחבי.

נגדיר בקתודה $x=0$ ונדון רק במקרה שבו $E_{(x=0)}=0$ בגלל המיסוך.

נחשב את מהירות החלקיקים:

משיקולי אנרגיה:

$$|e|\,\varphi(x) = \frac{1}{2} m v_{(x)}^2$$

ביכולתנו לקבוע: $\varphi(x=0)=0$

ואז נקבל:

$$v(x) = \left(\frac{2|e|\varphi(x)}{m}\right)^{1/2}$$

נחשב את ρ:

לפי משוואת פואסון:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$$

קיימת תלות רק בציר ה – x לכן:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho(x)$$

$\rho<0$ לאלקטרונים.

$$\rho(x) = \frac{J}{v(x)}$$

ולכן:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi J\,(m)^{1/2}}{(2|e|\varphi(x))^{1/2}}$$

יהיה:

$$\alpha = 4\pi J\left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2}$$

אזי:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\alpha}{(\varphi)^{1/2}}$$

נכפול בנגזרה ראשונה:

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\alpha}{(\varphi)^{1/2}}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = -2\alpha\left(\sqrt{\varphi}\right) + C_1$$

תנאי ההתחלה היו:

$$\varphi(0)=0$$

$$E(0)=0$$

ולכן:

$$\frac{d\varphi}{dx}(0)=0$$

ולכן:

$$C_1=0$$

ז"א:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = -4\alpha\,\varphi^{1/2}$$

הזרם

האיבר השמאלי חיובי כי $\alpha<0 \Leftarrow J<0$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2(-\alpha)^{1/2}\varphi^{1/4}$$

$$\varphi^{-1/4}\frac{d\varphi}{dx} = 2(-\alpha)^{1/2}$$

נבצע אינטגרציה:

$$\frac{4}{3}\varphi^{3/4} = 2(-\alpha)^{1/2}x + C_2$$

בהתאם לתנאי ההתחלה:

$$\varphi(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$

ע"י העלאה ברבוע והצבת $\propto$ נקבל:

$$\varphi^{3/4} = -\frac{9}{4}\cdot 4\pi \underline{J}\sqrt{\frac{m}{2e}}\, X^2$$

(הערה: מתייחסים ל - φ כאל ערך מוחלט של המטען.)

ומצאנו ש - φ עולה בכוון - X.

יהי: $\varphi=V \quad , \quad X=\ell$.

אזי:

$$V^{3/4}=9\pi \underline{J}\sqrt{\frac{m}{2e}}\, \ell^2$$

ולכן:

$$\boxed{\underline{J} = \frac{1}{9\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}}\cdot\frac{V^{3/2}}{\ell^2}}$$

יהי A - שטח החתך.

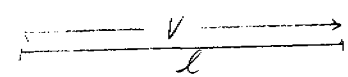
$$\boxed{I(V) = \frac{A}{9\pi\sqrt{\frac{m}{2e}}}\cdot\frac{V^{3/2}}{\ell^2}}$$

הזרם עולה לינארית עם שטח החתך ובחזקת 3/2 עם המתח.

וזהו חוק "Child-Langmuir" בענין מוליכות חשמלית בדיודות.

<u>זרם חשמלי בחוט מוליך</u>

נתון חוט מוליך באורך ℓ ובין קצותיו הפרש מתחים - V.



מתוך הנסיון אנו מוצאים:

$$I \sim V$$

כאשר V כאמור הוא $\Delta\varphi$.

לכן נגדיר באופן נסיוני:

$$I = V/R$$

יהי A שטח החתך של החוט. בצורה נסיונית התגלה:

$$R \sim \frac{\ell}{A}$$

ומכאן החוק הנסיוני:

$$\boxed{I \sim \frac{A}{\ell}V}$$

בצורה שונה:

ρ' התנגדות סגולית

$$I = \frac{V}{R} = \frac{VA}{\rho'\ell}$$

$$\frac{I}{A} = \underline{J} = \frac{V}{\rho'\ell}$$

וזהו חוק אוהם.

חוק אוהם נכון לגבי מכלול רחב של חומרים, באורכים שונים ולגבי זרמים שונים.

בחומר הומוגני (בניגוד לדיודה) קיים:

$$V/\ell = \underline{E}$$

ולכן מתוך -

$$\sigma = 1/\rho'$$

$$\underline{J} = \rho \underline{v}$$

מסיקים:

$$\underline{J} = \sigma \underline{E}$$

σ מקדם צפיפות הזרם.

במוליכים לגביהם נכון חוק אוהם, ρ נשאר קבוע - ז"א הצפיפות על המוליך קבועה.

ומכאן:

$$\underline{v} \sim \underline{E}$$

זו תוצאה מפתיעה. כזכור השדה הוא כח ליח' מטען ומסתבר שהמהירות פרופורציונית לכח. עד כה נתקלנו במקרים בהם התאוצה פרופורציונית לכח.

בעיה עקרונית נוספת - בדיודה שהיא מערכת פשוטה יחסית קבלנו חוק מסובך לזרם ואילו ברוב החומרים פועל חוק פשוט ונוח כחוק אוהם.

התשובה לשתי השאלות היא במודל הבא:

בשדה החשמלי קיים אמנם, בהתאם לידוע לנו:

$$a = \frac{q}{m}E$$

ז"א $a \sim F$ כנדרש.

כמו כן:

$$J = Nq\bar{u} = \rho\bar{u}$$

ומכאן:

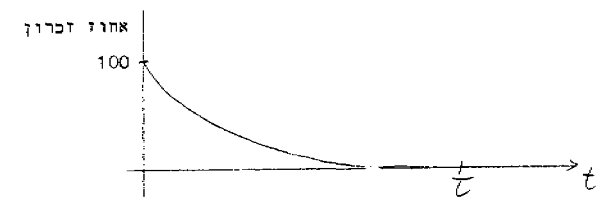
$$\bar{u} \sim E$$

ז"א – המהירות הממוצעת פרופורציונית גם היא לשדה, אך לא המהירות של כל חלקיק לחוד.

הגדרה: המהירות הממוצעת נקראת "מהירות הסחף" "drift velocity" או "מהירות הדחיפה".

במסגרת שבה הרבה חלקיקים (כזכור 6×10^{23} מולקולות בגר' מול) ועקב התנועה התרמית אין לחלקיק "זכרון" ואין קשר בין מהירות וכיוון של אותו חלקיק בזמנים שונים – ז"א אחרי שעבר מס' מספיק של התנגשויות.

נגדיר τ כ"זמן זכרון" באופן איכותי. כך שאחרי τ החלקיק מפסיק לנוע בהתאם למצבו הקודם.



כאמור: בשדה חשמלי:

$$a = \frac{Eq}{m}$$

אך a היא תאוצה הפועלת על החלקיק במשך τ בלבד.

לכן, באופן איכותי:

$$a \cdot \tau = \Delta V = \frac{Eq\tau}{m}$$

היא תוספת המהירות בכיוון השדה.

לכן:

$$\bar{u} = \frac{Eq\tau}{m} \Rightarrow \bar{u} \sim E$$

המודל הזה אינו מדויק וכולל – זהו תיאור איכותי של תנועת החלקיקים בחומר.

ניתן להניח ש-τ לא מושפע ע"י השדה אם $\Delta V \ll V_0$ כאשר V_0 היא המהירות התרמית בחומר.

לגבי חומרים מסוימים, או בשדות חזקים ביותר – τ הופך לפונקציה של E ואז חוק אוהם אינו מתקיים.

כאמור:

$$J = qN\bar{u} = qNq\frac{\tau}{m}E$$

מניחים שיש סוגים שונים של מוליכי מטען אלקטרונים, יונים וכו'. לכן:

$$J = Nq^2E\left(\frac{\tau^+}{m^+} + \frac{\tau^-}{m^-}\right)$$

(מתייחסים לשני סוגי מטען)

כאשר: ברור שקיים: $m^- < m^+$

וסביר להניח: $\tau^- \neq \tau^+$

ולכן מגיעים לתוצאה:

$$\sigma = Nq^2\left(\frac{\tau^+}{m^+} + \frac{\tau^-}{m^-}\right)$$

גם זהו כמובן תאור איכותי בלבד.

היחידות:

$$[V] = volt \cdot \left(\frac{1}{300}\, statvolt\right)$$

$$[I] = \frac{e.s.u}{sec} \qquad 1\, amper = 3\times10^{9}\, e.s.u/sec$$

$$[R] = \frac{V}{I} = \frac{volt}{amper} = Ohm$$

(לא קיימת יח' להתנגדות בשיטת $C.G.S$)

$$R = \rho'\frac{l}{A} \Rightarrow [\rho'] = ohm \cdot cm$$

וכמו כן:

$$[\sigma] = (ohm.cm)^{-1}$$

__הערות:__

א. המודל האחרון התבסס על $V_0 >> \Delta V$

מסתבר שבממפ. החדר:

במימן – $V_0 \approx 10^5\, cm/sec$

בחוט נחושת, 1 אמפר – $\Delta V \sim 1\, cm/sec$

ב. במתכות שבהן ההולכה ע"י אלקטרונים:

$$\frac{J^+}{m^+} << \frac{I^-}{m^-}$$

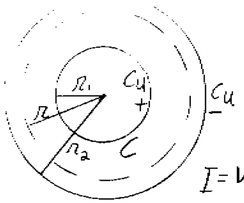
למעשה, העובדה הנסיונית היא שתנועת היונים במוליך מוצק היא – 0.

לעומת זאת, באלקטרוליזה של מלח מותך למשל יש תנועת יונים משני הסוגים.

(3) __בעיות מוליכות__

נתונים שני גלילי נחושת קונצנטריים וביניהם גרפיט.

יש מעבר זרם מהגליל הפנימי לחיצוני.



L - גובה הגלילים

$$l = r_2 - r_1$$

שטח החתך – A הולך וגדל, לכן לא נוכל להשתמש בחוק: $I = V/R$

לעומת זאת קיים: $J = \sigma E$ כאשר σ היא תכונת גרפיט נתונה.

$$I = JA = J(r)\, 2\pi r L$$

$$J = \sigma A$$

שדה של גליל הוא:

$$E(r) = \frac{k}{r} \Leftarrow \frac{2\lambda}{r}$$

אך:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr = k \log\frac{r_2}{r_1}$$

כלומר:

$$K = \frac{V}{\log\frac{R_2}{R_1}}$$

ולכן:

$$E = \frac{V}{r\log\frac{r_2}{r_1}}$$

מתוך $J = \sigma E$

$$J = \frac{\sigma V}{r\log\frac{r_2}{r_1}}$$

$$I = JA$$

ולכן:

$$I = 2\pi L \frac{\sigma V}{\log\frac{r_2}{r_1}}$$

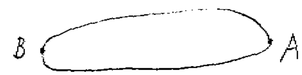
הזרם אינו פונקציה של $r_1 < r < r_2$ וזה ברור כי מטען מרחבי אינו נעלם בדרך.

ולכן במקרה זה:

$$R = \frac{\log\frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \sigma}$$

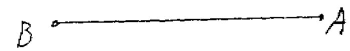
<u>מעגל אקויולנטי</u>

א. $V=\varphi_A-\varphi_B$



המעגל בנוי משני מוליכים נפרדים.

ב.



הקשר בין A ו - B ע"י מוליך אחד בלבד.

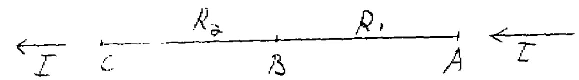
עדין - $V=\varphi_A-\varphi_B$

$$R_{AB}=\frac{V}{I}$$

נניח שהזרם בשני המקרים יהיה אותו הזרם, אזי R מקבל חשיבות של מקדם בלבד.

כל קטע ממערכת פיזיקלית שבו זרם ניתן לתיאור ע"י מעגל אקויולנטי בין שתי נקודות.

נתון מוליך ובו זרם:



הקטע AC ניתן להצגה באופנים שונים:

קיים:

$$R_1=\frac{V_{AB}}{I}$$

$$R_2=\frac{V_{BC}}{I}$$

ולכן:

$$V_{AB}=IR_1$$
$$V_{BC}=IR_2$$

$$V_{AC}=V_{AB}+V_{BC}=I(R_1+R_2)$$

R כולל של הקטע יהיה:

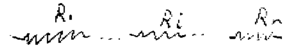
$$R=\frac{V_{AC}}{I}$$

ולכן:

$$\boxed{R=R_1+R_2}$$

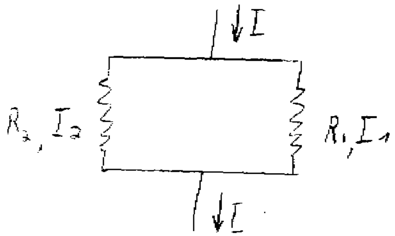
וזהו החוק לחיבור נגדים בטור.

כללית:



$\Leftarrow \quad R=\sum_{i=1}^{n} R_i$

נתבונן במעגל:



$$I=I_1+I_2$$

$$R=\frac{V}{I}$$

$$R_2=\frac{V}{I_2}\,,\quad R_1=\frac{V}{I_1}$$

ולכן:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{I_2+I_1}{V}=\frac{1}{R}$$

וקבלנו:

$$\boxed{\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

וזהו החוק לחיבור נגדים במקביל.

כללית: $\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$

לפתרון בעיות של מעגלי זרם עלינו לזכור:

1. $V_i=I_iR_i$ לכל i (לאמור - חוק אוהם).
2. שימור מטען - סכום הזרמים בצומת הוא - 0. בצומת: $\sum I_i=0$
3. שימור אנרגיה: $\oint E\,ds=0$

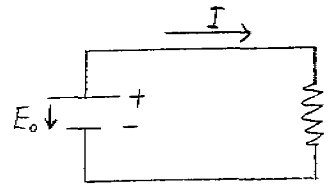
ז"א - סכום המתחים על כל מעגל סגור הוא - 0.

$\sum V_i=0$ לאורך רשת.

(4) כח אלקטרו-מניע

מקור לכח אלקטרו-מניע הוא מתקן הגורם לכך שזרם חשמלי ינוע בכוון הפוך לשדה החשמלי.

במערכת אוהמית קיים $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ כאשר $\sigma > 0$ ולכן, הזרם בכוון השדה.



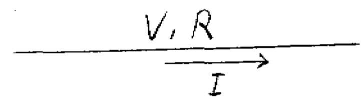
בתוך המכשיר:

E_0 מה + ל: −

I מה − ל: +

מתקנים כנ"ל פועלים ע"י מכשירים מכנים או כימיים. למשל - דינמו, גנרטור, בטריה חשמלית.

אנרגיה, הספק של מקורות כ.א.מ



בתוך חוט מוליך ובו זרם.

מהי האנרגיה?

$$[V] = volt = \frac{1}{300}\, statvolt = \frac{1}{300}\,\frac{dyn\,cm}{e.s.u}$$

לכן:

$$[V] = \frac{1}{300}\,\frac{dyn\,cm}{e.s.u} = \frac{1}{300}\,\frac{erg}{e.s.u}$$

בשיטה $C.G.S$:

$$[I] = amper = 3 \times 10^9\ e.s.u/sec$$

העבודה ליחידת זמן במעבר זרם היא:

$$W = I V$$

לכן:

$$[W] = [IV] = 10^7\ erg/sec = \frac{Joule}{sec}$$

ההספק:

$$P = I V$$

$$[P] = \frac{Joule}{sec} = Watt$$

כמו כן:

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

נגדיר: $\mathcal{E}$ הוא הפרש הפוטנציאלים במקור לכח אלקטרו מניע.

אזי:

$$\mathcal{E} I = P$$

הוא ההספק של המתקן.

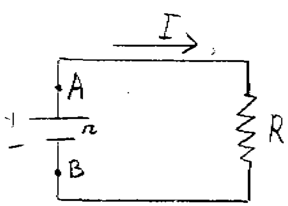
לכן:

העבודה על מטען q הוא: $\mathcal{E} q$

ואמנם:

$$\frac{\mathcal{E} q}{t} = \frac{W}{t} = \mathcal{E} I = P$$

במקרה האידיאלי - כשאין התנגדות פנימית למתקן:



$$V_{AB} = I R$$

אך גם $V_{AB} = \mathcal{E}$

ולכן:

$$\mathcal{E} = \sum_i I R_i$$

בדרך כלל למתקן יש התנגדות פנימית - r ולכן:

$$\mathcal{E} = Ir + \sum_i IR_i$$

כאשר R_i – התנגדויות חיצוניות לאורך המעגל.

$$P_{ex} = \sum I^2 R_i$$
$$P_{in} = I^2 r$$

P_{in} הוא ההספק המתבזבז במתקן.

ולכן:

לפי - $P_{מקור} = \mathcal{E} I$

אזי: $\mathcal{E} I = rI^2 + \sum_i R_i I^2$

$$\frac{P_{מקור}}{I} = \mathcal{E} = rI + \sum_i R_i I$$

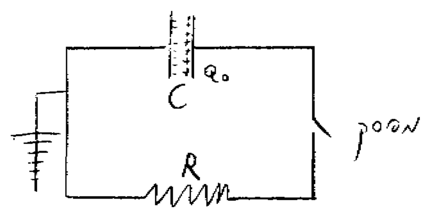
$$\frac{P_{ex}}{I} = \sum_i R_i I = \mathcal{E} - rI$$

הגדרה אחרת לכא"מ:

$$\lim_{I \to 0} \frac{P_{ex}}{I} = \mathcal{E}$$

(5) מעגלי זרם ישר

נתון המעגל הבא:



ב - $t \leq 0$

על הקבל - $Q = Q_0$, $V = \frac{Q_0}{C}$

בזמן $t=0$ סוגרים את המפסק. נקבל זרם I מהטבלה הטעונה חיובית לטבלה הטעונה שלילית.

נקבל: $V = \frac{Q(t)}{C}$

וכן: $V = RI(t)$

ידוע: 1.) $I = -\frac{dQ}{dt}$

ולכן: 2.) $I = \frac{V}{R} = \frac{Q}{RC}$

נציב את (1) במשואה (2) ונקבל: $-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC}$

הפרדת משתנים: $-\frac{dQ}{Q} = \frac{dt}{RC}$

הפתרון למשואה: $Q = e^{-\frac{t}{RC}} + C$

$$\log Q = -\frac{t}{RC} + C^*$$

תנאי ההתחלה היו: $t = 0 \Rightarrow Q = Q_0$

ולכן $C^* = \log Q_0$

לכן: $\log \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$

$$\frac{Q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

ז"א: $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$

נבדוק ממדים:

$$[R] = \frac{volt}{[illegible]} = \frac{volt}{[illegible]}$$

כש- $1\ charge = 3 \times 10^{9}\ esu$

$$[C] = \left[\frac{Q}{V}\right] = \frac{charge}{volt}$$

ולכן -

$$[RC] = sec$$

מכאן - ל $e^{-t/RC}$ אין מימד בכלל ול $Q(t)$ יש מימד של Q_0 - ד"א של מטען.

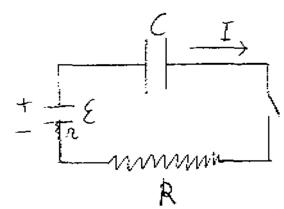
$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

$$\frac{Q_0}{RC} = \frac{V_0}{R}$$

ולכן:

$$I(t) = V_0/R \cdot e^{-t/RC}$$

נניח שבמעגל קיים גם מקור כ.א.מ.:



עד $t=0$ על הקבל $Q_0=0$

ב $t=0$ סוגרים את המפסק.

קיים:

$$\mathcal{E} - Ir = IR + \frac{Q}{C}$$

ז"א:

$$\mathcal{E} = (R+r)I + \frac{Q}{C}$$

כמו כן:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

(הפעם הזרם הוא חיובי)

לכן:

$$\mathcal{E} = (R+r)\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C(R+r)} = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

הפתרון יהיה פתרון כללי למשואה ההומוגנית ועוד פתרון פרטי למשואה האי הומוגנית.

הפתרון הכללי יהיה:

$$Q(t) = C^{*} \cdot e^{-t/(r+R)C}$$

C^{*} הוא קבוע אינטגרציה.

הפתרון הפרטי יהיה הפתרון אחרי זמן ארוך (כאשר הזרם דועך)

$$Q(t) = \mathcal{E}C$$

והפתרון הכללי:

$$Q(t) = \mathcal{E} \cdot C + C^{*} e^{-t/(R+r)C}$$

ולפי תנאי ההתחלה:

$$C^{*} = \mathcal{E}C$$

ולכן:

$$Q(t) = \mathcal{E}C\left[1 - e^{-t/(R+r)C}\right]$$

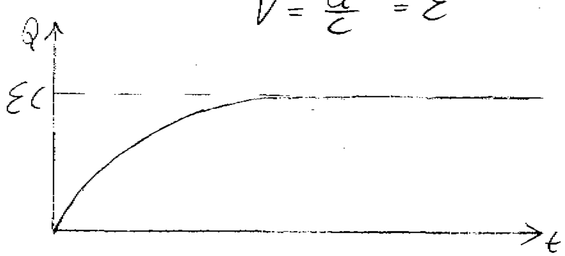
והפתרון מקיים:

כאשר $t \to \infty$

$$Q = \mathcal{E}C$$

וקיים:

$$V = \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$



$$I = \frac{dQ}{dt} = \mathcal{E}C\,\frac{1}{(R+r)C}\,e^{-\frac{t}{(R+r)C}} = $$
$$= \frac{\mathcal{E}}{R+r}\,e^{-\frac{t}{(R+r)C}}$$

$(R+r)C$ נקרא קבוע הזמן של המערכת

לכן:
$$I(t=0) = \frac{\mathcal{E}}{(R+r)}$$
$$I(t=\infty) = 0$$

כאשר $t \gg (R+r)C$

נבדוק מאזן האנרגיה במעגל:

אחרי זמן ארוך:
$$Q = \mathcal{E}C$$
$$E_f = \frac{1}{2}\frac{(\mathcal{E}C)^2}{C} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

(לצורך הענין - מדובר ב t בסדר גודל של כ - $6RC$).

אנרגית המקור:
$$E_s = \int_0^\infty \mathcal{E} I\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{R+r}}\,dt =$$
$$= \frac{\mathcal{E}^2}{r+R}\,(R+r)C\left[-e^{-\frac{t}{(R+r)C}}\right]_0^\infty = \mathcal{E}^2 C$$

E_s היא אנרגית המקור כאשר $\int_0^\infty \mathcal{E} I\,dt$ הוא הספק המקור במשך הזמן.

האנרגיה הסופית על הקבל היתה $\frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$ ולכן יש לשער שאנרגיה באותו שיעור אבדה בנגדים.

$$E_r = \int_0^\infty I^2(R+r)\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{(R+r)C}}\,dt =$$
$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}\cdot\frac{(R+r)C}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 C$$

E_r היא האנרגיה שאבדה בנגדים כאשר $\int_0^\infty I^2(R+r)\,dt$ הוא ההספק על הנגדים.

ומסתבר שאמנם קיים:

$$E_r + E_f = E_s$$

ומתקיים שימור אנרגיה.

לו R היה 0 אז קיימת ההנגדות פנימית כך שהדבר נכון תמיד, במידה והכל היה אידיאלי היה נכנס הפקטור $L\frac{d^2Q}{dt^2}$ שעוד נתקל בו.

חלק שני: אלקטרומגנטיות

פרק א׳: השדה המגנטי

(1) השדה המגנטי סביב תיל נושא זרם

נסמן ב – $\underline{B}$ שדה מגנטי.

בכל מקום אפשר להגדיר כוון של שדה מגנטי.

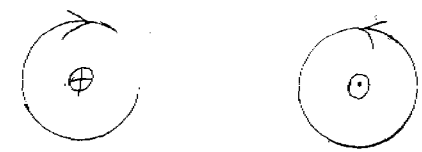
מתוך הנסיון: מסביב לחוט מוליך שבו זרם ישר קיים שדה $\underline{B}$ במעגלים סביב החוט. (לפשל נסיון עם מחט מצפן)

נסמן

$\odot$ חוט ובו זרם היוצא מהדף.

$\oplus$ חוט ובו זרם הנכנס לדף

כיון $\underline{B}$ יהיה:



וקיים מעובדה נסיונית:

$$|B| \sim \frac{I}{r}$$

כאשר r – המרחק מהחוט.

כמו כן – גילו בנסיון כוחות משיכה ודחיה בין חוטים מקבילים שבהם זרם – בהתאם לכיון הזרם.

(2) הכח על חלקיק טעון הנע בשדה מגנטי

נחפש את הכח המגנטי הפועל על חלקיק.

זרמים באותו כוון בחוטים נמשכים: 

זרמים בכוון הפוך החוטים נדחים: 

כאשר:

$$\Delta F \sim \frac{I_1 I_2}{r} \Delta l$$

Δl – אורך החוטים.

מצאנו מעובדה נסיונית כי:

$$B_2 \sim \frac{I_1}{r}$$

אזי נצפה לתוצאה:

$$\Delta F_2 \sim B_{(2)} I_2 \Delta l_2$$

והכח ליח׳ אורך של חוט:

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta l_2} \sim \frac{I_1 I_2}{r}$$

מתוך האלקטרוסטטיקה מצאנו:

$$I_2 = \underline{J}_2 \cdot \underline{a}_2 = \rho_2 \bar{v}_2 a_2 = q N \bar{v}_2 a_2$$

לכן:

$$\Delta F_2 \sim B_{(2)} q N \bar{v}_2 a_2 \Delta l_2$$

נסמן נפח של יח׳ אורך:

$$\Delta V_2 = a_2 \Delta l_2$$

מס׳ החלקיקים בנפח:

$$N \Delta V_2 = \Delta N_2$$

ולכן:

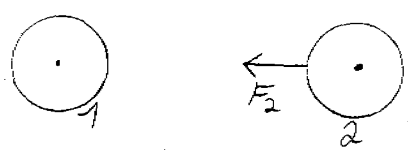
$$\Delta F_2 \sim B_{(2)} q \bar{v}_2 \Delta N_2$$

והכח על חלקיק בודד:

$$F \sim B q v$$

כאשר v – מהירות החלקיק

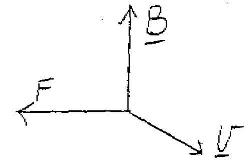
כיווני השדה:



($B_{(2)}$ נוצר ע"י הזרם מ - 1)

(החלקיקים יוצאים מהלוח עם כיוון הזרם)

וכיוון - B יוגדר לכיוון למעלה:



כך שנוצרת שלשה ימנית עם הקשר הוקטורי:

$$\underline{F} \sim q(\underline{V} \times \underline{B})$$

יחידות השדה:

בחרנו: $q, \underline{V}, \underline{E}, \underline{B}$

סה"כ הכח על חלקיק:

$$\underline{F} = q\underline{E} + \frac{1}{V_0} q \cdot \underline{V} \times \underline{B}$$

נרצה להת ל $\underline{B}$ ממדים של שדה, כך ש -

$$[q \cdot B] = dyne$$

נבחר במהירות יחוס V_0 :

$$V_0 = C = 3 \times 10^{10}\ cm/sec$$

(ז"א V_0 - מהירות האור)

ונגדיר $\underline{B}$ באופן הבא:

$$\underline{F} = q\underline{E} + \frac{q}{c}\underline{V} \times \underline{B}$$

זהו חוק לורנץ או כח לורנץ.

יח' השדה היא Gauss והשדה הוא בעוצמת 1 Gauss אם הכח על חלקיק בעל $q = 1$ esu במהירות V הוא $\frac{V}{c}$ dyne .

בחרנו את - C באופן שרירותי, יכולנו להגדיר את - $\underline{B}$ בעזרת V_0 - מהירות ייחוס שונה.

סדרי הגודל של שדות מגנטיים מוכרים -

שדה כדור הארץ - ~ 0.36 gauss

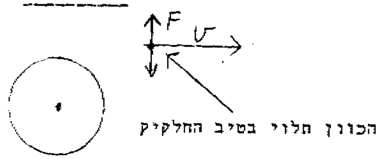
מגנט רגיל - $\sim 1000 - 10000$ gauss

שדות במעבדה - עד - $\sim 10^5$ gauss

שדות בחלל החיצון - $\sim 10^{-4}$ gauss

הסתמכנו על כך שגודלו של q נשאר קבוע גם כשהמטען נע. (בזכור, q הוגדר באלקטרוסטטיקה בהיותו נייח).

העובדה הנסיונית מוכיחה עד כדי 10^{-20} מהמטען - שמטען חלקיק טעון איננו תלוי במהירותו.



חלקיק טעון שנכנס לשדה מגנטי קבוע יסטה ממסלולו. הכח ניצב לכוון התנועה - לכן ההספק שלו הוא - 0 .

$$\underline{P} = \frac{dW}{dt} = \underline{F} \cdot \underline{V} = 0$$

באשר $\underline{F} \perp \underline{V}$

לכן: $|v| = const \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = const$

האנרגיה הקינטית של החלקיק לא השתנה.

נצפה לכך שהחלקיק יכנס לתנועה מעגלית. הכח הצנטרפטלי הוא:

$$F = \frac{mV^2}{R}$$

במקרה זה זהו כח לורנץ:

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{qVB}{C}$$

ולכן:

$$mv = \frac{qB}{c}R$$

$$R = \frac{mvc}{qB}$$

וזה נותן בידנו אמצעי להפרדה בין חלקיקים בעלי מסה שונה, מטען שונה או מהירות שונה.

זמן המחזור של סיבוב החלקיק:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

לכן:

$$T = \frac{2\pi mvc}{qBv} = \frac{2\pi mc}{qB}$$

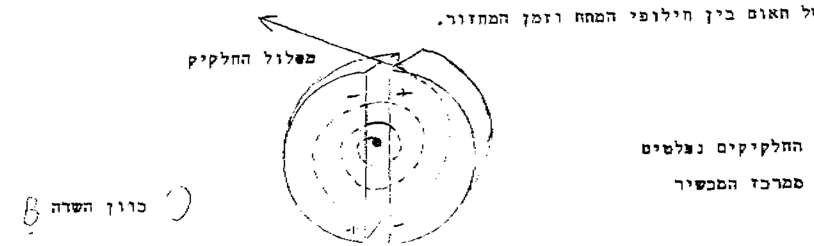
זמן המחזור <u>איננו</u> תלוי במהירות החלקיק.

<u>הציקלוטרון:</u>

הציקלוטרון בנוי בצורת גליל שטוח העשוי משני חצאים נפרדים. קיים שדה $\underline{B}$ בכוון ציר הגליל. בכל מעבר מחצי לחצי החלקיק מואץ ע"י שדה חשמלי. אחרי חצי מחזור הופכים את כווני השדה החשמלי והחלקיק מואץ פעם נוספת.

מהירות החלקיק גדלה ולכן גם רדיוס הסיבוב גדל עד שהחלקיק מוצא מהמכשיר.

למעשה - כאשר המהירות מתקרבת למהירות האור המסה גדלה ואז זמן המחזור משתנה וקיימת בעיה של תאום בין חילופי המתח וזמן המחזור.



<u>השדה של חוט המוליך זרם</u>

כזכור: $\underline{B} = k\frac{I}{r}$

ממדי הקבוע:

$$[k] = \frac{gauss\cdot cm}{esu\cdot sec} = \frac{dyne/esu\cdot cm}{esu\cdot sec} = \frac{dyne\cdot cm}{esu^2 sec}$$

מתוך חוק קולון:

$$F = \frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$$

$$dyne = \frac{esu^2}{cm^2}$$

ולכן:

$$[k] = \frac{sec}{cm} = \left[\frac{1}{v}\right]$$

נגדיר את הקבוע ע"י:

$$\underline{B} = \frac{k_1}{c}\frac{I}{r}$$

וע"י נסיון מקבלים: $k_1 = 2$

לכן, לפי שיטת C.G.S

$$B = \frac{2}{c}\frac{I}{r}$$

במקרה של שני חוטים מקבילים:

$$B_2 = \frac{2\,I_1}{c\,R}$$

$$\Delta F_2 = \frac{B_2}{c}\,v_2\,q\,N a\,\Delta l = \frac{B_{(2)}\,I_2\,\Delta l}{c}$$

או:

$$\boxed{\Delta F_2 = \frac{2\,I_1 \cdot I_2}{c^2 \cdot R}\,\Delta l_2}$$

כאשר קיים:

$$\Delta F_2 = -\Delta F_1$$

הכח ליח' אורך:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2\,I_1\,I_2}{(3\times10^{10})^2\,R}$$

$$e.s.u = \frac{coul}{3\times10^9}$$

ולכן:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{I_1}{3\times10^9}\cdot\frac{I_2}{3\times10^9}$$

או:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{R\,cm}\,I_{1\,(ampere)}\cdot I_{2\,(ampere)}$$

זהו ביטוי המערבב בין שיטות יחידות אך הוא נוח לשימושים מעשיים.

הכח יתקבל ב - $dyne/cm$

$$B = \frac{2\,I}{c\,R} = \frac{2\,Nqav}{c\cdot R} = \frac{v\cdot 2\,Nqa}{c\cdot R}$$

יהי λ - מטען ליח' אורך.

אזי: $\lambda = Nqa$

ומקבלים:

$$B = \frac{v}{c}\,\frac{2\lambda}{R}$$

כזכור - $\frac{2\lambda}{R}$ הוא השדה ליח' אורך.

הגדרת האמפר:

כאשר: $I_1 = I_2 = 1\,ampere$

מקבלים:

$$\frac{F}{cm} = \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{R\,cm}$$

לכן, לגבי $\Delta l = 1m\;,\; R = 1m$

$$F = 2\times10^{-2}\,dyne$$

הגדרה:

האמפר המוחלט מוגדר כזרם, כך שאם אותו זרם זורם בשני חוטים מקבילים, באורך מטר ובמרחק מטר, כח המשיכה הוא: $2\times10^{-7}\,newt$

האמפר הבינלאומי מוגדר בעזרת אלקטרוליזה והוא שונה מהאמפר המוחלט.

הגענו לתוצאות:

$$B = \frac{2}{c}\,\frac{I_1}{R}$$

ולכן:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{2\cdot I_1\,I_2}{c^2\,R} = B\,\frac{I_2}{c} = B\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{I_1}{(3\times10^9)} = $$

$$= \frac{1}{10}\,B\,I_{2\,(ampere)}$$

הקשר הוא:

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{1}{10}\,B\,I_{2\,(ampere)}$$

במקרה הזה:

$$\Delta l \parallel \Delta v$$

ולכן קיים הקשר הוקטורי:

$$\Delta \underline{F} = \frac{1}{10} I_{(amper)} \, \Delta \underline{l} \times \underline{B}$$

דוגמא מספרית:

$$I = 1 \, amper$$
$$r = 1 \, cm$$
$$a = 10^{-2} \, cm^2$$
$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = 2 \cdot 10^{-2} \, dyne/cm$$

נבחן את הכוחות החשמליים:

$$\underline{J} = \frac{I}{a} = \frac{3 \times 10^{9}}{10^{-2}} = 3 \cdot 10^{11} \, e.s.u/sec \cdot cm^2$$

מס' האלקטרונים בסמ"ק:

$$\frac{6 \cdot 10^{23}}{60} \cdot 10 = 10^{23}$$

כאשר – משקל סגולי- 60

מס' אלקטרונים באטום – 10.

לכן –

$$\rho = 10^{23} \cdot 4.8 \cdot 10^{-10} = 4.8 \cdot 10^{13} \, e.s.u/cm^3$$

הערה: ρ צפיפות המטען הנמצא בתנועה, אך קיים גם מטען חיובי נ"ח לכן האינטראקציה האלקטרוסטטית מתקזזת.

השדה החשמלי:

$$E = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2}{r} \cdot 4.8 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-2}$$

כאשר $\lambda = \rho \cdot a$

$$E = \frac{2}{r} \cdot 4.8 \cdot 10^{+11} \approx \frac{10^{12}}{r}$$

הכוחות החשמליים חזקים לאין שיעור מהאפקטים המגנטיים המקבילים להם.

נחשב את המהירות הממוצעת של החלקיקים:

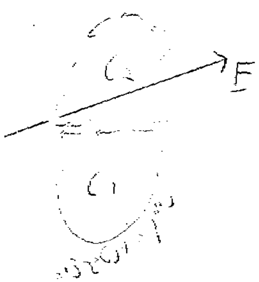
$$J = 3 \times 10^{11} \, e.s.u/cm^2 \, sec$$

$$\rho = 4.8 \cdot 10^{13} \, e.s.u/cm^3$$

$$|\underline{v}| = \frac{J}{\rho} = \frac{3 \times 10^{11}}{4.8 \cdot 10^{13}} \cong 0.65 \cdot 10^{-2} \, cm/sec$$

מסתבר שתנועת האלקטרונים במוליך היא איטית ביותר. לעומת זאת, האימפולס להתחלת הזרם החשמלי עובר במהירות האור ולכן הזרם מתחיל בכל חלקי המוליך בו בזמן.

(3) מושג הרוטור



C – עקומה סגורה.

$\underline{F}$ – וקטור העובר דרך העקומה.

יש משמעות ל – $\oint_C F ds$

נוכל לחלק את המסלול ולחשב סכום אינטגרלים.

נקבל:

$$\oint_C \underline{F} d\underline{s} = \oint_{C_1} \underline{F} d\underline{s} + \oint_{C_2} \underline{F} d\underline{s}$$

על קטע החלוקה – האינטגרלים בכוונים השונים יבטלו זה את זה.

נמשיך ונחלק את C ונקבל:

$$\oint_C F ds = \sum_i \oint E d\underline{s}$$

(הפיתוח דומה לזה של משפט הדיורגנס).

נניח a_i – השטח התחום בקו הסגור C_i

נסמן –

$$\Gamma = \oint_C \underline{E}\,d\underline{s} = \sum_i \oint_{C_i} \underline{E}\,d\underline{s} = \sum_i \Gamma_i$$

לכן:

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \to 0} \frac{1}{a_i} \oint_{C_i} \underline{E}\,d\underline{s}$$

יהי $\underline{a}_i$ וקטור השטח של a_i.

נגדיר:

$$\underline{n} = \frac{\underline{a}_i}{a_i}$$

ונגדיר:

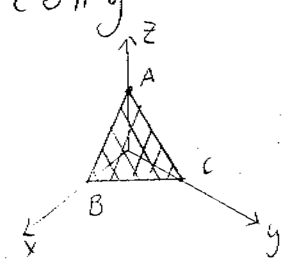
$$S_{(\underline{n})} = S_n = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$

נניח קיים הגבול וננסה למצוא את S_n.

ברשותנו לחלק את – C המקורי למשולשים.

נבנה לכל משולש מערכת צירים קרטזית שתקיים:

$$AO \parallel z\ ,\ BO \parallel x\ ,\ CO \parallel y$$



$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \underline{E}\,d\underline{s} = \oint_{ABCA} \underline{E}\,d\underline{s} = \oint_{ABOA} \underline{E}\,d\underline{s} + \oint_{OBCO} \underline{E}\,d\underline{s} + \oint_{AOCA} \underline{E}\,d\underline{s}$$

לכן:

$$\Gamma_i = \Gamma_{y(i)} + \Gamma_{z(i)} + \Gamma_{x(i)}$$

כאשר כל היטל מסמן אינטגרל על המישור שמולו.

ז"א:

$$\Gamma_{x(i)} = \oint_{OCAO}$$ וכו'

$$\Gamma_i = \frac{\Gamma_{x(i)} + \Gamma_{y(i)} + \Gamma_{z(i)}}{a_i} = \frac{a_{x(i)}\Gamma_{x(i)}}{a_{x(i)}a_i} + \frac{a_{y(i)}\Gamma_{y(i)}}{a_{y(i)}a_i} + \frac{a_{z(i)}\Gamma_{z(i)}}{a_{z(i)}a_i}$$

כאשר a_{xi} הוא שטח המשולש AOC וכו'.

לפי –

$$\underline{n} = \frac{\underline{a}_i}{a_i}$$

$$n_x = \frac{a_{xi}}{a_i}$$

ולכן:

$$\frac{\Gamma_i}{a_i} = n_x \frac{\Gamma_{x(i)}}{a_{x(i)}} + n_y \frac{\Gamma_{y(i)}}{a_{y(i)}} + n_z \frac{\Gamma_{z(i)}}{a_{z(i)}}$$

ובגבול:

$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = n_x S_x + n_y S_y + n_z S_z$$

$$S_n = S_{(\underline{n})} = \underline{n}\cdot(S_x\underline{i} + S_y\underline{j} + S_z\underline{k})$$

$$\Gamma = \oint_C \underline{E}\,d\underline{s} = \sum_i \Gamma_i = \sum_i a_i \frac{\Gamma_i}{a_i} =$$

$$= \int S_n\,da_i = \int da_i\,\underline{n}\cdot(S_x\underline{i} + S_y\underline{j} + S_z\underline{k})$$

אך -
$$\underline{n}\, da_i = d\underline{a}_i$$

ולכן:
$$\Gamma = \int (S_x \underline{i} + S_y \underline{j} + S_z \underline{k})\, d\underline{a}_i$$

וזהו למעשה שטף.

הסימון ל - $\underline{S}$ הוא: $\mathrm{curl}\, \underline{F}$

או: $\mathrm{rot}\, \underline{F}$

(4) <u>משפט סטוקס</u>

כאמור:
$$\mathrm{curl}\, \underline{F} = S_x \underline{i} + S_y \underline{j} + S_z \underline{k}$$

באשר:
$$S_n = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$
$$\Gamma_i = \oint_{c_i} \underline{F}\, d\underline{s}$$

או:
$$S_n = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \mathrm{curl}\, \underline{F} \cdot \underline{n}$$

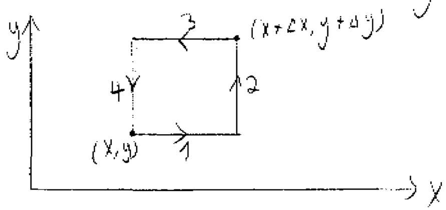
ומכאן:
$$\int_c \underline{F}\, d\underline{s} = \sum_i \int_{c_i} \underline{F}\, d\underline{s} = \sum_i \Gamma_i = \sum_i a_i \left(\frac{\Gamma_i}{a_i}\right) =$$
$$= \int_S da\, \mathrm{curl}\, \underline{F} \cdot n = \int_S \mathrm{curl}\, \underline{F} \cdot d\underline{a}$$

ז"א:
$$\boxed{\int_c \underline{F}\, d\underline{s} = \int_S \mathrm{curl}\, \underline{F} \cdot d\underline{a}}$$

וזהו משפט סטוקס.

C_i קו סגור נגד כוון השעון אז הוקטור יוצא מהדף

נתונה לולאה במישור xy :



$$S_z = \lim_{a_z(i) \to 0} \frac{\Gamma_z(i)}{a_z(i)}$$

נחשב את האינטגרל על הלולאה.

הכח הממוצע על כל קטע הוא הכח במרכזו.

בקטע 1 האינטגרל: $F_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y) \cdot \Delta x$

בקטע 2 האינטגרל: $F_y(x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta y$

בקטע 3 האינטגרל: $-F_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y) \Delta x$

בקטע 4 האינטגרל: $-F_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta y$

לכן:
$$\Gamma_z(i) = (1) + (2) + (3) + (4) = \left[F_x(x + \tfrac{\Delta x}{2}, y) - F_x(x + \tfrac{\Delta x}{2}, y + \Delta y)\right] \Delta x +$$
$$+ \left[F_y(x + \Delta x, y + \tfrac{\Delta y}{2}) - F_y(x, y + \tfrac{\Delta y}{2})\right] \Delta y =$$
$$= -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \Delta x + \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

לכן:
$$\lim_{a_{zi} \to 0} S_z = \frac{\Gamma_z(i)}{a_z(i)}$$

באותו אופן נקבל:

$$\left.\begin{aligned} S_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ S_x &= \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ S_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{curl } \underline{F}$$

ז"א:

$$\text{curl } \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underline{\nabla} \times \underline{F}$$

באשר:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

משפטים בדבר $\text{curl } \underline{F}$:

1. $\text{div}(\text{curl } \underline{F}) \equiv 0$

הוכחה א':

$$\text{div}(\text{curl } \underline{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

הוכחה ב':

ידוע:

$$\underline{a}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = 0$$

$$\text{div}(\text{curl } \underline{E}) = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{E}) = 0$$

2. אם $\underline{F} = \text{grad } \psi$ אזי $\text{curl } \underline{F} = 0$ כאשר ψ פונקציה סקלרית.

הוכחה א':

$$F_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

מרכיב ה - $\underline{i}$ של $\text{curl } F$ הוא:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial \partial \psi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \partial \psi}{\partial z \partial y} = 0$$

ובאותו אופן - גם המרכיבים האחרים של $\text{curl } \underline{F}$ שוים ל - 0.

ז"א:

$$\text{curl } \underline{F} = 0$$

הוכחה ב':

$$\underline{F} = \underline{\nabla}\psi$$

לכן:

$$\text{curl } \underline{F} = \underline{\nabla}\times\underline{\nabla}\psi = 0$$

באשר:

$$\underline{\nabla} \parallel \underline{\nabla}\psi$$

הוכחה ג':

$$F = \text{grad } \psi$$

לכן:

$$\int_A^B \underline{F}\, d\underline{s} = \psi_B - \psi_A$$

לכן:

$$\oint_A^A \underline{E}\, d\underline{s} = 0 \Rightarrow \text{curl } \underline{E} = 0$$

מפני שאם האינטגרל על הלולאה הוא - 0, גבול האינטגרל חלקי השטח גם הוא - 0.

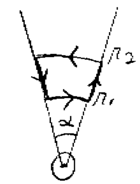
(5) <u>הקשר בין הרוטור של השדה והזרם המהווה את מקור השדה</u>

עד כה ידוע:

$$E = -\text{grad}\,\varphi$$
$$\text{div}\,E = 4\pi\rho$$
$$\oint E\,ds = 0$$

ועכשיו ידוע: $\text{curl}\,E = 0$

נתון חוט מוליך:

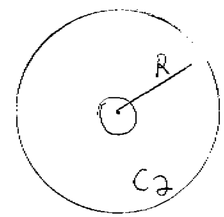


נחשב את האינטגרל: $\oint_{C_1} B\,ds$

$$B = \frac{2I}{cr}$$

$$\oint B\,ds = \frac{2I}{cr_1}\alpha r_1 - \frac{2I}{cr_2}\alpha r_2 = 0$$

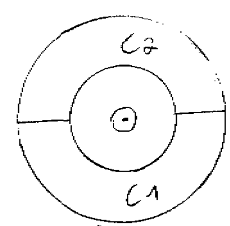
לעומת זאת – האינטגרל על מעגל שלם סביב החוט:



$$\oint_C B\,ds = \frac{2I}{cR}2\pi R = \frac{4\pi I}{c} \neq 0$$

ההבדל העקרוני הוא שבמקרה השני גמרנו סיבוב שלם סביב החוט.

נראה שעל קו סגור מחוץ למקור השדה, במקרה זה החוט, אמנם האינטגרל יהיה – 0.



על כל אחת מהקשתות החיצוניות האנטגרל שוה לאינטגרל על הקשת החיצונית.

לכן:

$$\oint_{C_1} B\,ds = \oint_{C_2} B\,ds = 0$$

curl E:

כאמור על לולאה המקיפה את החוט מוביל הזרם:

$$\oint B\,ds = 4\pi\frac{I}{c}$$

כאשר I – הזרם הכללי שעובר דרך הלולאה.

(הערה: אין חובה שהלולאה תהיה באותו מישור).

נניח שדרך הלולאה עוברים הרבה זרמים מקבילים. סה"כ הזרם הוא:

$$I_{tot} = \int_S J\,da$$

ולכן:

$$\oint_C B\,ds = \frac{4\pi}{c}\int J\,da$$

כאשר S – השטח התחום ע"י – C

לפי משפט סטוקס:

$$\oint_C B\,ds = \int \text{curl}\,B\,da$$

והגענו לתוצאה:

$$\boxed{\text{curl}\,B = \frac{4\pi}{c}J}$$

בניגוד לשדה החשמלי. שם: $\text{curl}\,E = 0$

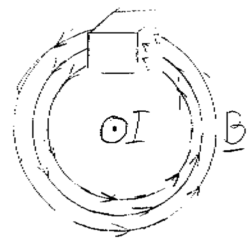
והוא החוק גם במקרה של זרמים שאינם מקבילים.

div B

נניח נתון וקטור F כך ש – $\text{div}\,F \neq 0$. המשמעות הפיזיקלית היא שדרך משטח סגור תהיה ל – F זרימה.

נבחן שדה סביב חוט ישר:

נניח שקיים בשדה משטח סגור.
כל קו שדה שנכנס למשטח חייב
לצאת כי הקוים עגולים וסגורים.
(ז"א אין-סופיים)
מכאן מגיעים לתוצאה:



$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0}$$

בניגוד לתוצאה זאת קבלנו: $\mathrm{div}\,E = 4\pi\rho$ ההבדל המהותי בין $\underline{E}$ ו $\underline{B}$ הוא
שהשדה $\underline{E}$ הוא תוצאת מטענים חשמליים לעומת $\underline{B}$ שאינו תוצאת מטענים מגנטיים.
לעומת זאת פול $\mathrm{curl}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$ קבלנו: $\mathrm{curl}\,\underline{E} = 0$

כאמור: $\mathrm{div}(\mathrm{curl}) = 0$

לכן:

לגבי זרמים עמידים: $\mathrm{div}\,\underline{J} = 0$

או: $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

שדה שהדיורגנס שלו הוא 0 – הוא שדה רוטציוני או שדה סולינואידי.

(6) <u>פוטנציאל וקטורי</u>

נחפש וקטור $\underline{A}$ המקיים:

$$\underline{B} = \mathrm{curl}\,\underline{A}$$

ז"א:

$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\underline{A}) = 0$$

$$\mathrm{curl}\,\underline{B} = \mathrm{curl}(\mathrm{curl}\,\underline{A}) = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$$

נמצא את $\underline{A}$.

$$\mathrm{curl}\,\underline{V} = \underline{\nabla}\times\underline{V}$$

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\,\underline{A}) = \underline{\nabla}\times\mathrm{curl}\,\underline{A}$$

לפי החוק: $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$

$$\mathrm{curl}(\mathrm{curl}\,\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - (\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla})\underline{A} =$$

$$= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{A}) - \nabla^2\underline{A} = \frac{4\pi\underline{J}}{c}$$

עלינו לפתור:

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{A}) - \nabla^2\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$$

נתון: $\mathrm{curl}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J};\ \mathrm{div}\,\underline{B} = 0$

נראה שהפתרון הוא חד ערכי.

נניח ש $\underline{B}_1, \underline{B}_2$ פתרונות.

אזי: $\mathrm{div}(\underline{B}_1 - \underline{B}_2) = 0$

$$\mathrm{curl}(\underline{B}_1 - \underline{B}_2) = 0$$

ולכן $(\underline{B}_1 - \underline{B}_2)$ הוא שדה קבוע.

מתוך $\mathrm{curl}(B_1 - B_2) = 0$ אנו מצפים לשדה הדומה לשדה החשמלי אך
$\mathrm{div}(B_1 - B_2) = 0$ מעיד שהשדה חסר מטענים – ז"א שלפנינו שדה השווה
לקבוע כלשהו במרחב.

הפתרון שנקבל יהיה חח"ע עד כדי תוספת קבוע.

הדרישות מהפתרון:

$\underline{B} = \mathrm{curl}\,\underline{A}$ כאשר, $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$. מכל $\underline{A}$ שהוא פתרון נוכל
להחסיר קבוע כך שנקבל $\mathrm{div}\,\underline{A} = 0$.

$$\nabla^2\underline{A} = -\frac{4\pi}{c}\underline{J}$$

ז"א:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\frac{4\pi}{c} J_x \\ \nabla^2 A_y = -\frac{4\pi}{c} J_y \\ \nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} J_z \end{cases}$$

מחוק משואת לפלס: $\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$

והפתרון לה היה:

$$\varphi_{(1)} = \int \frac{\rho_2\, dV_2}{r_{12}}$$

לכן הפתרון ל - $\nabla^2 \underline{A} = -\frac{4\pi}{c}\underline{J}$ הוא:

$$A_{x(1)} = \frac{1}{c}\int \frac{J_{x(2)}\, dV_2}{r_{12}}$$

$$A_{y(1)} = \frac{1}{c}\int \frac{J_{y(2)}\, dV_2}{r_{12}}$$

$$A_{z(1)} = \frac{1}{c}\int \frac{J_{z(2)}\, dV_2}{r_{12}}$$

והפתרון הכולל:

$$\boxed{\underline{A}_{(1)} = \frac{1}{c}\int \frac{\underline{J}_2\, dV_2}{r_{12}}}$$

$\underline{A}$ אנלוגי לפוטנציאל באלקטרוסטטיקה.

ומוגדר כפוטנציאל הוקטורי.

נבדוק אם אמנם : $\operatorname{div}\underline{A} = 0$

$$\underline{\nabla}_1 \cdot \bar{A}_{(1)} = \frac{1}{c}\int \underline{\nabla}_1 \left(\frac{\bar{J}_2}{r_{12}}\right) dV_2$$

כזכור - אם ψ פונקציה, אזי:

$$\underline{\nabla}\cdot(\psi \underline{V}) = \operatorname{grad}\psi\, \underline{V} + \psi \operatorname{div}\underline{V}$$

לכן:

$$\underline{\nabla}_1 \cdot \underline{A}_{(1)} = \frac{1}{c}\int \operatorname{grad}_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right) J_2\, dV_2 + \frac{1}{c}\int \frac{1}{r_{12}} \operatorname{div}_1 (J_2)\, dV_2$$

האיבר השני שווה ל - 0.

השויון ל - 0 כי יש גזירה של וקטור הנמצא במקום אחד לפי משתנים במקום השני.

קיים:

$$\operatorname{grad}_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -\operatorname{grad}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right)$$

$$\operatorname{grad}_1\left(\frac{1}{r_{12}}\right) J_2 = -\operatorname{grad}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right) J_2 =$$

$$= -\operatorname{div}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\underline{J}_2\right) + \frac{1}{r_{12}}\operatorname{div}_2 J_{(2)}$$

לפי משפט גאוס:

$$\operatorname{div}_1 A_{(1)} = -\frac{1}{c}\int \operatorname{div}_2\left(\frac{1}{r_{12}}\underline{J}_{(2)}\right) dV_2 + \frac{1}{c}\int \frac{1}{r_{12}} \operatorname{div}_2 J_2\, dV$$

$$= -\frac{1}{c}\oint_S \frac{1}{r_{12}} \underline{J}_{(2)}\, da_2 + \frac{1}{c\, r_{12}} \oint_S J_2\, da_2$$

(אינטגרל על שטח דרך משטח סגור).

על המשטח - הזרמים - 0 כי המשטח גדול מהנפח בו יש זרמים. לכן: $\operatorname{div} A_{(1)} = 0$

כנדרש.

---

(7) <u>חוק ביו-סור Biot-Savart</u>

$$\underline{B}_1 = \operatorname{curl}_{(1)} \underline{A}_{(1)}$$

$$\underline{B}_1 = \frac{1}{c}\int \operatorname{curl}_{(1)}\left(\frac{J_2}{r_{12}}\right) dV_2 =$$

$$= \frac{1}{c}\int \operatorname{grad}_{(1)}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) \times J_{(2)}\, dV_2$$

ז"א:

$$\boxed{\underline{B}_1 = \frac{1}{c}\int -\frac{\hat{\underline{R}}_{12}}{R_{12}^2} \times \underline{J}_{(2)}\, dV_2}$$

לגבי חוטים ארוכים קיים:

$$\underline{J}\, dV_2 = J_2 a_2\, d\underline{l}_2 = I_2\, d\underline{l}_2$$

ולכן:

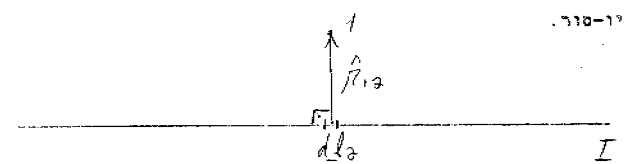
$$\underline{B}_1 = \frac{1}{c}\int \frac{I\, d\underline{l} \times \hat{R}_{12}}{R_{12}^2}$$

ולפי $\underline{B} = \int d\underline{B}$

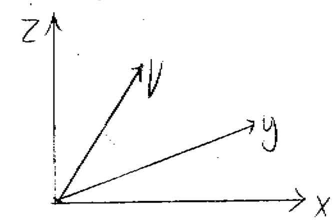
קיים:

$$d\underline{B}_1 =$$

זהו חוק ביו-סור.



נניח נתונה במרחב מערכת קורדינטית קרטזית (x, y, z) V - וקטור נתון.



נבצע טרנספורמציה:

$$x' = -x$$
$$y' = -y$$
$$z' = -z$$

ונקבל: $\underline{V}' = -\underline{V}$

נתונה מכפלה וקטורית:

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

אחרי הטרנספורמציה יתקבל:

$$\underline{c}' = -\underline{a} \times (-\underline{b}) = c$$

ז"א:

למכפלה וקטוריאלית יש תכונה - במעבר למערכת שמאלית מכפלה הוקטורים אינה משנה כיוון.

וקטור שאינו משנה כיון באופן זה הוא "פסאודו-וקטור".

השדה המגנטי $\underline{B}$ הוא מכפלה וקטורית של $d\underline{l}$ ו $\hat{\underline{R}}$ (לפי חוק ביו - סור) ולכן הוא פסאודו וקטור.

לכן:

בצורה הדיפרנציאלית:

$$\underline{B} = \int d\underline{B}$$

כאשר:

$$d\underline{B} = \frac{I}{c}\,\frac{d\underline{l} \times \hat{R}}{R^2}$$

ואין משמעות לכיון - 1 ל 2 או 2 ל - 1.

כזכור הגדרנו מהירות הסחיפה כמהירות הממוצעת.

$$I\, d\underline{l} = \underline{J}\, dV_2 = \rho\, \bar{V}\, dV_2$$

לכן:

$$d\underline{B} = \frac{\bar{V}}{c} \times \rho\, \frac{dV_2\, \hat{R}}{R^2} = \frac{\bar{V}}{c} \times d\underline{E}$$

כאשר $\underline{E}$ - השדה החשמלי.

מבחינת סדר הגודל:

$$|\bar{V}| \sim 10^{-2}\ cm/sec$$

$$c = 3 \times 10^{10}\ cm/sec$$

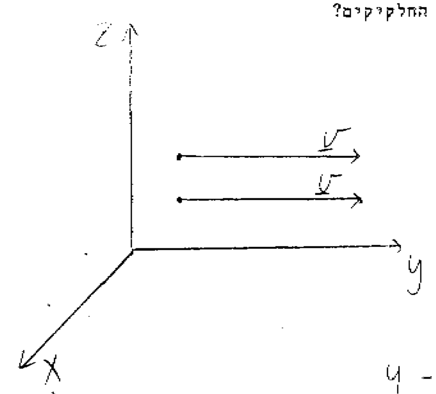
כאשר $\underline{E} = 0$ $\underline{v} = 0$

כאשר $\underline{E} \neq 0$ $\underline{v} \neq 0$

דוגמא:

שני חלקיקים בעלי מטען q נעים במרחב במהירות - $\underline{v}$.

מהו הכח בין החלקיקים?



כוון התנועה - y

$$\underline{E}_{(1)} = -\frac{q}{r^2}\,\underline{k}$$

$$\underline{B}_{(1)} = \frac{\underline{v}}{c} \times \underline{E} = -\frac{v}{c}\,\frac{q}{r^2}\,\underline{i}$$

$$\underline{F}_m = \frac{q}{c}\,\underline{v} \times \underline{B} = \frac{v^2 q^2}{c^2 r^2}\,\underline{k}$$

באשר $\underline{F}_m$ - הכח המגנטי.

$$\underline{F} = -\frac{q^2}{r^2}\,\underline{k} + \underline{F}_m = \left(\frac{q^2 v^2}{r^2 c^2} - \frac{q^2}{r^2}\right)\underline{k} =$$

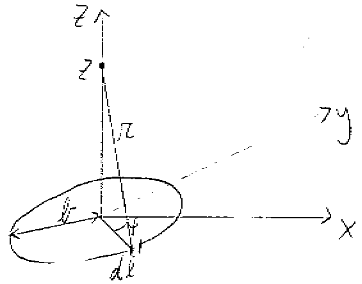
$$\frac{q^2}{r^2}\left(\frac{v^2}{c^2} \quad 1\right)\underline{k}$$

---

(8) <u>שדות מגנטיים אופייניים</u>

נתונה לולאה מעגלית ברדיוס b ובה זרם I במישור x,y .

נחשב את השדה בנק' Z על ציר ה Z .



$$d\underline{l} = \cos\varphi\, b\, d\varphi\, \underline{j} - \ldots$$

$$d\underline{B} = \frac{I}{c}\cdot\frac{d\underline{l} \times \underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{r} = z\,\underline{k} + b\cos\varphi\,\underline{i} - \ldots\varphi\,\underline{j}$$

לכן :

$$dB_z = \frac{I}{c}\,\frac{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{(b^2 + z^2)^{3/2}}\,b^2\,d\varphi$$

$$B_z = \frac{I}{c}\,\frac{2\pi b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}$$

מטעמי סימטריה, $B_{(x)} = B_{(y)} = 0$

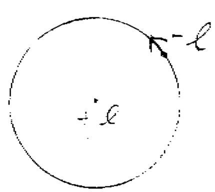
בנק' $z = 0$:

$$B_{(z)} = \frac{2\pi I}{c\, b}$$

עבור N לולאות צפופות נקבל:

$$\underline{B}'_z = N\,\underline{B}_z$$

באטום מימן:



$$b = 0.529\ A^\circ$$

$$I = e/T$$

השדה במרכז האטום - $Z=0$:

$$\underline{B} = \frac{2\pi e}{c\,b\,T}$$

נחשב את T :

כח המשיכה בין הגרעין והאלקטרון:

$$\underline{F} = \frac{e^2}{b^2} = m\omega^2 b$$

כאשר $\frac{e^2}{b^2}$ - הכח החשמלי

$m\omega^2 b$ - הכח הצנטרפטלי.

כאשר ω היא תדירות הסיבוב.

לכן:

$$\omega^2 = \frac{e^2}{m b^3}$$

$$\omega = \frac{e}{(m b^3)^{1/2}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{e}{2\pi\sqrt{m b^3}}$$

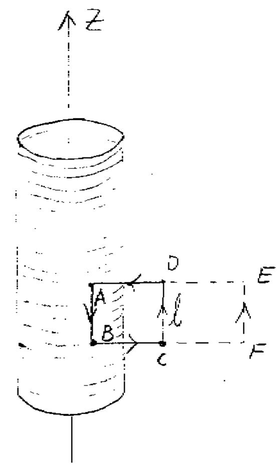
ע"י הצבת הנתונים נקבל:

$$B \sim 1.2\times 10^5 \text{ gauss}$$

דוגמאות:

I. שדה של סליל ארוך :

קיימות N כריכות ביח' אורך.



כל לולאה תורמת:

$$\underline{B}_i = \frac{I}{c}\,\frac{2\pi b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$$

נניח שהסליל אין סופי.

נבחן את השדה בסליל:

נתונות הנקודות A,B,C,D

הזרם דרך המסלול $ABCDA$ הוא - NlI לכן:

$$\oint_{ABCDA} \underline{B}\cdot d\underline{s} = \frac{4\pi}{c} N l I$$

$$\int_A^B \underline{B}\cdot d\underline{s} = Bl$$

כאשר B הוא השדה בתוך הסליל.

כמו כן:

$$\int_B^C \underline{B}\,d\underline{s} = -\int_D^A \underline{B}\,d\underline{s} \Rightarrow \int_B^C \underline{B}\,d\underline{s} + \int_D^A \underline{B}\,d\underline{s} = 0$$

דרך המלבן $CEFD$ אין זרם,

לכן:

$$\oint_{CEFDC} \underline{B}\,d\underline{s} = 0$$

נניח שהנק' E ו F נמצאות באין סוף.

ברור שקיים: $\int_C^D \underline{B}\,d\underline{s} = \int_E^F$

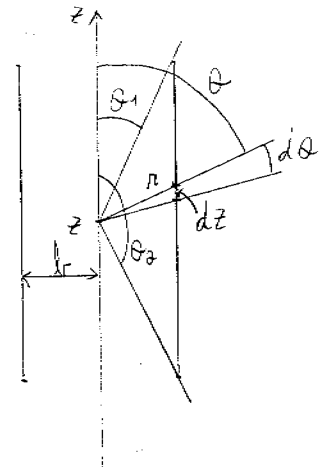
ומשיקולי אנרגיה - במרחק אינסופי מהסליל $B=0 \Rightarrow \int_E^F \underline{B}\,d\underline{s} = 0$

ולכן - $\int_C^D \underline{B}\,d\underline{s} = 0$

ולכן - בתוך הגליל

$$\boxed{B = \frac{4\pi N I}{c}}$$

לגבי גליל סופי - נעשה אינטגרציה על הכריכות.



$$dz = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta} = -\frac{b}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

קיימות N כריכות ביח' אורך.

תרומת כל כריכה:
$$B_z = \frac{2\pi I}{c\,b}$$

לכן:
$$dB_z = \frac{2\pi b^2}{c r^3}\,\frac{I N r\, d\theta}{\sin\theta} = \frac{2\pi I N}{c}\sin\theta\, d\theta$$

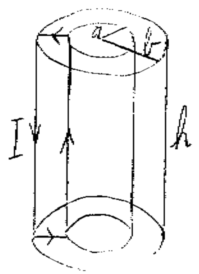
$$B_z = \frac{2\pi I N}{c}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi I N}{c}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

ואמנם, בסליל אין סופי:
$$\theta_1 = 0$$
$$\theta_2 = \pi$$

ולכן:
$$B_z = \frac{4\pi I N}{c}$$

II. טבעת גלילית (טורוס)

הטורוס בנוי משני סלילים סופיים, האחד בתוך השני,



בכל כריכה זרם - I

בכל המתקן - N כריכות.

רדיוס גדול - b

רדיוס קטן - a

נבחן את השדה בין הגלילים: $a<r<b$

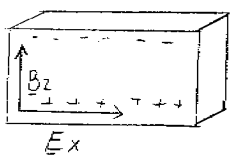
משיקולי סימטריה יהיה רק שדה משיקי - B_t

קיים:
$$\oint \underline{B}\cdot d\underline{s} = \frac{4\pi}{c}\sum I = B_t(r)\,2\pi r = \frac{4\pi N}{c} I$$

ולכן:
$$B_t(r) = \frac{2NI}{c\,r}$$

בחלל הפנימי של הגליל a ומחוץ למתקן השדה יהיה - 0 כי לא עובר זרם.

(9) "אפקט Hall" (הול)



בגופים מוליכים בשדה חשמלי נוצר
שדה שמתנגד להמשך הפרדת מטענים
עד שווי משקל ואז: $qE_y = \frac{q}{c} V(x) B_z$

כזכור: $J(x) = qnV(x)$, $V(x) = \frac{J_x}{qn}$, $E_y = \frac{J_x B_z}{nqc}$

מגדירים "אפקט Hall" כ- R_H: $R_H = \frac{E_y}{J_x B_z}$

הגדלים הנותנים את אפקט הול נתנים למדידה ולכן נתן בדרך נסיונית לקבוע את R_H
(קבוע הול)

בגוף נושא מטען שלילי - R_H שלילי

בגוף נושא מטען חיובי - R_H חיובי

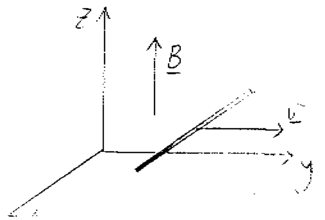
לדוגמא: Na, Li, Cu : $R_H < 0$

Al, As, Zn $R_H > 0$

פרק ב׳ : השראה אלקטרומגנטית

(1) חוק לנץ:

נתון מוט הנע בשדה מגנטי, במהירות $\underline{v}$ - בכוון הניצב לשדה.



$$\underline{v} = v\underline{j}$$
$$\underline{B} = B\underline{k}$$

על כל מטען במוט מופעל כח לורנץ.

$$\underline{F} = \frac{q}{c}\underline{v}\times\underline{B} = \frac{q}{c} v B \underline{i}$$

$$\underline{E} = \underline{F}/q = \frac{v}{c} B \underline{i}$$

נניח שבמקום מוט יש לולאה במישור (x,y)

כאשר B קבוע

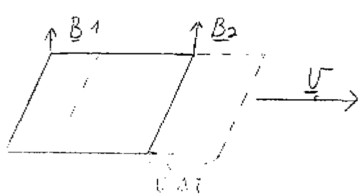
$$\oint \underline{F}\, d\underline{s} = q\oint \underline{E}\, d\underline{s} = 0$$

אך כאשר B לא אחיד:

$$F_1 = \frac{q}{c} v B_1 \underline{i}$$
$$F_2 = \frac{q}{c} v B_2 \underline{i}$$

על שתי הצלעות האחרות - הכח מאונך, והיות והחלקיקים טעונים אינם יכולים לעזוב את החומר, נזניח זאת.

לכן:



$$\oint \underline{F}\, d\underline{s} = \frac{q}{c} v (B_1 - B_2) l$$

יהיה שינוי בשטף של השדה המגנטי דרך לולאה.

השטף הוא:

$$\Phi = \int \underline{B}\, d\underline{a}$$

דרך משטח סגור - $\operatorname{div} B = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$

דרך המשטח הפתוח המוגבל בקו - ישתנה השטף:

$$d\Phi = B_2 l \underline{v}\, dt - B_1 l \underline{v}\, dt$$

$$d\Phi = (B_2 - B_1) l \underline{v}\, dt$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = (B_2 - B_1) l \underline{v}$$

כזכור:

$$\int E\, d\underline{s} = \frac{q}{c} v (B_1 - B_2) l = -\frac{q}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

ז"א - אם יש תנועת לולאת סוליך דרך שדה מגנטי לא*הומוגני נוצר כא"מ,

כאשר הכח ליח' מטען בדרך:

$$\oint \frac{\underline{F}\, ds}{q} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

$\oint \frac{\underline{F}\, d\underline{s}}{q}$ הוא כח אלקטרומניע.

כזכור קבלנו:

$$\mathcal{E} = \oint \underline{E}\, ds$$

ל $\frac{\underline{F}}{q}$ יש משמעות של שדה חשמלי ולכן:

$$\oint \frac{\underline{F}\, ds}{q} = \mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

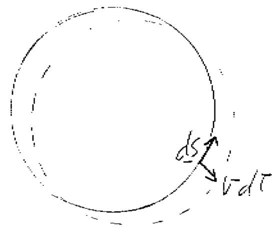
החוק שקבלנו הוא חוק כללי - השדה לא חייב להיות ניצב ללולאה והלולאה לא חייבת להיות מלבנית.

במקרה הכללי:

$$\oint \underline{F}\, d\underline{s} = q\left(\frac{1}{c}\,\underline{v} \times \underline{B}\right) d\underline{s} =$$

$$= -\frac{q}{c}\int \underline{v} \times d\underline{s} \cdot \underline{B}$$

$$\underline{v}\, dt \times d\underline{s} = d\underline{a}$$



כאשר $d\underline{a}$ אלמנט שטח בין שתי הלולאות.

לכן:

$$\oint \underline{F}\, d\underline{s} = -\frac{q}{dt}\int d\underline{a} \cdot \underline{B} = -\frac{q}{c}\frac{d\Phi}{dt}$$

והתוצאה הסופית:

$$\boxed{\oint \underline{F}\, d\underline{s} = -\frac{q}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$$

משמעות סימן ה - (-) הוא שהאפקט המושרה הוא בכוון כזה שמקטין את הסיבה שגרמה ליצירתו.

זהו חוק לנץ - Lenz

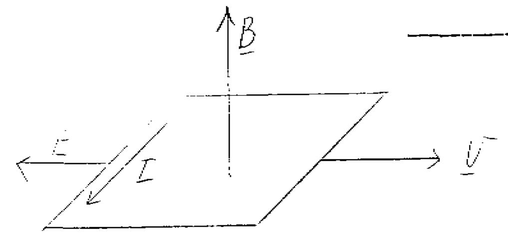
<u>מאזן האנרגיה:</u>

במעגל סגור:

$$\oint \underline{E}\, d\underline{s} = (B_1 - B_2)\frac{v}{c}\, l = |\mathcal{E}|\, q$$

על כל מטען פועלת עבודה.

האנרגיה היא האנרגיה המכנית שהושקעה בהזזת הלולאה. בהזזה יצרנו זרם ועל הזרם שנוצר פועל כח לורנץ שמתנגד לתנועה.



$\underline{F} = \underline{v} \times \underline{B}$

$\underline{v} \parallel \underline{I}$

ולכן כיוון F הוא $-y$.

כאשר $P_m = \underline{F} \cdot \underline{v}$

P_m – ההספק המכני.

(2) <u>חוק ההשראה של פרדיי</u>

הגענו לתוצאה: $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$

כאשר: $\Phi = \int_S \underline{B} \cdot d\underline{a}$

לכן: $\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{s} = \oint_C \underline{E} \cdot d\underline{s}$

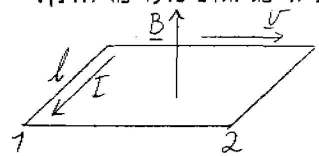
המדובר הוא בחוק מקומי – לכן לא משנה אם הלולאה נעה בשדה לא הומוגני או שהשדה נע – ז"א משתנה, וזה חוק נסיוני.

הכא"מ המושרה בלולאה משרה זרם באותו כוון. כוון הזרם – בהתאם לכלל היד הימנית ובנסיון להקטין את שינויי – $\underline{B}$.

מאזן האנרגיה היה: $\mathcal{E} I = P = \frac{dW}{dt}$

כאשר W – אנרגיה מכנית להזזת הלולאה.

עקב זרימת הזרם פועל כח לורנץ:



$d\underline{F} = I\frac{d\underline{l} \times \underline{B}}{c}$

שמאלה $F = Il\frac{B_1}{c}$

ימינה $F = Il\frac{B_2}{c}$

ולכן: $F = Il\frac{B_1 - B_2}{c}$

וזה הכח להנעת המתקן ימינה.

ההספק של הכח: $\underline{P} = \underline{F}\,\underline{v} = \frac{1}{c}(B_1 - B_2) I v l$

<u>היחידות ב C.G.S</u>: $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$

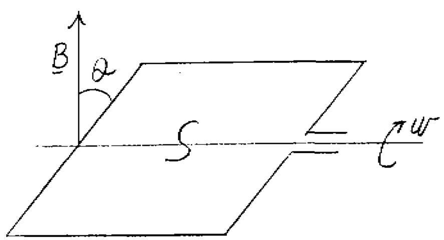
$$\text{statvolt} = \frac{1}{3\times10^{10}\,\text{cm/sec}} \cdot \frac{\text{gauss}\cdot\text{cm}^2}{\text{sec}} = \frac{\text{gauss}\cdot\text{cm}}{3\times10^{10}}$$

כנדרש.

$$\text{volt} = \frac{1}{300}\,\text{statvolt} \Rightarrow \mathcal{E}(\text{volt}) = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\frac{\text{gauss}\cdot\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

נדגים מעבר אנרגיה מכנית לחשמלית:

$\underline{B}$ – שדה מגנטי הומוגני.



לולאה מסתובבת סביב ציר בשדה – $\underline{B}$, במהירות זויתית – w.

שטח הלולאה – S

$$\Phi = B \cdot S \sin\theta \qquad ; \; \theta = \omega t + \varphi$$

$$\Phi = BS \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\,\omega BS \cos(\omega t + \varphi)$$

הכא"ם המושרה הוא מחזורי כאשר:

$$\mathcal{E}_{max} = \frac{1}{c}\,\omega BS$$

והזרם הנוצר הוא זרם חילופין.

במקרה ו -

$$B = 500 \text{ gauss}$$
$$S = 100 \text{ cm}^2$$
$$\omega = 30 \cdot 2\pi \text{ rad/sec}$$

וקיימת כריכה אחת בלבד. אזי:

$$\mathcal{E}_{max} = 0.093 \text{ volt}$$

נוכל לבטא את החוק בענין ההשראה באופן הבא:

$$\oint_C \underline{E}\,d\underline{s} = \int_S \text{curl}\,\underline{E}\,d\underline{a}$$

C - משטח סגור

S - משטח מוקף

(לפי חוק סטוק)

כמו כן:

$$\oint_C \underline{E}\,d\underline{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{S'} \underline{B}\,d\underline{a}$$

נניח $S = S'$ ונקבל:

$$\boxed{\text{curl}\,\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}}$$

וזהו חוק פרדיי.

כזכור - בתנאי אלקטרוסטטיקה קבלנו

$$\text{curl}\,\underline{E} = 0$$

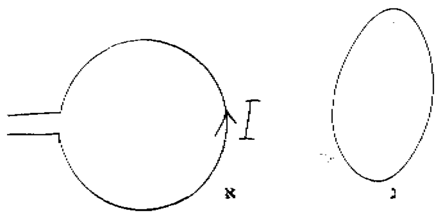
בתנאי מגנטיות משתנה:

$$\text{curl}\,\underline{E} \neq 0$$

אין זה סותר את האלקטרוסטטיקה כי פה אין מצב קבוע.

(3) השראה הדדית

נתונות שתי לולאות:



זרם משתנה בא $\Longleftarrow$ $\underline{B}$ דרך ג משתנה $\Longleftarrow$ זרם מושרה ב' - ב'.

נסמן -

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} B_{21}\,d\underline{a}_2$$

כאשר Φ_{21} הוא השטף דרך 2 הודות ל - 1.

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{21}}{dt} \sim \frac{dI_1}{dt}$$

באשר:

$$\Phi_{21} \sim B_{21} \sim I_1$$

ולכן:

$$\boxed{\mathcal{E}_{21} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}}$$

M_{21} הוא מקדם ההשראה ההדדית.

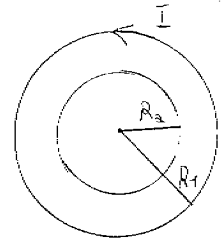
ערכו של המקדם:

$$\Phi_{21} = c M_{21} I_1$$

ולכן:

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{c I_1}$$

דוגמא להשראה הדדית:



$$R_1 \gg R_2$$

$$B_{21} = B_2 \Leftarrow R_2 \ll R_1$$

השדה דרך R_2 הוא בקירוב הומוגני ושוה לשדה במרכז,

$$B = \frac{2\pi I_1}{c R_1}$$

$$\Phi_{21} = B_{21} \pi R_2^2 = \frac{2\pi^2 R_2^2}{c R_1} I_1$$

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{c I_1} = \frac{2\pi^2 R_2^2}{c^2 R_1}$$

נניח שב R_1 יש N_1 כריכות.

ב R_2 יש N_2 כריכות.

אזי:

$$M_{12} = \frac{2\pi^2 R_2^2}{c^2 R_1} (N_1 \cdot N_2)$$

יחידות ההשראות:

בשיטת ה – C.G.S אין יח' השראות.

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

Henry היא יח' ההשראות ב: M.K.S

ולכן:

$$volt = henry \times ampere/sec$$

$$\frac{V(volt)}{300} = V(statvolt) = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \cdot 3\times10^{9}$$

באשר I ב- $e.s.u/sec$

$$V(volt) = 9\times10^{11} M_{21} \frac{dI_1 (e.s.u/sec)}{dt (sec)}$$

$$V(volt) = 9\times10^{11} \frac{2\pi^2 R_2^2}{c^2 R_1} \times \frac{dI_1 (ampere)}{dt (sec)}$$

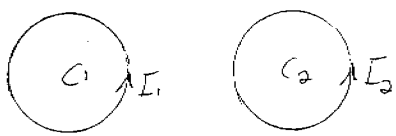
כאשר:

$$henry = \left[9\times10^{11} \frac{2\pi^2 R_2^2}{c^2 R_1}\right]$$

$$M_{21} (henry) = 10^{-9} \frac{2\pi^2 R_2^2}{R_1} \ (C.G.S)$$

---

(4) **משפט ההיפוך**



הזרם I_2 ב C_2 גורם להשראת זרם ב C_1 , כך ש:

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

משפט ההיפוך אומר שהאינטראקציה בין שני מעגלים תמיד שווה בלי תלות בפרטי ובתנאי המערכת.

ז"א:

$$\boxed{M_{21} = M_{12}}$$

הוכחה:

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{c I_1}$$

באשר:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \underline{B}_{21}\, d\underline{a}_2$$

$$\underline{B}_{21} = \operatorname{curl} \underline{A}_{21}$$

ולכן:

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \operatorname{curl} \underline{A}_{21}\, d\underline{a}_2 = \oint_{C_2} \underline{A}_{21}\, d\underline{s}_2$$

כאשר C_2 הוא קו סגור התוחם את השטח S_2

$$\underline{A}_{21} = \frac{I_1}{c}\oint_{C_1} \frac{d\underline{l}_1}{r_{12}}$$

ולכן:

$$\Phi_{21} = \frac{I_1}{c}\int_{C_2} d s_2 \cdot \int_{C_1} \frac{d l_2}{r_{12}}$$

אך - $l = s$

ולכן - $dl = ds$

ולכן:

$$\Phi_{21} = \frac{I_1}{c\, r_{12}}\oint_{C_2} d\underline{s}_2 \cdot \oint_{C_1} d\underline{s}_1$$

$$M_{21} = \frac{1}{c^2}\oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d s_1\, d s_2}{r_{12}} = M_{12}$$

מטעמי סימטריה.

מש"ל.

(5) השראה עצמית

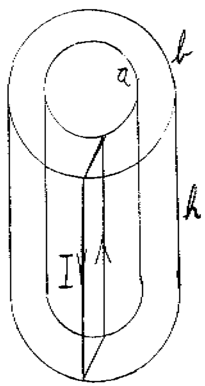
השראה עצמית: הכח האלקטרומניע המושרה במעגל הודות לשינויי זרם בתוך המעגל עצמו.

$$\mathcal{E}_{11} = -L\frac{dI_1}{dt}$$

כאשר:

$$L = \frac{1}{c}\frac{d\Phi_{11}}{I_1}$$

דוגמא:



נתון טורוס בו זורם זרם.

כזכור: $a \le r \le b$

אזי: $B(r) = \frac{2NI}{c\,r}$

$$\Phi_{11} = N\frac{2NI}{c}h\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$= 2\frac{N^2}{c}h\log\frac{b}{a}\cdot I$$

ההשראה העצמית ב - $C.G.S$ תהיה:

$$L = \frac{2N^2}{c^2}h\log\frac{b}{a}$$

ההשראה ב - henry:

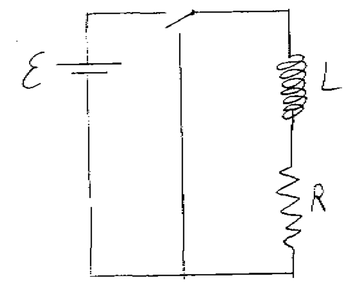
$$L = 10^{-9}\cdot 2N^2 h\log\frac{b}{a}\ (henry)$$

<u>פרק ג׳: מעגלי זרם חילופין</u>

(1) תנודות חופשיות ומאולצות

(א) מעגלי R, L

נתון המעגל:



$$I = \frac{V}{R}$$

מחברים את המפסק למעלה.

מתקיים:

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = RI$$

ולכן:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$$

המשואה ההומוגנית היא:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

ופתרונה:

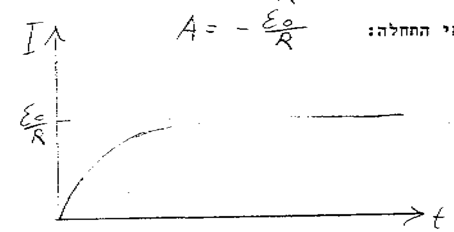
$$I = A\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

הפתרון הפרטי למשואה האי הומוגנית יהיה: $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$

נצרף את שני הפתרונות ונמצא מתנאי התחלה: $A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$

ולכן:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



אחרי זמן, מעבירים את המפסק למטה - ז"א מנתקים את הבטריה.

(מבחינה מעשית - יש לבצע ניתוק מהיר עד כדי שלא תהיה התפרקות ע"י ניצוץ).

הפעם המצב:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

ולכן:

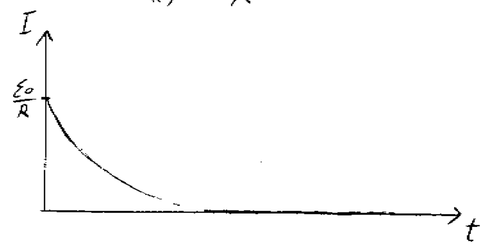
$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

לפי תנאי ההתחלה -

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

ולכן:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



יש המשכה זרם אחרי הניתוק מהמקור - התנהגות המזכירה קבל.

<u>מאזן האנרגיה:</u>

האנרגיה כחום על הנגד:

$$W_R = \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2Rt}{L}} dt = \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}LI_0^2$$

זאת האנרגיה שנמצאת בשדה המגנטי והופכת לחום כאשר עוצרים את הזרם ע"י נגד.

בטעינה קבלנו:

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

השקעת הבטריה באנרגיה במשך T:

$$W_\mathcal{E} = \int_0^T \mathcal{E}_0 I(t)\, dt = \mathcal{E}_0 I_0 \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) dt =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 T - \mathcal{E}_0 I_0 \int_0^T e^{-\frac{R}{L}t}\, dt =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 T - \frac{L\mathcal{E}_0 I_0}{R} = \mathcal{E}_0 I_0 T - L I_0^2$$

(בהנחה ש - $e^{-\frac{R}{L}T} \ll 1$ ולכן זניח)

האנרגיה שאבדה בנגד בזמן הטעינה:

$$W_R = \int_0^T I^2 R\, dt =$$

$$= I_0^2 R \int_0^T \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 dt =$$

$$= I_0 R \int_0^T \left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{2R}{L}t}\right) dt = I_0 R\left[T - 2\frac{L}{R} + \frac{L}{2R}\right] =$$

$$= \mathcal{E}_0 I_0 T - \frac{3}{2} I_0^2 L$$

ז"א: $W_{\mathcal{E}} - W_R = \frac{1}{2} L I_0^2$

זאת האנרגיה שייחסנו קודם לשדה המגנטי.

נבדוק אם אמנם האנרגיה של השדה $\underline{B}$ עקב השראות עצמית היא $\frac{1}{2} L I_0^2$

באלקטרוסטטיקה מצאנו:

$$W(E) = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dv$$

ברצוננו להוכיח:

$$W(B) = \frac{1}{8\pi}\int B^2 dv$$

נניח, נתון טורוס - טבעת גלילית בואקום.

נחפש את האנרגיה של השדה המגנטי.

כזכור:

$$\underline{B}(r) = \frac{2NI}{cr}$$

לכן:

$$\frac{1}{8\pi}\int B^2 dv = \frac{1}{8\pi}\int_a^b \frac{4N^2 I^2}{c^2 r^2} h\, 2\pi r\, dr =$$

$$= N^2 I^2 \frac{h}{c^2}\int_a^b \frac{dr}{r} = N^2 I^2 \frac{h}{c^2} \log\frac{a}{b}$$

ההשראה העצמית בטורוס:

$$L = \frac{2N^2 h}{c^2}\log\frac{a}{b}$$

ולכן קבלנו:

$$\frac{1}{8\pi}\int_a^b B^2 dv = \frac{1}{2} L I^2$$

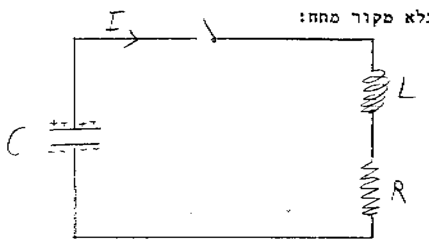
וזה אישור להשערתנו:

$$W_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{8\pi}\int B^2 dv$$

W_B - האנרגיה המיוחסת לשדה מגנטי ויש להשקיע אותה בכדי ליצור את השדה.

(ב) <u>מעגל $R.L.C$ חופשי</u>

נתון מעגל $R.L.C$ בלא מקור מתח:



תנאי ההתחלה:

על הקבל - $Q(0) = 0$

$$V(0) = V_0 = \frac{Q_0}{C}$$

ב - $t = 0$ סוגרים את המפסק.

מתקיימות המשואות:

$$V = \frac{Q(t)}{C}$$

$$V = -L\frac{dI}{dt} + RI$$

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

(I יופיע ב - (-) מסיבות של הגדרת כוונים).

ולכן:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C}$$

$$\frac{dV}{dt} = L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

וזאת משואת המעגל.

הנגזרה הראשונה מופיעה בגלל נוכחות הנגד.

הנגזרה השניה בגלל נוכחות המשרן

והזרם בגלל נוכחות הקבל.

ניתן לחלץ את - V :

$$V = \frac{Q}{C}$$

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -C\frac{dV}{dt}$$

ולכן:

$$V = -LC\frac{d^2V}{dt^2} - RC\frac{dV}{dt}$$

$$L\frac{d^2V}{dt^2} + R\frac{dV}{dt} + \frac{V}{C} = 0$$

קבלנו משואות זהות ל $V(t)$ ול - $I(t)$. לכן נצפה לפתרונות דומים.

אלו משואות אוסצילטור הרמוני מרוסן.

נפתור את $V(t)$:

הפתרון למשואה הוא:

$$V(t) = Ae^{\lambda t}$$

ולכן:

$$\frac{dV}{dt} = A\lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}\right)Ae^{\lambda t} = 0$$

ולכן:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

הפתרון הכללי יהיה:

$$V(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

כאשר:

$$\lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4C^2} - \frac{1}{LC}}$$

יתכנו המצבים הבאים:

א. $R = 0$ אזי:

$$\lambda_{12} = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm i\omega_0$$

כאשר:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$V(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

קיים:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

מבחינה פיסיקלית - יש משמעות רק לחלק הממשי של הפתרון. לכן אם למשל $A_1 = A_2$ נקבל:

$$V(t) = 2A_1\cos\omega_0 t$$

ב. $\frac{R^2}{4C} < \frac{1}{LC}$

נגדיר ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}$$

אזי:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega$$

והתוצאה תהיה :

$$V(t) = e^{-\frac{R}{2L}}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

גם הפעם – לפתרון יהיו תנודות בתדירות – ω.

ג. במקרה $\frac{R^2}{4C^2} > \frac{1}{LC}$ נקבל λ_{12} ממשיים ותהיה תופעת ריסון יתר – ז"א שאיפה מהירה ל – 0 בלי תנודות.

הפתרון לזרם בתנאי $\frac{R^2}{4C^2} < \frac{1}{LC}$:

כאמור:

$$\lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4C^2}}$$

מגדירים:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4C^2}}$$

ומקבלים:

$$\lambda_{12} = -\alpha \pm i\omega$$

$$V = e^{-\alpha t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

מתורת המס' המרוכבים:

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\; e^{i\alpha}$$

כאשר:

$$\tan\alpha = y/x$$

כמו כן, ניתן לכתוב את $A_{1,2}$ בצורה:

$$A_1 = |A_1| e^{i\varphi_1}$$
$$A_2 = |A_2| e^{i\varphi_2}$$

על מנת לקבל פתרון ממשי ל – V, חייב להיות ש – A_1, A_2 יהיו מס' צמודים.

ז"א:

$$|A_1| = |A_2|; \quad \varphi_1 = -\varphi_2$$

ז"א:

$$A_1 = Ae^{i\varphi}$$
$$A_2 = Ae^{-i\varphi}$$

ולכן:

$$V = Ae^{-\alpha t}\left(e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}\right)$$
$$V = 2Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi)$$

כאשר A ו φ – משתנים חופשיים.

לפי הטריגונומטריה:

$$\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$$

ולכן:

$$V = 2Ae^{-\alpha t}(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) =$$
$$= e^{-\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

תנאי ההתחלה היו:

$$t = 0$$
$$V = V_0 = \frac{Q_0}{C}$$
$$Q = Q_0$$
$$I_0 = 0$$

ומכאן:

$$V(0) = V_0 = A$$

ולכן:

$$V(t) = e^{-\alpha t}(V_0\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{dV}{dt} =$$
$$= \alpha C e^{-\alpha t}(V_0 \cos wt + B \sin wt) - C e^{-\alpha t}(-w V_0 \sin wt + w B \cos wt)$$

$$I_{(0)} = 0 = \alpha C V_0 - C w B$$

ולכן:
$$B = \frac{V_0 \alpha}{w}$$

ולכן:
$$V = e^{-\alpha t}\left(V_0 \cos wt + \frac{V_0 \alpha}{w} \sin wt\right)$$

או:
$$\boxed{V(t) = V_0\, e^{-\alpha t}\left(\cos wt + \frac{\alpha}{w} \sin wt\right)}$$

$$I(t) = e^{-\alpha t} V_0 \left[\frac{\alpha^2 C}{w} + wC\right] \sin wt$$

ולכן:
$$\boxed{I(t) = V_0 C e^{-\alpha t}\left[\frac{\alpha^2}{w} + w\right] \sin wt}$$

מסתבר שיש הפרש פזה בין הזרם והמתח. לכן, במעגל זה $I \neq \frac{V}{R}$

כאשר R – הוא התנגדות הנגד.

נוכל להגדיר התנגדות מרוכבת המתאימה למעגל.

התנודות מרוסנות ולכן האמפליטודה יורדת ל – 0.

נניח T – זמן מחזור של התנודות. :

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

במקרה – $\alpha T \ll 1$

קיים בקירוב: $e^{-\alpha t} \approx const = e^{-\alpha t_1}$

במשך: $t_1 \leq t \leq t_1 + T$

ואז למעשה הריסון חלש ביותר.

(ג) <u>גורם האיכות של המעגל</u>

האנרגיה בשדה מגנטי של סליל:

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L I^2$$
$$W_{mag(max)} = \frac{1}{2} L V_0^2 e^{-2\alpha t} w^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{w^2}\right)^2$$

$$\alpha T = \frac{\alpha 2\pi}{w} \ll 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{w} \ll 1$$

כזכור:
$$w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2} = w_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{w_0^2}}$$

כאשר w_0 היא תדירות המעגל בו אין ריסון.

לכן:
$$W_{mag(max)} = \frac{1}{2} V_0^2 e^{-2\alpha t} L C^2 w^2 =$$
$$= \frac{1}{2} V_0^2 e^{-2\alpha t} L C^2 \cdot \frac{1}{LC} = \frac{1}{2} V_0^2 e^{-2\alpha t} \cdot C$$

קבלנו ירידת אנרגיה ברציפות בגלל ההזנחה תוך החישובים. למעשה – במשך רבע מחזור יש מעבר אנרגיה מגנטית לאלקטרוסטטית וברבע הבא - האנרגיה חוזרת להיות מגנטית.

הירידה באנרגיה היא בגלל אנרגיה שהופכת לחום על הנגד בשלב בו האנרגיה בצורה האלקטרוסטטית.

$$\frac{\text{אנרגיה בסוף מחזור}}{\text{אנרגיה בתחילת המחזור}} = e^{-2\alpha T}$$

כאשר:
$$R = 0 \Rightarrow e^{-2\alpha T} = 1$$

Q יוגדר בתור גורם האיכות של המעגל.

$$Q \stackrel{D}{=} \frac{\text{אנרגיה במעגל}}{\text{אבוד אנרגיה במחזור}} \cdot 2\pi$$

הדיון הוא לגבי מעגלים בהם: $\alpha T << 1$ ולכן האיבוד קטן יחסית.

לכן Q קבוע לאורך הזמן למרות שינויי האנרגיה במעגל.

וקיים:

$$R \to 0 \Rightarrow Q \to \infty$$

נחשב את Q:

$$Q = \frac{2\pi W}{W - We^{-2\alpha T}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\alpha T}} = \frac{2\pi}{2\alpha T}$$

לפי פיתוח לטור:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \Rightarrow e^{-x} \approx 1 - x$$

לגבי x קטן.

ז"א:

$$Q = \frac{\pi}{\alpha T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega 2L}{2R}$$

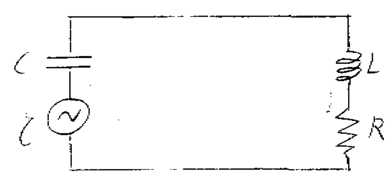
ולכן:

$$\boxed{Q = \frac{\omega L}{R}}$$

נמצא שאיכות המעגל עולה עם ההשראה העצמית וחדירותו ויורדת עם ההתנגדות.

(ד) <u>זרם חילופין - מעגל R.L.C מאולץ</u>

נתון המעגל:



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_1 t)$$

משואה המעגל היא:

$$\mathcal{E} = -\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} + RI$$

או:

$$\mathcal{E} + \frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} + RI$$

אחרי גזירה:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{\omega_1 \mathcal{E}_0}{L}\sin\omega_1 t$$

אחרי זמן - הפתרון הכללי של המשואה ההומוגנית דועך ונשאר הפתרון הפרטי של המשואה האי הומוגנית.

הפתרון העמיד יהיה בתדירות המתח החיצוני ובהפרש פזה קבוע

נחשב אותו:

ננחש פתרון -

$$I(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

אזי:

$$\frac{dI}{dt} = \omega_1 A\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega_1^2 A\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

נציב:

$$-\omega_1^2 A\sin(\omega_1 t+\varphi) + \frac{R}{L}\omega_1 A\cos(\omega_1 t+\varphi) + \frac{A}{LC}\sin(\omega_1 t+\varphi) = -\frac{\omega_1 \mathcal{E}_0}{L}\sin\omega_1 t$$

לפתרון המשואה ניתן להפריד סינוסים וקוסינוסים לפי:

$$\sin(\omega_1 t + \varphi) = \sin\omega_1 t\cos\varphi + \cos\omega_1 t\sin\varphi$$

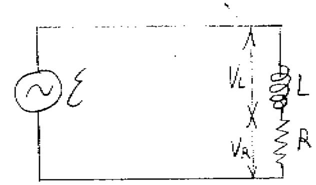
ולחשב את A ואת φ.

ניתן לפתור את המשואה ביותר קלות ע"י שימוש במס' מרוכבים.

(2) <u>שימוש במספרים מרוכבים לתאור אימפדנציות</u>

(א) <u>מעגל $R.L$ מאולץ</u>

נתון המעגל:



$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos\omega_1 t$$

משואת המעגל:

$$\mathcal{E}_0\cos\omega_1 t = RI + L\frac{dI}{dt}$$

נניח: $I = A\cos(\omega_1 t+\varphi)$

אזי: $\frac{dI}{dt} = -\omega_1 A\sin(\omega_1 t+\varphi)$

$$\mathcal{E}_0\cos\omega_1 t = AR\cos(\omega_1 t+\varphi) - L\omega_1 A\sin(\omega_1 t+\varphi)$$

מכאן:

$$I = A\cos(\omega_1 t+\varphi)$$
$$V_R = RI = RA\cos(\omega_1 t+\varphi)$$
$$V_L = -L\frac{dI}{dt} = L\omega_1 A\sin(\omega_1 t+\varphi)$$

קיים הפרש פזה של $\pi/2$ בין הזרם והמתח על הסליל. על מנת לייצג את ההפרש אפשר להשתמש במספרים מרוכבים.

במקרים שונים מצאנו שקיים החוק - $V_R = IR$
בניגוד למעגל זה שבו לא מתקיים החוק.

נחפש R אנלוגי להתנגדות הרגילה במקרה הזה.

השפעת ההשראה על המתח (ועל הזרם):

במעגל בו יש השראה: $V_L = L\frac{dI}{dt}$

נניח: $I = I_0\cos(\omega_1 t+\varphi)$

אזי: $V_L = -LI_0\omega_1\sin(\omega_1 t+\varphi)$

המתח משיג את הזרם ב $\pi/2$ - רבע מחזור.

ז"א:

$$V_L = LI_0\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi+\pi/2)$$

(ב) <u>השפעת הקבל על הזרם:</u>

הקבל "גוזל" מתח מהמעגל:

כלומר המטען שעל הקבל מתפרק ולכן המתח במעגל יורד.

$$V_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I\,dt$$
$$I = I_0\cos(\omega_1 t+\varphi)$$

לכן:

$$V_C = \frac{1}{C}I_0\int\cos(\omega_1 t+\varphi)\,dt + a = \frac{I_0}{C\omega_1}\sin(\omega_1 t+\varphi)+a$$

(a - קבוע אינטגרציה.)

ממוצע המתח על פני מחזור הוא – 0 ולכן נקבל $a = 0$

ז"א: $V_C = \frac{1}{C\omega_1}I_0\cos(\omega_1 t+\varphi-\pi/2)$

סיכום:

א. סכום הזרם בצומת הוא – 0.

ב. המתח במעגל – סכום המתחים הרגעיים.

ג. בחיבור במקביל של התנגדויות: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$

ולכן – אותו החוק לגבי אימפודנצים: $\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}$

ד. בחיבור בטור: $Z=Z_1+Z_2$

---

(3) **חשובי אנרגיה:**

$$P=\mathcal{E}I=\mathcal{E}_0\cos(\omega_1 t)\,I_0\cos(\omega_1 t-\varphi)$$

נגדיר הספק ממוצע למחזור:

$$\bar{P}\overset{\Delta}{=}\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$

אזי:

$$\bar{P}=\frac{I_0\mathcal{E}_0}{T}\int_0^T\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_1 t-\varphi)\,dt$$

קיים:

$$\cos(\omega_1 t-\varphi)=\cos\omega_1 t\cos\varphi+\sin\omega_1 t\sin\varphi$$

כמו כן קיים:

$$\int_0^T\cos\omega_1 t\,\sin\omega_1 t\,dt=0$$

ולכן:

$$\bar{P}=\frac{I_0\mathcal{E}_0}{\omega_1 T}\cos\varphi\int_0^T\omega_1\cos^2(\omega_1 t)\,dt=$$

$$=\frac{I_0\mathcal{E}_0}{2\pi}\cos\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}I_0\mathcal{E}_0\cos\varphi$$

ז"א:

$$\boxed{\bar{P}=\frac{1}{2}I_0\mathcal{E}_0\cos\varphi}$$

$P=0 \Leftarrow \varphi=90^\circ$. במעגל כזה אין איבוד אנרגיה ולכן

ההספק הממוצע הוא – 0.

(4) **מעגלי תהודה**

I_0 היא האמפליטודה של הזרם.

כאשר I_0 מכסימלי:

$$\max I_0 \Rightarrow \omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}=0$$

ז"א:

$$\omega_1 L=\frac{1}{\omega_1 C}\Rightarrow \omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0$$

כאשר התדירות המאלצת **שווה** לתדירות העצמית של המעגל הבלתי מרוסן – נקבל אמפליטודה מכסימלית.

$$\bar{P}(\omega_1)=\frac{1}{2}I_0\mathcal{E}_0\frac{1}{(1+\tan^2\varphi)^{1/2}}=$$

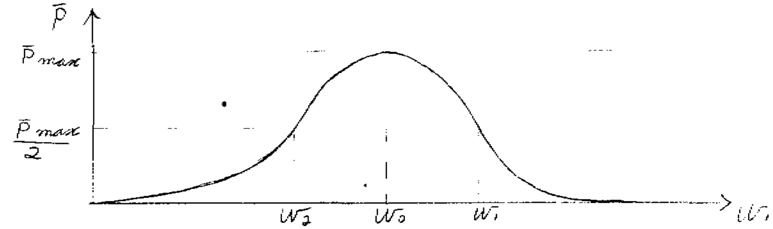
$$=\frac{I_0\mathcal{E}_0}{2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}}$$

וכשם שקבלנו לגבי I_0 מתקיים:

$$\max\bar{P}\Leftrightarrow\omega_1=\omega_0$$

ההספק המכסימלי יתקבל כאשר תדירות המעגל תהיה התדירות העצמית – ω_0

הגרף $\bar{P}-\omega_1$ יהיה:



ככל שהעקומה צרה – המעגל סלקטיבי בברירת התדירות עליה הוא מגיב.

תדירות חצי ההספק:

$$\frac{\bar{P}_{max}}{2} \Rightarrow R^2 = \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2$$

$$\pm R = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}$$

ולכן:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \\ \omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega \end{cases}$$

הן התדירויות בהן למעגל תהיה חצי מההספק המכסימלי.

אנו מתענינים במעגלים בהם $\omega_0 \gg \Delta\omega$ לכן:

$$\pm R = [\omega_0 + \Delta\omega]L - \frac{1}{(\omega_0 + \Delta\omega)C} =$$

$$= [\omega_0 + \Delta\omega]L - \frac{1}{\omega_0 C}\left(1 - \Delta\omega/\omega_0\right) =$$

(לפי פיתוח לטור)

$$= \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} + \Delta\omega\left[L + \frac{1}{\omega_0 C}\right]$$

קיים: $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$

$$\pm R = \Delta\omega/\omega_0 \cdot \left(\omega_0 L + \frac{1}{\omega_0 C}\right) = \Delta\omega/\omega_0\left(\frac{L}{\sqrt{LC}} + \frac{\sqrt{LC}}{C}\right) =$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot 2 = 2L\omega_0 \cdot \Delta\omega/\omega_0$$

ולכן:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{R}{2\omega_0}$$

גורם האיכות של המעגל:

$$Q = \frac{\omega_0}{R}$$

ולכן:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{2Q}$$

ככל שגורם האיכות גדול $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ קטן והמעגל סלקטיבי.

גורם האיכות נותן גם את כושרו של המעגל להגיב למתח היצוני, כאשר הוא נותן את חדות עקומת הרזוננס.

פרק ד': שדה מגנטי בחומר

(1) דיאמגנטיה ופרמגנטיות

חומרים שונים מגיבים בצורה שונה בקרבה לשדה מגנטי.

חומרים דיאמגנטיים נדחים מתוך שדה מגנטי.

חומרים פרמגנטיים נמשכים לתוך שדה מגנטי.

חומרים פרומגנטיים נמשכים לתוך השדה אך כח המשיכה גדול בכמה סדרי גודל מהכח הדומה בחומרים הפרמגנטיים.

העובדה הנסיונית מראה שכח הדחיה בחומרים הדיאמגנטיים מקיים:

$$\frac{F}{m} \sim B\frac{dB}{dz}$$

בלא תלות בכיוון השדה המגנטי.

בחומרים הפרמגנטיים, החומר נמשך לשדה החזק בלא תלות בכוון השדה וכח המשיכה מקיים:

$$\frac{F}{m} \sim B\frac{dB}{dz}$$

ואילו בחומרים הפרומגנטיים כח המשיכה מקיים:

$$\frac{F}{m} \sim \frac{dB}{dz}$$

העובדות הנסיוניות הללו נכונות בתנאים רגילים: טמפ. החדר, ושדות בסדר גודל של מעבדה - $10^4\,gauss$

להסבר התופעות ננסה למצוא מודל אטומי מתאים.

כזכור - סביב זרם או בסלילים בהם עובר זרם $div\,B=0$ באשר אין מטענים מגנטיים.

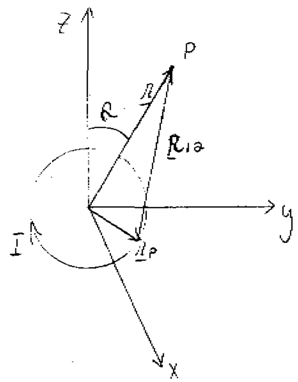
השאלה - אם בחומר מגנטי יש מטענים?

מסתבר מהוכחות נסיוניות שגם בחומר אין מטענים מגנטיים ז"א החוק נשמר.

עוד לפני כ - 150 שנה הניח החוקר אמפר שמגנטיות החומר היא בגלל זרמים בתוכו. על כך נבסס את המודל שלנו.

(2) מומנט הדיפול של לולאת זרם

נתונה לולאת זרם. נחשב את השדה במרחק גדול מהלולאה.



הלולאה במישור (x,y)

P - נק' במישור

ראשית הצירים - במרכז הלולאה.

r - וקטור מהראשית לנק' P

הפוטנציאל הוקטורי:

$$A(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{c}\int\frac{J(x_2,y_2,z_2)}{r_{12}}\,dv_2 =$$

$$= \frac{I}{c}\oint\frac{ds_2}{r_{12}}$$

לכן:

$$r_p + r_{12} = r$$

$$r_{12}^2 = r^2 + r_p^2 - 2\,r\,r_p$$

קיים: $r_p \ll r$

ולכן:

$$r_{12}^2 = r^2\left[1 - \frac{2\,r\,r_p}{r^2}\right]$$

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2\,r\,r_p}{r^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r\,r_p}{r^2}\right)$$

(ע"י פיתוח לטור)

לכן:

$$\underline{A} = \frac{I}{c}\cdot\frac{1}{r}\oint d\underline{s}\left(1+\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}_P}{r^2}\right)$$

כאשר:

$$\underline{r} = y_1\underline{j} + z_1\underline{k}$$
$$\underline{r}_P = x_2\underline{i} + y_2\underline{j}$$
$$d\underline{s} = \underline{i}\,dx_2 + \underline{j}\,dy_2$$

לכן:

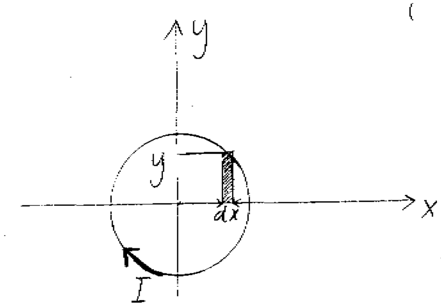
$$\underline{r}\cdot\underline{r}_P = y_1 y_2$$

$$\underline{A} = \frac{I}{cr}\oint d\underline{s} + \frac{I}{cr^3}y_1\oint y_2\,d\underline{s}$$

ולכן: $\oint d\underline{s} = 0$

$$A = Iy_1/cr^3\cdot\oint y_2(dx_2\,\underline{i} + dy_2\,\underline{j}) = \frac{Iy_1}{cr^3}\oint y_2\,dx_2\,\underline{i}$$

(באשר: $\oint y\,dy = 0$)



קיים: $\oint y\,dx = a$

כאשר a - שטח הלולאה.

(הזרם הוא בכיוון מהמטי שלילי, לכן נקבל את a בסימן חיובי)

ולכן:

$$\underline{A} = \frac{Iy_1}{cr^3}\,a\,\underline{i}$$

θ היא הזוית בין z ו r. לכן:

$$\underline{A} = \frac{1}{cr^2}\sin\theta\,a\,\underline{i}$$

וקטור השטח יהיה: $\underline{a} = -\underline{k}\,a$

(בסימן שלילי - כי הזרם בכוון שלילי)

ולכן:

$$\underline{A} = \frac{I}{cr^2}\,\underline{a}\times\hat{\underline{r}}$$

נגדיר וקטור $\underline{m}$:

$$\boxed{\underline{m} \equiv \frac{I\underline{a}}{c}}$$

אזי:

$$\underline{A} = \frac{1}{r^3}\,\underline{m}\times\underline{r}$$

כאשר:

$$\underline{r} = y\underline{j} + z\underline{k}$$

כיוון m הוא לכוון z - ז"א: $\underline{m} = m\underline{k}$

ולכן:

$$A_x = -\frac{1}{r^3}my$$
$$A_y = \frac{1}{r^3}mx$$
$$A_z \equiv 0$$

כאשר: $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

$$\underline{B} = \mathrm{curl}\,\underline{A}$$

לכן:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{mx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{my}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{2m}{r^3} + \frac{mx(-3/2)2x}{r^5} + \frac{my(-3/2)2y}{r^5} =$$

$$= \frac{2m}{r^3} - \frac{3mx^2}{r^5} - \frac{3my^2}{r^5} =$$

$$= \frac{2m}{r^3} - \frac{3m}{r^5}(x^2+y^2+z^2) + \frac{3mz^2}{r^5}$$

$$= \frac{m}{r^5}(3z^2 - r^2)$$

ומכאן:

$$B_z = \frac{m}{r^5}(3z^2 - r^2)$$

ובאופן דומה נחשב:

$$B_x = \frac{3mx^3}{r^5}$$

$$B_y = \frac{3my^3}{r^5}$$

זהו שדה הזהה לשדה של דיפול חשמלי בגודל m, באשר:

$$\frac{x}{r} = \sin\alpha$$

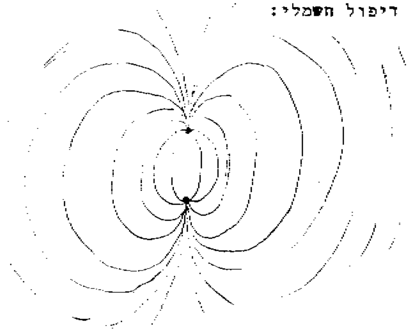
$$\frac{z}{r} = \cos\alpha$$

ולכן:

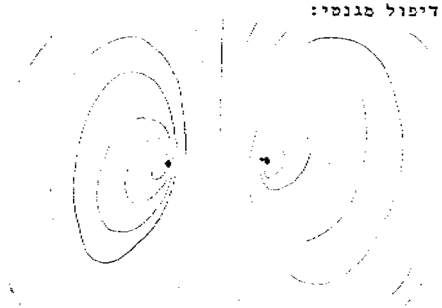
$$B_x = \frac{3m\sin\alpha\cos\alpha}{r^3}$$

$$B_z = \frac{m}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1)$$

שדה של דיפול חשמלי:



שדה של דיפול מגנטי:



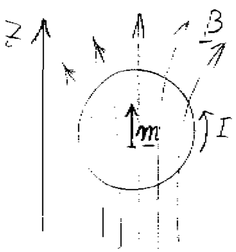
קל לראות שרחוק מהדיפול – השדות זהים. קרוב לדיפול – השדות שונים לחלוטין.

(3) <u>הכח על לולאת זרם בשדה מגנטי:</u>

נתונה לולאה ניצבת לשדה.

השדה אינו הומוגני אלא מתבדר.

r – רדיוס הטבעת.



$$m = \frac{Ia}{c}$$

כח לורנץ:

$$dF = \frac{I}{c}\, dl \times B$$

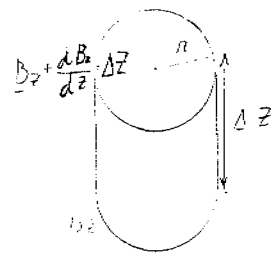
המרכיב הניצב לטבעת של B גורם לכח רדיאלי המותח את הטבעת ולכן ס"ה הכח על הטבעת מתאפס.

המרכיב הרדיאלי של B גורם לכח כלפי מטה בכוון $-z$

$$F = -\hat{k}\,\frac{I}{c}\cdot 2\pi r B_r$$

נחשב את B_r כפונקציה של $\frac{dB_z}{dz}$

נתון גליל בגובה Δz וברדיוס $-r$



השטף דרך הגליל הוא - 0. $\Leftrightarrow$ $div\, B = 0$

השטף הנכנס: $\Phi_{in} = \pi r^2 B_z$

השטף היוצא:

$$\Phi_{out} = \pi r^2 \left(B_z + \frac{dB_z}{dz}\Delta z\right) + 2\pi r \Delta z B_r$$

סה"כ השטף: $\phi \cdot \Phi_{in} - \Phi_{out} = 0$

ולכן:

$$\frac{dB_z}{dz}\Delta z\, \pi r^2 = -2\pi r \Delta z B_r$$

$$B_r = -\frac{1}{2} r \frac{dB_z}{dz}$$

ולכן:

$$F = -\hat{k}\cdot \frac{I}{c}\cdot 2\pi r\cdot \frac{1}{2} r \frac{dB_z}{dz} =$$

$$= \frac{I}{c}\cdot \pi r^2 \frac{dB_z}{dz} = m\frac{dB_z}{dz}\hat{k}$$

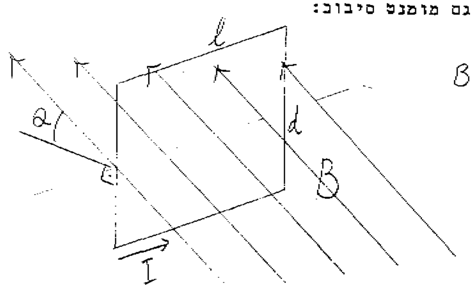
(התוצאה היא שלילית כנדרש כי $dB_z < 0$.)

כאשר:

$$m = \frac{I\pi r^2}{c}$$

על הלולאה פועל כח רק אם B איננו הומוגני כאשר הכח הוא מכפלת המומנט המגנטי בגרדיינט השדה.

על לולאת זרם בשדה מגנטי פועל גם מומנט סיבוב:



נתונה לולאת זרם ושדה B

הזוית בין הניצב ללולאה ובין השדה. α

כוחות לורנץ הפועלים יהיו:

על הצלע העליונה:

$$F = \frac{B \times l}{c} I$$

וכיוונו - כלפי מטה.

על הצלע התחתונה:

$$F = \frac{B \times l}{c} I$$

וכיוונו - כלפי מעלה.

בשדה הומוגני שני הכוחות מתקזזים.

המומנט של הכוחות יהיה:

$$N = 2\frac{BlI}{c}\frac{d}{2}\sin\alpha$$

ז"א:

$$N = \frac{BldI}{c}\sin\alpha$$

שטח הלולאה: $a = l\,d$

המומנט המגנטי שלה:

$$m = \frac{l d I}{c}$$

ולכן:

$$N = B \cdot m \sin\theta$$

ובצורה וקטורית:

$$\underline{N} = \underline{m} \times \underline{B}$$

כזכור בדיפול החשמלי קבלנו:

$$\underline{N} = \underline{P} \times \underline{E}$$

יחידות המומנט:

$$[m] = \frac{cm^2 \cdot e.s.u}{sec \cdot cm/sec} = e.s.u \cdot cm$$

ואילו אמנם ממדי דיפול.

<u>כיווני המשיכה:</u>

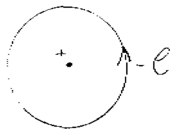
אם $\underline{m} \parallel \underline{B}$ נקבל משיכה לכיוון השדה החזק.

אם $\underline{m}$ אנטי מקביל ל - $\underline{B}$, תהיה דחיה מהשדה החזק.

ולכן על מנת להסביר את התופעות של אינטראקציה של שדה מגנטי עם חומר נצפה למומנט מגנטי אנטי מקביל בחומרים דיאמגנטיים, ולמומנט מגנטי מקביל בחומרים פרמגנטיים.

---

(4) המומנט המגנטי של האטום כלולאה זרם



תקיפת הסיבוב של האלקטרון:

$$\underline{J} = m_e w r_e$$

כאשר: $w = \frac{2\pi}{T}$

הזרם: $I = -\frac{e}{T} = -\frac{ew}{2\pi}$

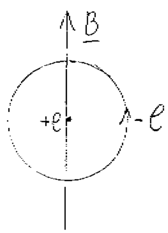
והמומנט המגנטי:

$$\underline{m} = \frac{aI}{c} = \pi r^2\left(-\frac{ew}{2\pi c}\right) = -\frac{e w r^2}{2c}$$

ולכן:

$$\boxed{\underline{m} = -\frac{e}{2m_e c}\underline{J}}$$

וקיים - $\underline{m} \parallel \underline{J}$. בחומר מקרוסקופי לא מקוטב - הממוצע על כל הכוונים נותן אפס.



נפעיל שדה $\underline{B}$ בכוון ניצב ללולאת הזרם.

לפי חוק פרדיי - נוצר כאמ מושרה - $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \oint \underline{E}\, ds = 2\pi r \underline{E}$$

(נניח כרגע שהרדיוס נשאר קבוע).

כאשר $\underline{E}$ - השדה החשמלי המושרה המשיקי.

$$\Phi = \pi r^2 \underline{B}$$

ולכן: $$-\frac{\pi r^2}{c}\frac{dB}{dt} = 2\pi r E$$

$$E = -\frac{r}{2c}\frac{dB}{dt}$$

E - הוא השדה המושרה.

קיים: $$F = -eE$$

ובמשך Δt , E מקיים:

$$F\Delta t = m_e \Delta v$$

לכן:

$$\Delta v = \frac{F\Delta t}{m_e} = \frac{-eE}{m_e}\Delta t = -\frac{e}{m_e}\left(-\frac{r}{2c}\Delta B\right)$$

ז"א

$$\Delta v = \frac{er}{2m_e c}\Delta B$$

קיים:

$$m = -\frac{e}{2m_e c} m_e r v$$

ולכן:

$$\Delta m = -\frac{er}{2c}\Delta v = -\left(\frac{er}{2c}\right)^2 \frac{1}{m_e}\Delta B$$

ז"א – התוספת לדיפול היא:

$$\boxed{\Delta m = -\left(\frac{er}{2c}\right)^2 \frac{\Delta B}{m_e}}$$

מקבלים מומנט מגנטי מושרה שכיוונו מנוגד לכוון השדה. ככל שהשדה המגנטי גדל – המומנט המגנטי המושרה בכוון מנוגד גדל.

הכח הצנטרפוגלי הוא: $$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

כאשר v משתנה ל - $v+\Delta v$

מקבלים:

$$\Delta F_c = \frac{m_e}{r}\left[(v+\Delta v)^2 - v^2\right] = \frac{2m_e v\Delta v}{r}$$

כח לורנץ הפועל שמנסה למשוך את החלקיק למרכז המעגל:

$$F_L = \frac{e}{c} v\Delta B$$

כאשר השינוי ב v הוא ב - $+\Delta v$:

$$\Delta B = \frac{2m_e c}{er}\Delta v$$

ולכן: $$F_L = \frac{e}{c} v\cdot\frac{2m_e c}{er}\Delta v = \frac{2m_e v\Delta v}{r}$$

ז"א: $$|F_L| = |F_c|$$

וקיים: $$F_L = -F_c$$

הכוחות שקולים ומנוגדים, ולכן הרדיוס באמת נשאר קבוע.

רדיוס קבוע הוא דבר מחויב לצורך חישוב המומנט שעשינו.

כמו כן עלינו להראות ש: $\Delta v << v$ ז"א $\frac{\Delta v}{v} << 1$

ע"י בדיקה מספרית קל לראות שבאטום המימן, בשדה של 10^4 gauss קיים:

$$\frac{\Delta v}{v} \sim 10^{-5}, 10^{-6}$$

וזה תואם את הנדרש.

מכאן: בחומרים דיאמגנטיים נוצר מומנט מגנטי מושרה נגד כוון השדה ולכן קיימת דחיה מהשדה החזק.

בחומרים הפרמגנטים נצפה למצוא תופעה אחרה המכסה בחוזקה את כח הדחיה.

הערה:

א. פתחנו קשר בין מומנט מגנטי ובין תנועה מסילתית:

$$\underline{m} = -\frac{e}{2m_e c}\,\underline{J}$$

כאשר $\underline{J}$ הוא וקטור התקיפה הסיבובית. הקשר הוא כללי אך עם סייג - היחס משתנה לחלקיקים שונים.

ב. אנו רואים ש - $\Delta \underline{m}$ אנטי מקביל ל - $\Delta \underline{B}$.

לפי הקשר:

$$\Delta \underline{m} = -\left(\frac{e r}{2c}\right)^2 \frac{1}{m_e}\,\Delta \underline{B}$$

עקב האנטי-מקבילות נוצר כח הדחיה ולכן הדיאמגנטיות.

ג. התיחסנו אל האטום כאל לולאה זרם בה $I = -\frac{e}{T}$. לכן משך הזמן Δt בפיתוח צריך לקיים $\Delta t \gg T$.

ΔB הוא מס' הנקבע ע"י תנאי המעבדה. עלינו להתאים את היחס $\Delta B/\Delta t$ לגודל - T .

למשל - בהקרנה בקרני γ או X , Δt קטן מדי ולא קיימת האינטראקציה המוזכרת בין שדה מגנטי ולולאת זרם.

(סדר הגודל של T הוא $10^{-12}\,sec$).

דוגמא מספרית:

באטום מימן:

$$e = 4.8\times10^{-10}\ e.s.u$$
$$r = 0.5\times10^{-8}\ cm$$
$$c = 3\times10^{10}\ cm/sec$$
$$m_e = 10^{-27}\ gr$$
$$\Delta B = 10^{4}\ gauss$$

אחרי הצבה מקבלים:

$$\Delta m = 0.16\times10^{-25}$$

בגרם מימן יש בערך 3×10^{23} אטומים ולכן:

$$\Delta m \approx 0.5\times10^{-2}\ erg/gauss\cdot gr$$

בשדה לא הומוגני:

נניח:
$$\frac{dB}{dz} = 10^{3}\ gauss/cm$$

קיים:
$$F = m\frac{dB}{dz}$$

ונקבל:
$$F = 5\ dyne/gr$$

ואמנם - סדרי הגודל של כוחות הדחיה בהתאם לעובדות הנסיוניות הם $1\ dyne/gr$ עד - $100\ dyne/gr$ בתנאים אלו.

(5) מומנט עצמי של אלקטרון

סביר להניח שבחומרים פרמגנטיים יש אפקט נוסף - בכוון הפוך מהאפקט הדיאמגנטי.

בחומרים הדיאמגנטיים מצאנו קשר בין תקיפת הסיבוב במסילה ובין המומנט המגנטי.

מסתבר שלאלקטרון יש גם תקיפת סיבוב משל עצמו - בהסתובבו סביב עצמו.

לתקיפה זאת קוראים בשם "ספין" ומסמנים אותה ב - $\underline{S}$.

לכל אלקטרון יש מומנט מגנטי בגודל:

$$\mu_B = 0.93\times10^{-20}\ e.s.u/gauss$$

באשר:

$$\mu_B = \left(\frac{e h}{4\pi m_e c}\right)$$

h - הקבוע של פלנק.

בדר"כ - בחומר, האלקטרונים מסתדרים בזוגות בצורה אנטי מקבילה, ולכן השדה המגנטי השקול שלהם הוא - 0 , ולכן גם המומנט המגנטי העצמי השקול שוה ל - 0 .

במקרה וכל הזוגות מצומדים, נקבל מומנט שקול השווה ל - 0 ותהיה תופעת דיאמגנטיות.

במקרה שבו יש אלקטרון בודד המומנט השקול יהיה שונה מ - 0 ויש להתחשב בו.

יהי $\underline{m}$ - המומנט העצמי של האלקטרון.
$\underline{B}$ - שדה מגנטי חיצוני.

באלקטרוסטטיקה מצאנו שאנרגית האינטראקציה היתה:

$$U_P = -\underline{E}\cdot\underline{P}$$

באותו אופן. האנרגיה של מומנט מגנטי $\underline{m}$ בשדה $\underline{B}$ היא:

$$U_m = -\underline{B}\cdot\underline{m}$$

האלקטרון בשדה מגנטי יכול להיות מקביל לשדה או אנטי מקביל לו.
לא קיימים מצבי ביניים. (אפקט קוונטי) נגדיר:

P^+ - ההסתברות למצב מקביל
P^- - ההסתברות למצב אנטי מקביל.

המומנט הממוצע של חומר שבו הרבה חלקיקים יהיה:

$$m_{av} = P^+m - P^-m$$

m_{av} - מומנט ממוצע בכוון השדה.

במקרה והשדה החיצוני $B=0$ אזי $P^+=P^-$ ולכן $m_{av}=0$

מתוך שיקולי אנרגיה ניתן להסיק:

$$B\neq 0 \Rightarrow P^+\neq P^-$$

זאת באשר:

בשיווי משקל תרמו דינמי, הסיכוי של מצב בעל אנרגיה E פרופורציוני ל - $e^{\frac{-E}{KT}}$
(כאשר K - הקבוע של בולצמן)

ז"א:

$$P(E) \sim e^{-E/KT}$$

לכן:

$$P^+ = \alpha e^{Bm/KT}$$
$$P^- = \alpha e^{-Bm/KT}$$

$$P^+ + P^- = \alpha\left(e^{\frac{Bm}{KT}} + e^{-\frac{Bm}{KT}}\right)$$

ברור שקיים: $P^+ + P^- = 1$

ולכן:

$$\alpha = \frac{1}{e^{\frac{Bm}{KT}} + e^{-\frac{Bm}{KT}}}$$

($K = \frac{R}{N_0}$ כאשר R קבוע הגזים , N_0 - מס' אבוגדרו)

בטמפ. החדר:

$$KT \approx 0.4\times10^{-13}\ erg$$
$$m = \mu_B = 0.93\times10^{-20}$$

ועבור $B = 10^4\ gauss$
נקבל

$$mB \approx 10^{-16}\ erg$$

ז"א:

$$mB \ll KT$$

לכן:

$$e^{\frac{mB}{KT}} \approx 1 + \frac{Bm}{KT}$$
$$e^{-\frac{mB}{KT}} \approx 1 - \frac{Bm}{KT}$$

ולכן:

$$\alpha \approx \frac{1}{2}$$

ז"א:

$$P^{+} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{Bm}{KT}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{Bm}{KT}\right)$$

$$P^{-} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{Bm}{KT}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{mB}{KT}\right)$$

ולכן:

$$P^{+} - P^{-} = \frac{Bm}{KT}$$

ולכן:

$$m_{av} = |m|\,\frac{Bm}{KT}$$

הכוון של m_{av} הוא כוון השדה כי P^{+} מועדף על P^{-}.

בצורה אנלוגית – ניתן להגיע בחשמל לתוצאה:

$$P_{av} = |P|\,\frac{EP}{KT}$$

P_{av} – המומנט השקול בכוון השדה.

הפיתוח לגבי m_{av} אינו נכון בטמפ. נמוכות או בשדה $\underline{B}$ חיצוני גדול מאוד.

נציב:

$$B = 10^{4}\ gauss$$

$$\frac{dB}{dz} = 10^{3}\ gauss/cm$$

T – טמפ. החדר

$$m = \mu_B$$

ונקבל:

$$\underline{F} = m_{av}\frac{dB}{dz} \approx 5000\ dyn/gr$$

זהו כח משיכה הגדול בכמה סדרי גודל מכוחות הדחיה הדיאמגנטיים. לכן, בחומרים פרמגנטיים הפרמגנטיות מתגברת על הדיאמגנטיות.

הערות:

א. בבנית המודל לדיאמגנטיות הנחנו מראש שהמומנט מקביל או אנטי מקביל לשדה, ז"א השדה ניצב ללולאת הזרם. לא הנחנו ש $\underline{J}$ בכוון מסוים ביחס ל $\underline{B}$ ואת הכוונים קבלנו משיקולי אנרגיה.

ב. בחישוב המומנט העצמי השקול שתפנו שיקולי סטטיסטיקה במסגרת המודל שבנינו ובמעבר לגדלים מאקרוסקופיים, הרי זה משתלב עם השיקולים הפיסיקליים.

ג. האפקט הפרמגנטי תלוי במצבו של החומר – בהמצאות אלקטרון בודד. לכן התופעה משתנה בתרכובות שונות של אותו יסוד.

סיכום:

מומנט מגנטי של אלקטרון בודד, עקב תנועתו המסילתית:

$$\underline{m} = -\frac{e}{2m_e c}\,\underline{J}$$

אך בממוצע על החומר זה אפס.

שינוי המומנט עקב שדה חיצוני:

$$\Delta \underline{m} = -\left(\frac{er}{2c}\right)^{2}\frac{1}{m_e}\,\Delta\underline{B}$$

(וזה לא מתאפס בממוצע על החומר)

המומנט הממוצע עקב המומנט העצמי של האלקטרונים:

$$m_{av} = |m|\,\frac{Bm}{KT}$$

כאשר: $m = \mu_B$

(6) חומר מאקרוסקופי מקוטב מגנטי

נתונה קובית חומר זעירה (שטח הבסיס – לא פחות מ – $a = 10^{-6}\,cm^{2}$)

לגביה קיים: $\underline{m} = \frac{Ia}{c}$

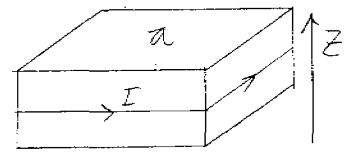
M – הדיפול המגנטי ליח' נפח.

לכן – אם גובה הקוביה – dz נקבל:

$$m = M\,a\,dz$$

$$I = \frac{c\,m}{a}$$

ולכן:
$$I = \frac{c\,\mathcal{M}\,da\,dz}{da} = c\,\mathcal{M}\,dz$$



ז"א: ניתן להתיחס לקובית החומר כאל לולאה זרם שמקיפה את הלולאה.

הדיפול המגנטי של החומר אקויולנטי לדיפול המגנטי של לולאת הזרם.

אם נתונה דסקית חומר בגובה - dz מתיחסים אליה כאל ציבור של קוביות ולכן ניתן להתיחס אליה כאל לולאת הזרם השקולה, שהיא מסביב לדיסקיה.

המומנט המגנטי של הדסקיה יהיה שווה למומנט המגנטי של לולאת זרם מסביבה, כאשר:
$$I = c\,\mathcal{M}\,dz$$

נגדיר וקטור $\underline{J}$:
$$\underline{J} \triangleq \frac{I}{dz} = c\,\underline{\mathcal{M}}$$

ל - $\underline{J}$ משמעות של זרם ליח' אורך על כל רוחב הדיסקית.

היחידות תהיינה:

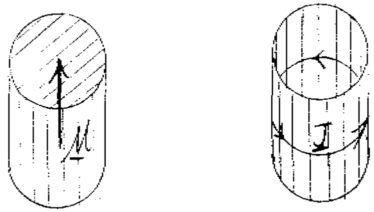
$$[\mathcal{M}] = e.s.u/cm^2$$
$$[c] = cm/sec$$

ולכן:
$$[\underline{J}] = [c\,\underline{\mathcal{M}}] = e.s.u/cm\,sec$$

קבלנו קשר בין חומר במיגנוט הומוגני ובין זרם משטחי.

במקרה ויש חומר ממוגנט הומוגני עבה - ז"א אוסף של דסקיות.

מתוך $div\,B = 0$: החומר אקוויולנטי לצינור זרם בעל מעטפת זהה. השדה הממוצע בתוך החומר ניתן לחישוב ע"י השדה בתוך הצינור האקויולנטי.



צינור זרם אקוילנטי. — גוש חומר ממוגנט

הערה: כל הדיון עד כאן - לגבי $\mathcal{M}$ קבוע - ז"א מגנוט הומוגני.

במקרה והמגנוט לא הומוגני:

באלמנט נפח קיים: $dm = \mathcal{M}\,dv$

הפוטנציאל הוקטורי:
$$\underline{A} = \int \frac{dm \times r}{r^3} = \int_{\text{במרחב}} \frac{\mathcal{M} \times r}{r^3}\,dv$$

ובפירוט: r מ-1 ל-2, אזי:
$$\underline{A}_1 = \int \frac{\mathcal{M}_2 \times r}{r^3}\,dv_2$$

כמו כן - כאשר ישנם זרמים:
$$\underline{A}_1 = \frac{1}{c}\int \frac{J_2}{r}\,dv_2$$

נרצה להציג את המומנט המגנטי בעזרת זרם אקוויולנטי.

נסמן: j_{bound} - זרם אקוויולנטי קשור.

כזכור - באלקטרוסטטיקה קבלנו:

$$div\, \underline{P} = -\rho_{bound}$$

כמו כן קיים:

$$\frac{\underline{M}_2 \times \underline{r}}{r^3} = -\underline{M}_2 \times \underline{\nabla}_1 \left(\frac{1}{r}\right) = \underline{M}_2 \times \underline{\nabla}_2 \left(\frac{1}{r}\right)$$

(ע"י שינוי נק' הגזירה לגרדיינט)

נקל לראות:

$$\underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{M}}{r}\right) = (\underline{\nabla} \times \underline{M}) \frac{1}{r} - \underline{M} \times grad \left(\frac{1}{r}\right)$$

ולכן;

$$\underline{M} \times \underline{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) = -\underline{\nabla} \times \frac{\underline{M}}{r} + (\underline{\nabla} \times \underline{M}) \frac{1}{r}$$

ולכן:

$$\underline{A}_1 = \int (\underline{\nabla} \times \underline{M}) \frac{1}{r} dv - \int \underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{M}}{r}\right) dv$$

במשטח גדול:

$$\int \underline{\nabla} \times \left(\frac{\underline{M}}{r}\right) dv = 0$$

ולכן:

$$A_1 = \int (\underline{\nabla} \times \underline{M}) dv$$

ומכאן התוצאה:

$$\boxed{j_{bound} = c\, curl\, \underline{M}}$$

קבלנו קשר בין הזרם האקוויולנטי הקשור לבין המומנט המגנטי במקביל ל $div\, \underline{P} = -\rho_{bound}$

אם נייחס זרם אקוויולנטי השוה ל - $c\, curl\, \underline{M}$ נקבל מיגנוט אקוויולנטי.

וקיים:

$$\underline{A} = \frac{1}{c} \int \frac{j_{free} + j_{bound}}{r} dv$$

נבדוק את היחידות:

$$[M] = e.s.u\ {}^{cm}/_{cm^3}$$

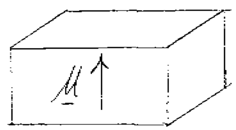
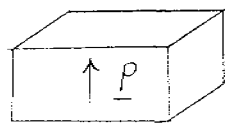
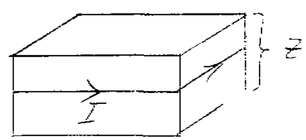
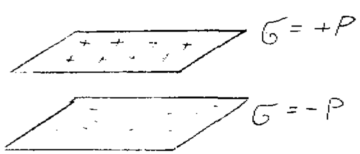
$$[curl\, \underline{M}] = e.s.u\ {}^{cm^2}/_{cm^3}$$

ואמנם:

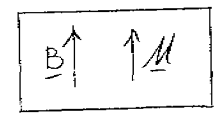
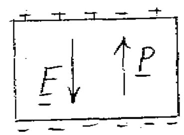
$$[\underline{j}] = [c\, curl\, \underline{M}] = e.s.u / cm^2 \cdot sec$$

כנדרש.

<u>השואה בין מיגנוט וקיטוב חשמלי</u>

מיגנוט	קיטוב חשמלי
 $\underline{M}$ - מומנט מגנטי ליח' נפח	 $\underline{P}$ - מומנט דיפול חשמלי ליח' נפח
אנלוגי לטבעת זרם סביב הגוף:  כאשר: $J = I/Z$, $J = \underline{M} c$ וזאת תוצאה שהתקבלה מחוק $div\, \underline{B} = 0$	אנלוגי לשני משטחים טעונים  השדה בחומר אקוויולנטי לשדה עקב שני הלוחות. זו תוצאה התלויה ב- $curl\, \underline{E} = 0$

השואה בין מיגנוט וקיטוב חשמלי (המשך)

מיגנוט	קיטוב חשמלי
כאשר $\underline{M}$ לא קבוע, תהיה צפיפות זרם אקוויולנטית: $\underline{J}_{bound} = \mathrm{Curl}\, \underline{M}$	כאשר $\underline{P}$ לא קבוע, המטען האקוויולנטי: $\rho_{bound} = -\mathrm{div}\, \underline{P}$
בתוך החומר:  על השפה – יש רציפות בשדה המגנטי. מכיון ש: $\mathrm{div}\, \underline{B} = 0$	בתוך החומר החומר:  השדה החשמלי הפוך בכוונו מהדיפול. לכן – אין רציפות בשדה הניצב על שפת החומר ולכן – $\mathrm{div}\, \underline{E} \neq 0$

(7) השדה $\underline{H}$

בנוכחות חומר קיים:

$$\mathrm{Curl}\, \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} = \frac{4\pi}{c}(\underline{J}_{free} + \underline{J}_{bound})$$

כאשר:

$$\underline{J}_{bound} = c\, \mathrm{Curl}\, \underline{A}$$

ל - J_{bound} יש משמעות של זרם ליח' שטח והוא האנלוגי ל - ρ_{bound} בקיטוב החשמלי. אין קשר בין J_{bound} לבין J_{free}.

בחשמל מצאנו:

$$\mathrm{div}\, \underline{D} = 4\pi \rho_{free}$$

נחפש קשר דומה בין וקטור האנלוגי ל - $\underline{D}$ לבין J_{free}.

נגדיר וקטור $\underline{H}$:

$$\underline{H} \stackrel{?}{=} \underline{B} - 4\pi \underline{M}$$

$\underline{H}$ מקיים:

$$\boxed{\mathrm{Curl}\, \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}_{free}}$$

בחשמל – בתנאי מעבדה יש לנו שליטה במטח,

ולכן בשדה החשמלי – באשר $\underline{E} = -\mathrm{grad}\, V$

לכן לא היתה חשיבות מעשית לשדה $\underline{D}$.

לעומת זאת במגנטיות – יש לנו שליטה בזרמים החופשיים ולא בזרמים הקשורים.

לכן הקשר בין $\underline{H}$ לבין הזרמים החופשיים חשוב לנו מאוד.

יחידות השדה $\underline{H}$:

$$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \underline{M}$$

ל - $\underline{H}$ מימד של שדה מגנטי.

נהוג לקרוא ליח' בשם: Oersted

כאשר: $1\,\mathrm{gauss} = 1\,\mathrm{oersted}$

$$[H] = \mathrm{dyn}/\mathrm{e.s.u} = \mathrm{Oersted}$$

קיימים מקרים בהם $\underline{M}$ פרופורציוני ל - $\underline{H}$.

$$\underline{M} = \chi_m \underline{H}$$

$$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi \chi_m \underline{H}$$

$$\underline{H}(1+4\pi\chi_m)=\underline{B}$$

נסמן: $$\mu=(1+4\pi\chi_m)$$

μ הוא מקדם החדירות המגנטית.

וקבלנו: $$\underline{H}\mu=\underline{B}$$

μ מזכיר את הגורם ε - בחשמל, שם קבלנו: $$\underline{D}=\varepsilon\underline{E}$$

$\underline{H}$ - מכונה בשם "שדה העזר" - אין לו משמעות פיזיקליה וערכו רק בעזרה בחישובים.

תכונות השדה $\underline{H}$

נתון מגנט קבוע - ברזל בעל תכונת מגנט.

קיים: $$J_{free}=0$$

ולכן: $$curl\,\underline{H}=0$$

נחפש את $div\,\underline{H}$

$$div\,\underline{H}=div\,\underline{B}-4\pi\,div\,\underline{M}$$

$$div\,\underline{B}=0$$

ולכן:

$$div\,\underline{H}=-4\pi\,div\,\underline{M}$$

כאשר $\underline{M}$ נתון ניתן למצוא את - $div\,\underline{H}$

באנלוגיה לאלקטרוסטטיקה:

נגדיר: $-\rho_m$ כצפיפות "מטען מגנטי"

ולכן: $$div\,\underline{H}=4\pi\rho_m$$

באשר: $$\rho_m=-div\,\underline{M}$$

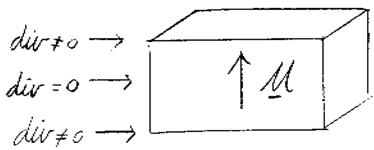
(אנו משתמשים בפיתוחים מתמטיים מתוך האלקטרוסטטיקה באשר $curl\,\underline{H}=0$
כזכור באלקטרוסטטיקה קיים: $\rho_{bound}=-div\,\underline{P}$ חשמלי).

ל- ρ_m אין משמעות של מטענים מגנטיים בודדים לכן אין סתירה להנחה היסודית שאין מטענים מגנטיים.

ל- $\rho_m=-div\,\underline{M}$ יש משמעות של סה"כ מטען על כל הנפח.

בהנתן גוש חומר מקוטב - בתוך החומר $div\,\underline{M}=0$

ועל השפה - $div\,\underline{M}\neq 0$



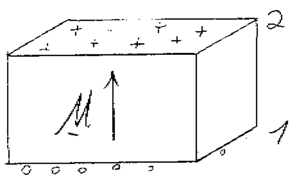
לכן ניתן לפתח תורת מגנטוסטטיקה האנלוגית לאלקטרוסטטיקה.

המתמטיקה של המגנטים הקבועים זהה למתמטיקה של החומרים המקוטבים אך עדיין נשמר שאין מטענים מגנטיים בודדים ותמיד - סה"כ המגנטיות על גוש חומר היא - 0.

אם נחתוך חומר מגנטי לשנים - כל חלק ישאר בעל דיפול מגנטי וסה"כ ה"מטען המגנטי" עליו ישאר - 0.

חוקי השבירה של שדות מגנטיים:

נתון חומר ממוגנט הומוגני:



$div\,\underline{M}\neq 0$ רק על השפה בגלל אי רציפות $\underline{M}$ שם.

וקיים: $-\,div(1) = div(2)$

לכן ההצגה בצורת דיפול.

מתוך $div\,\underline{B} = 0$ אנו מסיקים רציפות ב $- B\perp$.

מתוך $curl\,\underline{H} = 0$ אנו מסיקים רציפות ב $- H\parallel$.

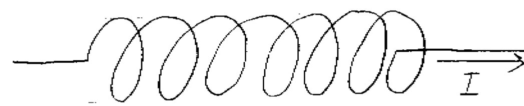
ואילו חוקי השבירה של השדות המגנטיים,
באנלוגיה מלאה לשדה החשמלי.

(8) <u>קבלת שדות חזקים במעבדה</u>

בקבלת שדות חזקים אנו נעזרים בעובדות:

1. $div\,\underline{B} = 0$
2. בחומרים פרומגנטיים $\mu \sim 3000$

נתון סליל:



ובו זרם.

סליל בגודל סביר בואקום נותן שדה של כ $-$ $100\ gauss$

וקיים:

$$\underline{H} = \underline{B} = 100\ gauss$$

נכניס מוט ברזל לתוך הסליל. $\underline{H}$ אינו משתנה מפני ש $\underline{H}$ תלוי בזרמים החופשיים
שאינם משתנים, אך: $\underline{B} = \mu\,\underline{H}$

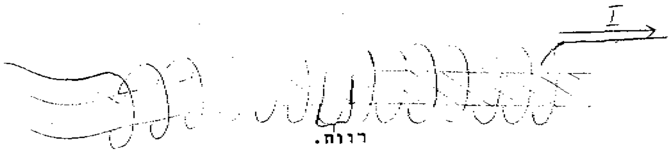
ולכן נקבל:

$$\underline{B} = 300{,}000\ gauss$$

אך זהו שדה בתוך הברזל $-$ לא במעבדה.

נוכל לחתוך את הברזל במרכזו $-$ לשני חלקים שביניהם רווח קטן.

div ולכן נצפה לרציפות השדה $- \underline{B}$ ולקבל ברוח שדה של 300,000
למעשה $-$ בגלל אפקטים שונים נקבל זהו חלש בהרבה.



רווח.

<u>דוגמא מעשית:</u>

נתון סליל דמוי כעך באויר.

הזרם $- I$

מס' הכריכות הכללי $- N_{tot}$

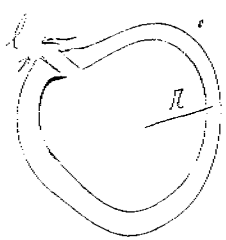
כאשר עובי הכעך קטן יחסית לרדיוס $- r$

$$curl\,\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J}_{free}$$

$$\oint \underline{H}\,d\underline{s} = 2\pi r\,\underline{H} = \frac{2\pi}{c}N_{tot}\,I$$

ולכן:

$$\underline{H} = \frac{2N_{tot}I}{rc}$$



נמלא את הטבעת בברזל אך נשאיר רווח $- l$.

הזרם נשאר קבוע ולכן גם השדה $\underline{H}$:

$$\oint \underline{H}\,d\underline{s} = H_i(2\pi r - l) + H_a\,l$$

כאשר H_i $-$ בחומר
H_a $-$ באויר.

בהנחה שהרווח קטן:

$$\mu\,\underline{H}_i = \underline{H}_a$$

לכן:

$$\frac{4\pi}{c} N_{tot} I = H_a l + \frac{H_a}{\mu}(2\pi r - l) =$$

$$= \frac{1}{\mu} H_a \left[\mu l + 2\pi r - l\right]$$

ולכן:

$$H_a = \frac{\frac{4\pi}{c} N_{tot} I \mu}{2\pi r - l + \mu l}$$

וזהו H באויר.

ז"א – לגבי l קטן – אחרי הכנסת הברזל H יגדל ל – H_a פי μ.

לגבי l שאינו קטן דיו – ההגדלה תהיה פחותה אך עדיין נקבל הגדלת השדה בצורה רצינית.

(9) <u>מושגים כלליים על פרומגנטיות</u>

העובדות הנסיוניות:

1. $F \sim \frac{dB}{dz}$

F אינו פרופורציוני ל – B

לכן אנו מסיקים:

m, M קבוע, בכיוון השדה. (כי קיימת משיכה). מודדים את עצמת הכח ומוצאים את ה – m של כל מולקולה. מסתבר שכל אטום תורם e אחד וכולם מקבילים.

2. בטמפ. גבוהות מעל לטמפ. קריטית אובדת תכונת הפרומגנטיות (בברזל $T_c = 770°C$).

$T > T_c$ ⇐ חומר פרומגנטי 1 חומר פרומגנטי הופך לחומר.

למעשה – חומר פרמגנטי היורד בטמפ. אחרי טמפ. קריטית מסוימת, עקרונית כל האלקטרונים מסתדרים במקביל ונהיית תופעת פרומגנטיות.

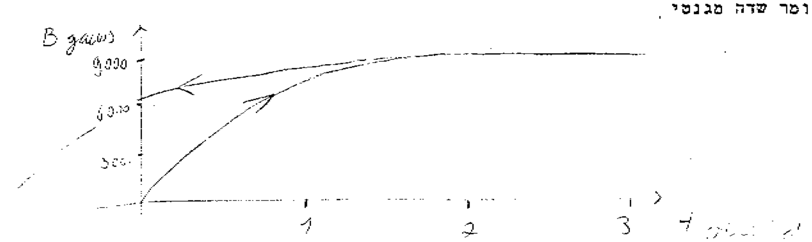
המודל לפרומגנטיות אומר שבתוך החומר – בחלקיקים שבהם קב׳ של כ – 10^{10} אטומים, כל המומנטים המגנטיים העצמיים של כל האטומים מסתדרים בכוון אחד.

מתוך תורת הקוונטים מסתבר שאמנם, בתנאים מסוימים, כאשר כל האלקטרונים בכוון מקביל יורדת האנרגיה האלקטרוסטטית של החומר, ולכן המצב הזה הוא מועדף.

אם מפעילים על החומר שדה מגנטי חיצוני. כל חלקיק כנ"ל מהווה דיפול ועל מנת להוריד את האנרגיה כל הדיפולים מסתדרים בכוון השדה, ונשארים כך גם כשמסלקים את השדה.

חופעת ההיסטרזיס:

נפעיל על חומר פרומגנטי שדה H ונבדוק את התלות בין H ובין השדה בחומר – B_m נקבל שעם העלאת השדה H – נגיע לרוויה בשדה B_m. בהורדת השדה H – ישאר בחומר שדה מגנטי.



ז"א – מצב השדה B_m בחומר תלוי ב"הסטוריה" שלו ולא רק בשדה H הפועל עליו בזמן מכוים.

לתופעה זאת – תלות ב"הסטוריה של החומר" קוראים "היסטרזיס".

על מנת להרוס את המיגנוט בחומר יש להכות עליו או לחמם אותו.

השיטה היעילה ביותר היא להפעיל על החומר שדה בכוון הפוך.

פרק ה': משואות מכסוול וגלים אלקטרומגנטיים

את האלקטרוסטטיקה סיכמנו במשואות:

$$\operatorname{div}\underline{E} = 4\pi\rho$$

באשר: $\underline{E} = -\nabla\varphi$

שימור מטען – $\operatorname{div}\underline{J} = -\frac{\partial\rho}{dt}$

כמו כן:

$$\operatorname{div}\underline{B} = 0$$

$$\operatorname{curl}\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$$

חוק ההשראה: $\operatorname{curl}\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$

בבחינה נוספת נראה שהמשואה $\operatorname{curl}\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$ אינה מדויקת.

קיים: $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\underline{B}) \equiv 0$

אך גם: $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\underline{B}) = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\underline{J}$

ישנם מקרים שבהם $\operatorname{div}\underline{J} \neq 0$

ולכן:

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\underline{J} + X = 0$$

כאמור: $\operatorname{div}\underline{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$

ולכן $X = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ הוא פתרון אפשרי.

ז"א:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\underline{B}) = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\underline{J} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\underline{E}$$

ולכן: $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\underline{B}) = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\underline{E} =$

$$= \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\underline{J} + \frac{1}{c}\operatorname{div}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}$$

וקבלנו את התוצאה:

$$\boxed{\operatorname{curl}\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}}$$

אין זאת הוכחה שהאיבר הנוסף אמנם צריך להיות במשואה -. אלא שהוספתו פותרת את הקושי שהתעורר.

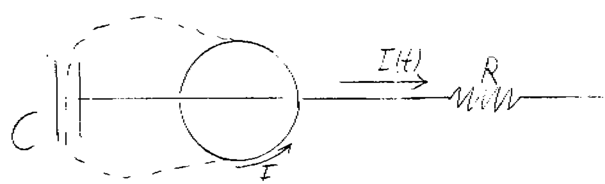
וקבלנו את הקשרים:

$$\operatorname{curl}\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{curl}\underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$$

נראה שאמנם חסר איבר במשואה: $\operatorname{curl}\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J}$

נתון חלק ממעגל בו קבל ולולאה המקיפה את החוט היוצא מאחד הלוחות.



$$\oint\underline{B}\cdot d\underline{s} = \int_C \operatorname{curl}\underline{B}\cdot d\underline{a}$$

C – משטח פתוח שנתחם ע"י הלולאה.

נבצע אינטגרציה על שטח הלולאה ונקבל:

$$\oint\underline{B}\,d\underline{s} = \frac{4\pi}{c}I$$

נבצע אינטגרציה על בלון שבתוכו חצי מהקבל.

אזי:

$$\oint \underline{B}\, d\underline{s} = 0$$

כי אין זרם דרך המשטח.

וזאת כמובן סתירה עם העובדה הנסיונית שהאינטגרל הוא $\frac{4\pi}{c} I$ – והיא המעידה על האיבר החסר.

משואות מכסול בואקום:

במקום שבו אין זרם:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{E} = 0 \\ \operatorname{div} \underline{B} = 0 \\ \operatorname{curl} \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \operatorname{curl} \underline{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

משואת הגלים האלקטרומגנטיים:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \underline{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E}$$

אך גם:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \underline{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{curl} \underline{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

לכן:

$$\boxed{\nabla^2 \underline{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0}$$

וזאת משואת הגלים האלקטרומגנטיים.

פתרון אפשרי למשואה:

$$\underline{E} = \underline{E}_y(x,t)\, \underline{j}$$

השדה בכיון y והוא תלוי ב – x ו – t.

בהצבה במשואה:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

צורת הפתרון תהיה:

$$E_y = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$$

c – מהירות האור.

ל – $f(x-ct)$ יש משמעות של פונקציה המקבלה אותו ערך ב – x_1, t_1 וב – x_2, t_2 בתנאי:

$$(x_1 - x_2) = c\,(t_1 - t_2)$$
$$\Delta x = c\,\Delta t$$

לכן המשואה מתארת התפשטות של תופעה גלית במהירות – c.

נספח: שיטת היח' בחשמל.

גודל	סמל	יח' ב- C.G.S	קשר לגדלים אחרים	יח' מעשיות - M.K.S	קשר בין היחידות
אורך	S	centimeter			
מסה	m	gram			
זמן	t	second			
מהירות	v	cm/sec	$v = ds/dt$		
תנע	P	gr·cm/sec	$P = mv$		
כוח	F	dyne	$F = dP/dt$		
עבודה, אנרגיה	W	erg	$W = \int F \cdot ds$	joule	1 joule = 10^7 erg
הספק	P	erg/sec	$P = dW/dt$	watt	1 watt = 10^7 erg/sec
מטען	q	e.s.u	$F = q^2/s^2$	coulomb	1 coul = 2.998×10^9 e.s.u
צפיפות מטען	ρ	e.s.u/cm^3	$q = \int \rho \, dv$		
זרם	I	e.s.u/sec	$I = dq/dt$	amper	1 ampere = 2.998×10^9 e.s.u/sec
צפיפות זרם	J	(e.s.u/sec)/cm^2	$I = \int J \cdot da$		
פוטנציאל חשמלי	φ	statvolt	$W = q(\varphi_2 - \varphi_1)$	volt	1 volt = $1/299.8$ statvolt
כח אלקטרומניע	$\mathcal{E}$	statvolt	$W = q\mathcal{E}$	volt	
שדה חשמלי	E	dyne/e.s.u	$F = qE$	volt/cm	
שדה מגנטי	B	gauss [= dyne/e.s.u]	$F = q(\frac{v}{c}) \times \underline{B}$		
התנגדות	R	sec/cm	$I = \mathcal{E}/R$	ohm	1 ohm = 1.139×10^{-12} sec/cm
שטף מגנטי	Φ	gauss·cm^2	$\Phi = \int B \cdot da$		
קיבול	C	cm	$q = C(\varphi_2 - \varphi_1)$	farad	1 farad = 0.899×10^{12} cm
השראות	L, M	sec^2/cm	$\mathcal{E} = L \, dI/dt$	henry	1 henry = 1.113×10^{-12} sec^2/cm
דיפול חשמלי	P	e.s.u·cm	$P = q \cdot s$		
דיפול מגנטי	m	e.s.u·cm [= [illegible]]	$m = I \cdot a/c$		
H השדה	H	oersted [= gauss]	$\oint H ds = 4\pi I/c$		

שיטת M.K.S

M.K.S היא שיטת מדידות בעלה חשיבות בנושאי טכנולוגיה. אינה נהוגה בפיסיקה העיונית.

בפיסיקה נהוג להשתמש בשיטת C.G.S מלבד מאשר במעגלי זרם ישר או זרם חילופין, בהם נזקקים ל - M.K.S

הנוסחאות לגדלים השונים ב - M.K.S :

$$W(\text{joules}) = q\,\mathcal{E}\,(\text{coul} \times \text{volt})$$

$$\mathcal{E}(\text{volt}) = 10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\,(\text{gauss}\cdot\text{cm}^2/\text{sec})$$

$$\oint \underline{H}\cdot d\underline{s}\,(\text{oersted}\cdot\text{cm}) = \frac{4\pi}{10} I\,(\text{ampere})$$

$$P(\text{watts}) = I^2 R\,(\text{amp}^2 \times \text{ohms})$$

$$\mathcal{E}(\text{volt}) = L\frac{dI}{dt}\,(\text{henry} \times \text{amp}/\text{sec})$$

$$q(\text{coulombs}) = C(\varphi_1 - \varphi_2)\,(\text{farads} \times \text{volts}$$

כח ליח' אורך במוליך בשדה B :

$$\underline{F}(\text{dynes}/\text{cm}) = \frac{1}{10} I B\,(\text{amp} \times \text{gauss})$$