41

$$(41)\quad \vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\int \vec{r}\,'\, r'^{i}\, T_{00}\, d^3r' = \vec{r}\cdot\int \vec{r}\,'\, r'^{i}\,\frac{\partial T_{00}}{\partial t}\, d^3r'$$

$$= \vec{r}\cdot\sum_j\int \vec{r}\,'\, r'^{i}\,\frac{\partial T_{0j}}{\partial r'^{j}}\, d^3r' = -\vec{r}\cdot\sum_j\int (\hat{e}_j\, r'^{i} + \vec{r}\,'\,\delta^{i}_{j})\, T_{0j}\, d^3r'$$

$$= -\sum_j r_j \int r'^{i}\, T_{0j}\, d^3r' - \vec{r}\cdot\int \vec{r}\,'\, T_{0i}\, d^3r'$$

אם נציב זה ב (40) נקבל

$$(42)\quad h^{(new)}_{0i} = \frac{2G}{|\vec{r}|^3}\left\{ \vec{r}\cdot\int \vec{r}\,'\, T_{0i}\, d^3r' - \sum_j r_j \int r'^{i}\, T_{0j}\, d^3r' \right\}$$

כדאי כאן להתבונן ב h'_{0x}. הסוגריים, לאחר צמצום שני איברים נותנים

$$(43)\quad \{\ \} = y\int y'\, T_{0x}\, d^3r' - y\int x'\, T_{0y}\, d^3r'$$

$$+ z\int z'\, T_{0x}\, d^3r' - z\int x'\, T_{0z}\, d^3r'$$

אנו זוכרים ש T^{0j} הוא צפיפות התנע בכוון j (סעיף 1.ח) ולכן

$$y'\, T_{0x} - x'\, T_{0y} = -\left(y'\, T^{0x} - x'\, T^{0y}\right)$$

הוא רכיב z של תנע זוויתי L_z (ראה (1.ח)). לכן

$$(44)\quad \{\ \} = y L_z - z L_y = (\vec{r}\times\vec{L})_x$$

אם כן בלשון וקטורית

$$(45)\quad h_{0i} \to \vec{h} = \frac{2G}{|\vec{r}|^3}(\vec{r}\times\vec{L}) + O\!\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

ומה קורה עם h_{00} ו- h_{ij} תחת הטרנספורמציה (33)? לפי (7) h_{00} לא משתנה כלל. h_{ij} מקבל תוספת בצורת נגזרות מרחביות של האינטגרל ב (35). אבל אינטגרל הוא מסדר $O(1/r)$ ולכן התקונים ל h_{ij} הוו מסדר $O(1/r^2)$. כיוון שבאזור המרחק

$$(46)\quad \phi = -\frac{Gm}{r} + O\!\left(\frac{1}{r^2}\right)\cdots$$

אז, לסדר ב v/c הדומיננטי בכל חלק של המטריקה ניתן לכתוב

$$(47) \quad ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4G}{r^3}(\vec r \times \vec L)\cdot d\vec r\, dt + \left(1+\frac{2M}{r}\right)(dx^2+dy^2+dz^2)$$

לכן בקירוב הלינארי ולסדר $O(v)$ M ו- $\vec L$ הם הפרמטרים היחידים של מטריקה האסימפטוטית של גוף קוואזיסטטי, והמטריקה אינה תלויה בזמן.

ג. גרירת המערכות האינרציאליות

האבר $\vec r \times \vec L$ במטריקה (47) גורם לאפקט חדש בתנועה של חלקיק חפשי אפילו בגבול הניוטוני. אפקט זה, אפקט Lense-Thirring, הוא פועל יוצא מסיבוב מערכות האינרציאליות ביחס לקואורדינטות הגליליות בקרבת גוף מסתובב. הוא התופעה של גרירת המערכות האינרציאליות.

משוואת הגאודזיה

$$(48) \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

נותנת עבור רכיב מרחבי בגבול של מהירות נמוכה ($\tau \to t$)

$$(49) \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} + 2\sum_j \Gamma^i_{0j} v^j + \sum_{jk}\Gamma^i_{jk} v^j v^k = 0$$

קונסיסטנטי עם החלפת τ ב t הוא להזניח איברים מסדר $O(v^2)$, כלומר הסכום האחרון. כעת כיוון שהמטריקה (47) בלתי תלויה בזמן, ואנו בסדר הלינארי שבו מעלים אינדקסים עם η

$$(50) \quad \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} g_{00,i} = +\frac{M}{r^3}x^i$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}(g_{0i,j} - g_{0j,i}) = \frac{1}{2}(h_{0i,j} - h_{0j,i})$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_k \epsilon_{ijk}(\vec\nabla \times \vec h)^k$$

ולכן

(51)
$$\sum_j \Gamma^i_{0j} v^j = -\frac{1}{2}\sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, v^j (\vec\nabla\times\vec h)^k$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\vec v\times(\vec\nabla\times\vec h)\right]^i$$

לאור (50) + (51) אפשר לכתוב (49) בצורה וקטורית

(52)
$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^3}\vec r + 2\vec v\times\frac{1}{2}(\vec\nabla\times\vec h) + O(v^2)$$

איבר הראשון הוא הכח הניוטוני מהמסה m. אפשר להסתכל על האיבר השני בשתי דרכים. אם נשווה עם כח הלורנץ על מטען במגמה לא רלטיביסטי:

(53)
$$\vec f_L = \frac{e}{c}\vec v\times\vec B$$

אנו רואים שה $\vec h$ במטריקה הוא דמות הפוטנציאל הווקטורי לאותה "שדה מגנטי" שפועל על כל המסות שווה בשווה. לכן קוראים לחלק השני של הכח ב (52) "הכח הגרבי מגנטי", ול $\vec\nabla\times\vec h$ השדה הגרבימגנטי. כמו שבחשמל זרם חשמלי מוצר שדה מגנטי, כאן זרם מסה (סבוב) מוצר שדה גרבומגנטי. ובאמת של $\vec h$ ב (45) יש צורה של הפוטנציאל הווקטורי של דיפול מגנטי $-2GL$.

אפשר גם להסתכל על האיבר השני בגלל ומזון של אחרת. נכתוב את משוואות התנועה של חלקיק (52) הנע בהשפעת פוטנציאל ϕ כפי שהוא נראה במערכת מסתובבת בתדירות $\vec\Omega$:

(54)
$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = -\vec\nabla\phi + 2\vec v\times\vec\Omega$$

על כן האפקט של סבוב מקור השדה הגרביטציוני מורגש כסבוב מערכת הצירים xyz בתדירות $\frac{1}{2}\vec\nabla\times\vec h$. זה כמו לאמר שהמערכות האינרציאליות המקומיות מסתובבות ביחס לצירים xyz בתדירות מקומית $\vec\omega = -\frac{1}{2}\vec\nabla\times\vec h$. לפי (45)

(55)
$$-\frac{1}{2}\vec h = G\frac{\vec L\times\vec r}{r^3} = G\vec L\times(\vec r/r^3)$$ (42)

אם נשתמש בזהויות

(56)
$$\vec\nabla\times(\vec A\times\vec B) = \vec A(\vec\nabla\cdot\vec B) - \vec B(\vec\nabla\cdot\vec A) + (\vec B\cdot\vec\nabla)\vec A - (\vec A\cdot\vec\nabla)\vec B$$

(57)
$$\vec\nabla\cdot\frac{\vec r}{r^3} = 4\pi\,\delta(\vec r)$$

נקבל (חוץ מבראשות)

(58) $$\vec{\omega} = -G\vec{L}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{G}{r^3}\left[\vec{L} - \frac{3(\vec{L}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right]$$

באחרונה השתמשנו ב

(59) $$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{\hat{i}\hat{i}+\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k}}{r^3} - 3\,\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r^5}\,\vec{r}$$

לאורך ציר הסיבוב ($\vec{L}$) $\vec{r}$ מקביל ל- $\vec{L}$ ולכן

(60) $$\frac{3(\vec{L}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2} = 3\vec{L}$$

כך ש

(61) $$\vec{\omega} = \frac{2G\vec{L}}{r^3}$$

לעומת זאת, במשור המשווה $\vec{L}\cdot\vec{r}=0$ ולכן

$$\vec{\omega} = -\frac{G\vec{L}}{r^3}$$

מכאן שלאורך הציר הגרירה עם הסיבוב, ובקו רוחב נמוך הגרירה כנגד הסיבוב. אפשר לבדוק שעבור

(62) $$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \vec{\omega}\perp\vec{L}$$

Schiff הציע לבדוק אפקט גרירת המערכות ע"י חפוש אחרי פרצסות גירוסקופ שאינו נתון למומנטים חיצוניים (פרט לאפקטים גרביטציוניים). כאן נקבל את תוצאת גירוסקופ הנמצא במנוחה רגעית במערכת הגלובלית xyz של מסלול גוף מסתובב (בנסוי הצפוי צמוד בכדור הארץ).

בסעיף 1.א למדנו שארבעה-וקטור של ספין S^α הינו שמור בהעדר כוחות ואורתוגונלי למהירות הגוף:

(63) $$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = 0 \qquad S_\alpha u^\alpha = 0$$

זה בקואורדינטות פרטיות. בנוסחות כלליות נכתוב הראשונה

(64) $$\frac{DS_\alpha}{d\tau} = u^\beta \nabla_\beta S_\alpha = u^\beta\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} S_\gamma\right) = 0$$

נבחר הקואורדינטות ונפרט משוואה 12 עבור $\alpha = j$

(65) $$\frac{dS_j}{d\tau} - \Gamma^t_{tj} S_t u^t - \sum_i \Gamma^t_{ij} S_t u^i - \sum_i \Gamma^i_{tj} S_i u^t - \sum_{ik} \Gamma^i_{kj} S_i u^k = 0$$

לחלקיק במנוחה $u^i = 0$, שאומר גם לפי $S_\alpha u^\alpha = 0$ ש- $S_t = 0$.
אם נחלק t ב- τ נקבל מ- (65)

(66) $$\frac{dS_j}{dt} = (u^t)^{-1} \frac{dS_j}{d\tau} = \sum_i \Gamma^i_{tj} S_i$$

עפ"י (50) אפשר לכתוב

(67) $$\sum_i \Gamma^i_{tj} S_i = -\frac{1}{2} \sum_{ki} \epsilon_{ijk} S_i (\vec{\nabla} \times \vec{h})^k$$

אבל $-\frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{h})$ הוא $\vec{\omega}$ של המערכת האינרציאלית
ולכן

(68) $$\frac{dS_j}{dt} = \sum_{ki} \epsilon_{jki}\, \omega^k S_i$$

או בצורה וקטורית

(69) $$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{S}$$

לכן הגירוסקופ עושה פרצסיה סביב הכוון של $\vec{\omega}$ עם תדירות $|\vec{\omega}|$, כלומר הוא במנוחה במערכות האינרציאליות המסתובבות.

פרצסות הגירוסקופ הוא הבסיס לניסוי Gravity Probe B הנערך השנה כולל: 3 גירוסקופים מוצבים בלוויין שאמורים למדוד את סבוב מערכות האינרציאליות ביחס לכוכבים כתוצאה מסבוב כדה"א.

נחזור ל- (61) ונכתוב בסדרי גודל

$$\omega \sim \frac{GMR^2\Omega}{r^3} = \frac{GM}{c^2R}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Omega$$

למשל, עבור כדה"א $\frac{GM}{c^2R}$ הוא מסדר 10^{-9}. לכן המערכות האינרציאליות מסתובבות בתדירות אחת ל- 10^7 שנה.